

به نام خدا
جزوه و نکات کلیدی
پایه نهم
شهرستان شهریار

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل اول)

سال نهم

مجموعه ها

مجموعه: به دسته ای از اشیاء کاملاً مشخص و دو به دو متمایز (غیر تکراری) مجموعه می گویند.

مثال: کدام یک از عبارات زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟

الف) ۳ عدد زوج متوالی (مجموعه نیست) ب) ۴ گل زیبا (مجموعه نیست) ج) اعداد اول کمتر از ۱۰ (مجموعه است)

نکته: مجموعه را به صورت **آکولاد** $\{ \}$ نشان می دهند و مجموعه را با **حروف بزرگ انگلیسی** نام گذاری می کنند.

نکته: به هر یک از اعداد و عبارت داخل مجموعه **عضو** می گویند و علامت عضو بودن به صورت $\in$ و علامت عضو نبودن به صورت $\notin$ می باشد.

نکته: تعداد عضو های هر مجموعه مانند A را به صورت $n(A)$ نشان می دهند.

مثال: با توجه به مجموعه A درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$$A = \{3, \{4, 5\}, 6\} \quad n(A) = 4 \quad \times \quad 3 \in A \quad \checkmark \quad 4 \notin A \quad \checkmark \quad \{6\} \in A \quad \times$$

مجموعه تهی: مجموعه ای که دارای هیچ عضوی نباشد. علامت مجموعه تهی به صورت $\{ \}$ یا $\emptyset$ می باشد.

مثال: کدام یک از مجموعه های زیر مجموعه تهی است؟

الف) اعداد طبیعی کمتر از ۴ $\{1, 2, 3\}$ ب) اعداد صحیح کمتر از صفر $\{0, -1, -2, -3, \dots\}$ ج) اعداد طبیعی بین ۴ و ۵ $\{ \}$ $\checkmark$

دو مجموعه برابر: دو مجموعه A و B را برابر می گویند که هر عضو مجموعه A در مجموعه B و هر عضو مجموعه B در مجموعه

A وجود داشته باشد. مانند دو مجموعه ی مقابل:

$$A = \{4, 3, 1\} \quad \text{و} \quad B = \left\{ \sqrt{9}, 7, \frac{20}{5} \right\}$$

مثال: دو مجموعه ی زیر برابرند. مقدار x و y را به دست آورید؟

$$\{x - 7, 3\} = \{4, y\} \quad x - 7 = 4 \Rightarrow x = 11, y = 3$$

زیر مجموعه: مجموعه A زیر مجموعه B است هر گاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و آن را به صورت $A \subseteq B$

نشان می دهند. اگر A زیر مجموعه B نباشد آن را به صورت $A \not\subseteq B$ نشان می دهند.

نکته: اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه رابطه های مقابل همواره برقرار است:

$$A \cup B = B \quad \text{و} \quad A \cap B = A$$

نکته: برای پیدا کردن تعداد زیر مجموعه ها از رابطه 2^n استفاده می کنیم. اگر تعداد زیر مجموعه را داشته باشیم و تعداد عضو را خواسته باشند عدد داده شده را **تجزیه** می کنیم.

مثال: الف) مجموعه ی $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ چند زیر مجموعه دارد؟ زیر مجموعه $n(A) = 10 \Rightarrow 2^n = 2^{10} = 1024$

ب) یک مجموعه دارای ۳۲ زیر مجموعه است. این مجموعه دارای چند عضو است؟ $32 = 2^5 \Rightarrow 5$ عضو دارد

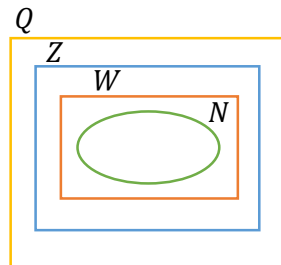
مجموعه ها

نمایش مجموعه ها : الف) مجموعه اعداد طبیعی : $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ ب) مجموعه اعداد حسابی : $W = \{0, 1, 2, \dots\}$

ج) مجموعه اعداد صحیح : $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ د) مجموعه اعداد طبیعی زوج : $E = \{2, 4, 6, \dots\}$

ه) مجموعه اعداد طبیعی فرد : $O = \{1, 3, 5, \dots\}$ و) مجموعه اعداد گویا : $Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\right\}$

نمودار ون مجموعه ها : مجموعه ها را می توان داخل یک منحنی بسته ای نشان داد.



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$$

نکته : نمودار ون مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است :

مثال : الف) عضوهای هر مجموعه را بنویسید؟

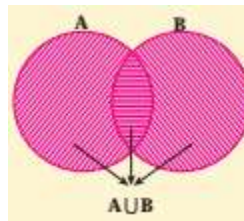
$$A = \{x \mid x \in Z, -4 \leq x < 2\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1\} \quad B = \{2x - 1 \mid x \in N, x \leq 3\} = \{1, 3, 5\}$$

$$\{2(1) - 1, 2(2) - 1, 2(3) - 1\}$$

ب) صورت ریاضی هر مجموعه را بنویسید؟

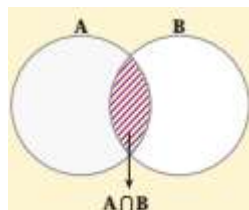
$$C = \{-6, -5, \dots, 3\} = \{x \mid x \in Z, -7 < x < 4\} \quad D = \{4, 8, 12, \dots\} = \{4x \mid x \in N\}$$

اجتماع دو مجموعه : اجتماع دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند و اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cup B$ نمایش می دهند.



نمودار ون اجتماع دو مجموعه A و B

اشتراک دو مجموعه : اشتراک دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی که هم عضو A و هم عضو B باشند و اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت $A \cap B$ نمایش می دهند.



نمودار ون اشتراک دو مجموعه A و B

مجموعه ها

تفاضل دو مجموعه : مجموعه $A - B$ (A منهای B) شامل همه عضوهایی است که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

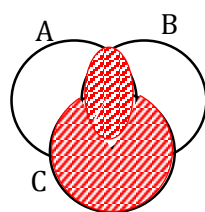
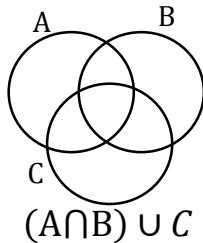


نمودار ون تفاضل دو مجموعه A و B

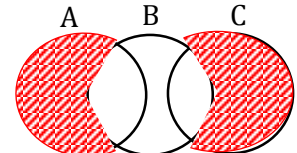
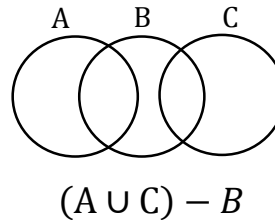
مثال : اگر مجموعه $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{x \mid x \in Z, -2 < x \leq 2\}$ و $C = \{x^2 + 1 \mid x \in A\}$ باشد. عضوهای هر مجموعه را بنویسید؟
 $C = \{1^2 + 1, 2^2 + 1, 3^2 + 1\} = \{2, 5, 10\}$ $B = \{-1, 0, 1, 2\}$

الف) $A - C = \{1, 3\}$

ب) $B \cap (A \cup C) = \{-1, 0, 1, 2\} \cap \{1, 2, 3, 5, 10\} = \{1, 2\}$



مثال : با توجه به هر شکل مجموعه های داده شده را هاشور بزنید؟



مجموعه و احتمال : برای به دست آوردن احتمال هر پیشامد از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه ی حالت های ممکن}} \Rightarrow p(A) = \frac{n(A)}{n(B)}$$

مثال : در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را به دست آورید؟

الف) احتمال آمدن عدد اول : $A = \{2, 3, 5\}$ $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ب) احتمال آمدن عدد بزرگتر و مساوی ۵ : $B = \{5, 6\}$ $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مثال : در پرتاب دو تاس احتمال های زیر را به دست آورید؟
 کل حالت ها $n(S) = 6^2 = 36$

الف) احتمال آمدن این که تاس اول عدد فرد و تاس دوم عدد کوچکتر از ۳ بیاید :

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (3, 1), (3, 2), (5, 1), (5, 2)\} \Rightarrow n(A) = 6 \Rightarrow p(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ب) احتمال آمدن این که مجموع هر دو عدد تاس ۶ شود :

$$B = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\} \Rightarrow n(B) = 5 \Rightarrow p(B) = \frac{5}{36}$$

عددهای حقیقی

اعداد گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

نکته: اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

جمع و تفریق اعداد کسری: مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک همان (ب.م.م) مخرج ها است.

مانند:

$$\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{7}{18}\right) = \frac{-15 + 14}{36} = -\frac{1}{36} \quad \text{مخرج ها (ب.م.م)} \Rightarrow (12, 18) = 36$$

ضرب اعداد کسری: فقط در ضرب می توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت ها در هم و مخرج ها در هم ضرب می شود.

مانند:

$$\left(-\frac{5}{12}\right) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{8}$$

تقسیم اعداد کسری: تقسیم به ضرب تبدیل می شود. (کسر اولی در معکوس کسر دومی ضرب می شود)

مانند:

$$\left(+\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{5}{21}\right) = \left(+\frac{4}{7}\right) \times \left(-\frac{21}{5}\right) = -\frac{12}{5} = -2\frac{2}{5}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\left(+\frac{2}{3}\right) \div \left[\left(-\frac{1}{15}\right) + \left(+\frac{3}{5}\right)\right] = \left(+\frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{-1+9}{15}\right) = \left(+\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{15}{8}\right) = +\frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

مقایسه کسرها: از دو روش می توان استفاده کرد:

الف) هم مخرج کردن کسرها: ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده سپس کسرها را مقایسه می کنیم.

مثال: کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{8}{20}, \frac{15}{20}, \frac{10}{20}, \frac{14}{20} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4} \quad (2, 4, 5, 10) = 20$$

ب) تبدیل به عدد اعشار: (صورت بر مخرج تقسیم و خارج قسمت تا دو رقم اعشار ادامه می دهیم).

مثال: کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10} \Rightarrow \frac{2}{5} = 0.40, \quad \frac{3}{4} = 0.75, \quad \frac{1}{2} = 0.50, \quad \frac{7}{10} = 0.70 \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{7}{10} < \frac{3}{4}$$

نکته: بین هر دو عدد گویا بی نهایت عدد وجود دارد.

عددهای حقیقی

پیدا کردن کسر هایی بین دو عدد کسری : چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی آن به صورت زیر است :

(۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم

(۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد

بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال : بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{11}{14} < \frac{4}{5}$$

روش اول

$$\frac{3}{4} \text{ و } \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{15}{20} \text{ و } \frac{16}{20} \Rightarrow \frac{45}{60} \text{ و } \frac{48}{60} \Rightarrow \frac{45}{60} < \frac{46}{60} < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$$

روش دوم

تبدیل کسر به اعداد اعشاری :

(۱) عددهای اعشاری متناهی یا مختوم : اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود آن کسر را مختوم نام دارد.

مانند : $\frac{3}{4} = 0.75$ و $\frac{6}{5} = 1.2$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ باشند آن کسر مختوم است.

مانند : $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5}$ و $\frac{5}{8} = \frac{5}{2^3}$

(۲) عددهای اعشاری متناوب ساده : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود آن را متناوب ساده می گویند.

مانند : (خط تیره روی عدد به معنی تکرار یا گردش عدد است) $\frac{5}{11} = 0.4545000 = 0.\overline{45}$ و $\frac{1}{3} = 0.33000 = 0.\overline{3}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشند آن کسر متناوب ساده است.

مانند : $\frac{3}{77} = \frac{3}{7 \times 11}$ و $\frac{6}{13}$

(۳) عدد های اعشاری متناوب مرکب : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم های تکراری برسند به آن کسر متناوب مرکب می گویند.

مانند : $\frac{5}{6} = 0.833000 = 0.8\overline{3}$ و $\frac{7}{22} = 0.31818000 = 0.3\overline{18}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشند آن کسر متناوب مرکب است.

مانند : $\frac{5}{14} = \frac{5}{2 \times 7}$ و $\frac{2}{75} = \frac{2}{3 \times 5^2}$

عددهای حقیقی

اعداد گنگ یا اصم: اعداد که تعداد ارقام اعشاری آن ها نا متناهی و دارای دوره تناوب نباشند اعداد گنگ نام دارند.

نکته: مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی $\mathbb{Q}$ یا $\mathbb{Q}^c$ نشان می دهند.

نکته: اگر n مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است. (یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند عدد گنگ هستند)

نکته: عدد π چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است. (عدد π تا ۱۰ رقم اعشار: $\pi \approx 3/1415926535$)

مثال: در جای خالی علامت $\in$ یا $\notin$ قرار دهید.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{۲ مربع کامل نیست} & & \text{۴۷ مربع کامل نیست} & & & & \\ \sqrt{2} \in \mathbb{Q} & \quad \quad & \sqrt{47} \in \mathbb{Q} & \quad \quad & \pi \in \mathbb{Q} & \quad \quad & 3/14 \notin \mathbb{Q} \\ -\frac{2}{5} \notin \mathbb{Q} & \quad \quad & \sqrt{0/36} \notin \mathbb{Q} & \quad \quad & \end{array}$$

نکته: بین دو عدد بی نهایت عدد گنگ وجود دارد.

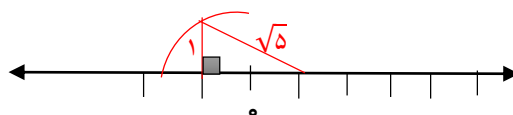
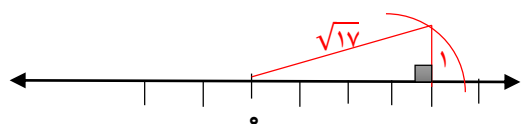
مثال: بین هر دو عدد داده شده دو عدد گنگ بنویسید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} \quad \sqrt{3} \text{ و } \sqrt{4} & \sqrt{3} < \sqrt{3/1} < \sqrt{3/2} < \sqrt{4} \\ \text{ب)} \quad 2 \text{ و } 3 & 2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{6} < \sqrt{9} = 3 \end{array}$$

مثال: عدد $3 - \sqrt{10}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

$$3 - \sqrt{16} < 3 - \sqrt{10} < 3 - \sqrt{9} \Rightarrow -1 < 3 - \sqrt{10} < 0 \quad \text{بین ۰ و -۱ قرار دارد}$$

مثال: اعداد $\sqrt{17}$ و $1 - \sqrt{5}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

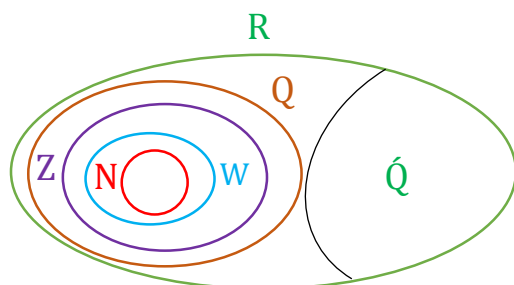


اعداد حقیقی: اجتماع مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهد: $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^c = \mathbb{R}$

نکته: مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی $\mathbb{R}$ نشان می دهند.

نکته: نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) و اعداد حسابی ($\mathbb{W}$) و اعداد صحیح ($\mathbb{Z}$) و اعداد گویا ($\mathbb{Q}$) و اعداد گنگ ($\mathbb{Q}^c$)

و اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) به صورت زیر است:



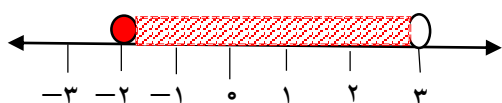
$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q}^c \subseteq \mathbb{R}$$

عددهای حقیقی

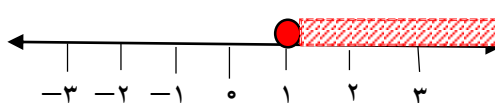
نمایش اعداد حقیقی روی محور: چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتدی است (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و بدون سرکش دایره تو خالی قرار می دهیم)

مثال: مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

$$A = \{x \in R \mid -2 \leq x < 3\}$$

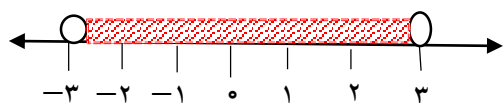


$$B = \{x \in R \mid 1 \leq x\}$$



مثال: مجموعه متناظر محور مقابل را بنویسید.

$$C = \{x \in R \mid -3 < x < 3\}$$



قدر مطلق: فاصله ی نقطه نمایش یک عدد مانند a را از مبدا مختصات قدر مطلق a می نامیم و آن را به صورت $|a|$ نشان می دهیم.

خواص قدر مطلق: الف) قدر مطلق عدد مثبت برابر است با خود آن عدد: $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

ب) قدر مطلق صفر برابر با صفر است: $x = 0 \Rightarrow |x| = 0$

ج) قدر مطلق عدد منفی برابر با قرینه آن عدد است: $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

مثال: عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$|4 - 6 \times 2^2 \div 3 + 2| = |-2| = 2$$

$$|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$$

حاصل مثبت

$$|a^{20} - a^{30}| = a^{30} - a^{20}$$

حاصل منفی

مثال: اگر $x = \frac{2}{3}$ و $y = 3$ و $z = -\frac{1}{3}$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|-6x - 4z| + 2|y| = |-6\left(\frac{2}{3}\right) - 4\left(-\frac{1}{3}\right)| + 2|3| = |-4 + \frac{4}{3}| + 2(3) = |-\frac{8}{3}| + 6 = \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3}$$

نکته: با توجه به مفهوم قدر مطلق همواره رابطه مقابل برقرار است:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}| = -(2 - \sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$$

حاصل منفی

$$\sqrt{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2} = |3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

حاصل مثبت

استدلال و اثبات در هندسه

استدلال: دلیل آوردن و استفاده از معلومات قبلی برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است.

اثبات: به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوئیم.

مثال نقض: برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم.

نکته: همواره برای اثبات یک مسئله نمی توان از رسم شکل یا شهود استفاده کرد زیرا ممکن است **خطای دید** در آن شکل وجود داشته باشد.

مثال: برای هر یک از مسئله های زیر یک مثال نقض بزنید:

الف) تمام اشکال هندسی گوشه یا زاویه دارند؟ دایره یک شکل هندسی است که دارای گوشه و زاویه نیست.

ب) تمام اعداد زوج اول هستند؟ عدد ۲ تنها عدد زوجی است که اول نیز است.

مثال: کدام یک از استدلال های زیر منطقی و کدام غیر منطقی است:

الف) علی می گوید: هر وقت من درس نخواندم همان روز معلم از من سوال می کند؟ **غیر منطقی**

ب) تصادف منجر به مرگ در جادها ممکن است به دلیل نقض فنی ماشین باشد؟ **منطقی**

فرض مسئله: اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله: خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

مثال: در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید:

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. **فرض:** خواص لوزی **حکم:** برابر بودن زاویه های رو به رو

ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. **فرض:** دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع **حکم:** برابر بودن دو مماس

مثال: با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید:

الف) $\left. \begin{array}{l} \text{در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگرند} \\ \text{لوزی نوعی مربع است} \end{array} \right\}$ $\Leftarrow$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگرند

ب) $\left. \begin{array}{l} \text{هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است} \\ \text{مربع دارای زاویه قائمه است} \end{array} \right\}$ $\Leftarrow$ مربع نوعی مستطیل است

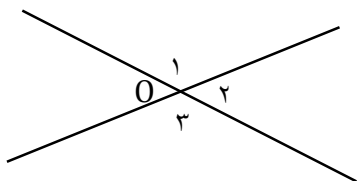
درسنامه و نکات کلیدی

(فصل سوم)

سال نهم

استدلال و اثبات در هندسه

مثال: ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.

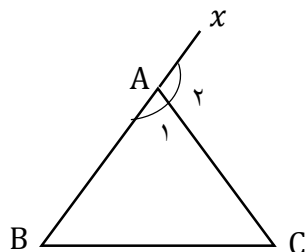


فرض: $\hat{O}_1$ و $\hat{O}_3$ دو زاویه متقابل به راس

حکم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180 \\ \text{درجه } \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 + \cancel{\hat{O}_2} = \cancel{\hat{O}_2} + \hat{O}_3 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_3$$

مثال: ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.



فرض: $\hat{A}_2$ زاویه ی خارجی مثلث

حکم: $\hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{درجه } \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 180 \\ \text{درجه } \hat{A}_1 + \hat{B} + \hat{C} = 180 \end{array} \right\} \Rightarrow \cancel{\hat{A}_1} + \hat{A}_2 = \cancel{\hat{A}_1} + \hat{B} + \hat{C} \Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{C}$$

هم نهشتی مثلث ها: دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند:

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته: سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه: دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند:

الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث:

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

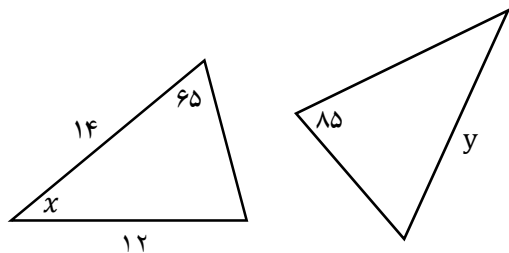
ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته: در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال: دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟



(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

$$180 - (15 + 65) = 30 \quad (\text{مجموع زاویه های داخلی مثلث } 180 \text{ درجه است})$$

$$x = 30, \quad y = 14$$

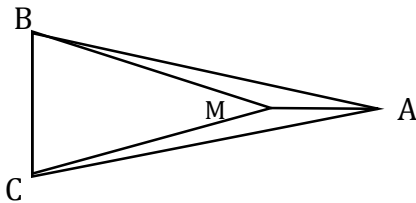
درسنامه و نکات کلیدی

(فصل سوم)

سال نهم

استدلال و اثبات در هندسه

مثال: در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند. دلیل هم نهشتی دو مثلث AMB و AMC را بنویسید.

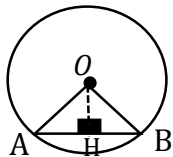


فرض: $AB = AC, MB = MC$
حکم: $\triangle AMB \cong \triangle AMC$

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AB = AC \\ \text{فرض } MB = MC \\ \text{ضلع مشترک } AM = AM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC \quad (\text{ض ض ض})$$

مثال: با توجه به شکل زیر نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود آن وتر را نصف می کند.

فرض: O مرکز دایره و OH عمود بر AB
حکم: $AH = HB$



$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow AH = HB \quad (\text{اجزای متناظر (و ض)})$$

قدم های حل مسئله: برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است:

- (۱) درک و فهم مسئله (۲) رسم شکل (۳) نوشتن فرض و حکم مسئله (۴) راهبرد حل مسئله

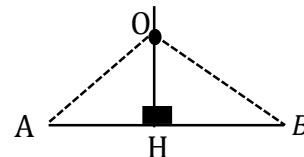
مثال: نشان دهید هر نقطه روی عمود منصف قرار داشته باشد از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

گام اول: (درک و فهم مسئله) عمود منصف خطی بر خط رسم شده عمود باشد و آن خط را نصف کند.

فرض: OH عمود منصف

حکم: $OA = OB$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)



گام دوم: (رسم شکل)

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرض } AH = HB \\ \text{درجه } \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OH = OH \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow OA = OB \quad (\text{اجزای متناظر (ض ض)})$$

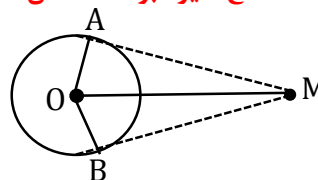
مثال: نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول: (درک و فهم مسئله) شعاع دایره بر خط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

فرض: $OA = OB, \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$

گام سوم: (نوشتن فرض و حکم)

حکم: $MA = MB$



گام دوم: (رسم شکل)

$$\left. \begin{array}{l} \text{شعاع دایره } OA = OB \\ \text{درجه } \hat{A} = \hat{B} = 90^\circ \\ \text{ضلع مشترک } OM = OM \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Rightarrow MA = MB \quad (\text{اجزای متناظر (و ض)})$$

گام چهارم: (راهبرد حل مسئله)

استدلال و اثبات در هندسه

دو شکل متشابه : دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه ها تغییر نکرده باشد دو شکل متشابه می گویند.

نکته : دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند.

نکته : دو مستطیل همواره متشابه نیست. (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکنند)

نکته : دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیست. (چون ممکن است زاویه ها دو به دو برابر نباشند)

نکته : نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می گویند.

نکته : دو شکل هم نهشت همواره متشابه و نسبت تشابه آن ها عدد یک است.

مثال : دو مثلث ABC و DEF متشابه هستند. اگر اضلاع مثلث ABC به اندازه های ۳ و ۴ و ۶ و اضلاع مثلث DEF به اندازه های ۸، ۳، x باشند : (اضلاع دو مثلث از کوچک به بزرگ نوشته شده اند)

الف) مقدار x و y را به دست آورید.

تناسب اضلاع

$$\frac{3}{2y} = \frac{4}{8} = \frac{6}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2y} = \frac{4}{8} \Rightarrow 8y = 24 \Rightarrow y = 3 \\ \frac{4}{8} = \frac{6}{x-3} \Rightarrow 4x - 12 = 48 \Rightarrow 4x = 60 \Rightarrow x = 15 \end{cases}$$

ب) نسبت تشابه دو مثلث را بنویسید. $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

مثال : مقیاس نقشه ای ۱:۱۰۰۰۰۰ است. اگر طول جاده ای روی این نقشه ۱۲ سانتی متر باشد :

الف) طول واقعی جاده چند کیلو متر است؟

$$\frac{1}{100000} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 1200000 \text{ cm} \quad 1200000 \div 100000 = 12 \text{ km}$$

تبدیل واحد : هر کیلو متر ۱۰۰۰۰۰ سانتی متر است

ب) اگر اندازه ی یکی از زاویه های روی نقشه ۴۰ درجه باشد اندازه این زاویه در واقعیت چند درجه است؟

در دو شکل متشابه زاویه تغییر نمی کند. پس زاویه در واقعیت نیز ۴۰ درجه است.

نکته : در دو مثلث متشابه : الف) نسبت محیط و ارتفاع و نیمساز و عمود منصف و میانه با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت مساحت با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال : نسبت تشابه دو مثلث $\frac{3}{5}$ می باشد :

الف) نسبت میانه دو مثلث چند است؟ $\frac{3}{5}$

ب) نسبت مساحت دو مثلث چند است؟ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل چهارم)

سال نهم

توان و ریشه

توان: اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه نویسی از توان استفاده می شود.

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

توان →
پایه →

$$\underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n = a^n$$

مانند:

ضرب اعداد توان دار: الف) اگر پایه ها برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$4^7 \times 4^3 = 4^{10}$$

مانند:

ب) اگر توان ها برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$12^7 \times 3^7 = 36^7$$

مانند:

تقسیم اعداد توان دار: الف) اگر پایه ها برابر باشند: یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$\frac{9^5}{9^3} = 9^2$$

مانند:

ب) اگر توان ها برابر باشند: یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

$$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$20^8 \div 4^8 = 5^8$$

مانند:

نکته: اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

$$4^8 \times 2^3 = (2^2)^8 \times 2^3 = 2^{16} \times 2^3 = 2^{19}$$

تجزیه

$$9^2 \div 27 = (3^2)^2 \div 3^3 = 3^4 \div 3^3 = 3$$

تجزیه

مانند:

نکته: اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

$$2^6 + 2^6 = 2 \times 2^6 = 2^7$$

$$9^5 + 9^5 + 9^5 = 3 \times 9^5 = 3 \times (3^2)^5 = 3^{11}$$

تجزیه

مانند:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

توان منفی: برای به دست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس کرده تا به توان مثبت تبدیل شود.

نکته: تمام قواعد اعداد توان دار برای اعداد با توان منفی صدق می کند.

نکته: اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن قرینه می شود.

مثال: حاصل هر عبارت را به صورت توان طبیعی (توان مثبت) بنویسید.

$$5^{-6} = \left(\frac{1}{5}\right)^6$$

$$3^{-4} \times 3^2 \div 27 = 3^{-4} \times 3^2 \div 3^3 = 3^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$\frac{20^{-6}}{5^2 \times 4^{-6}} = \frac{5^{-6}}{5^2} = 5^{-8} = \left(\frac{1}{5}\right)^8$$

$$\frac{4^7 \times 3^{-6}}{3^3 \times 4^{-2}} = \frac{4^7 \times 4^2}{3^3 \times 3^6} = \frac{4^9}{3^9} = \left(\frac{4}{3}\right)^9$$

توان و ریشه

نکته: هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر باشد حاصل عدد یک است.

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید؟

$$3^2 + 5^0 - 2^{-2} = 9 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{40 - 1}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$$

نماد علمی: برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

نکته: به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت): ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از

عدد ۱۰ می نویسیم.

رقم ۸

$$34100000 = 3.41 \times 10^8$$

رقم ۴

$$14752/93 = 1.475293 \times 10^4$$

مانند:

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی): ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از

ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

رقم ۶

$$0.0000037 = 3.7 \times 10^{-6}$$

$$0.000678 = 6.78 \times 10^{-4}$$

مانند:

مثال: حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$530000 \times 0.00027 = \frac{5}{3} \times 10^5 \times \frac{2}{7} \times 10^{-4} = \frac{14}{32} \times 10^1 = \frac{1}{432} \times 10^2$$

ریشه گیری: الف) ریشه دوم اعداد: هر عدد دارای دو ریشه دوم است: (یکی مثبت و دیگری منفی)

$$4^2 = (-4)^2 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4 \text{ و } -4$$

(ریشه های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و -۴)

مانند:

نکته: اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ وقت منفی نمی شود)

ب) ریشه سوم اعداد: هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

نکته: اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت $\sqrt[3]{a}$ نشان می دهیم.

فرجه یا ریشه

$$3^3 = 27 \Rightarrow \sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{و} \quad (-3)^3 = -27 \Rightarrow \sqrt[3]{-27} = -3$$

مانند:

مثال: حاصل جذر های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{64 \times \frac{1}{9}} = 8 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\sqrt[4]{-125} = 4 \times -5 = -20$$

$$\sqrt{64} \times \sqrt[3]{-64} = 8 \times -4 = -32$$

$$\sqrt[4]{0.001} \times \sqrt{\sqrt{16}} = 0.1 \times 2 = 0.2$$

توان و ریشه

ضرب و تقسیم رادیکال ها: اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

نکته: اگر رادیکال ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال ها را ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال: حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$2\sqrt{2} \times \sqrt{8} = 2\sqrt{16} = 2 \times 4 = 8$$

$$\sqrt[3]{-2} \times \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

$$8\sqrt{50} \div 4\sqrt{2} = 2\sqrt{25} = 2 \times 5 = 10$$

$$9\sqrt[3]{54} \div 3\sqrt[3]{2} = 3\sqrt[3]{27} = 3 \times 3 = 9$$

ساده کردن رادیکال ها: بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد یک ضریب بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

ریشه دوم

$$\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{2 \times 64} = 4\sqrt[3]{2}$$

ریشه سوم

$$\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3 \times 27} = 3\sqrt[3]{3}$$

ریشه سوم

مانند:

جمع و تفریق رادیکال ها: اگر قسمت رادیکال ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می توانیم آن ها را همانند عبارت های جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

$$5\sqrt{2} - 6\sqrt{5} + 3\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$$

مانند:

مثال: عبارت های زیر را ساده کنید.

$$2\sqrt{2} - \sqrt{75} - 3\sqrt{72} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3 \times 25} - 3\sqrt{2 \times 36} + 4\sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \times 5 - 3\sqrt{2} \times 6 + 4\sqrt{3} = -16\sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} + 3\sqrt{-54} + \sqrt[3]{16} - 2\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 9} + 3\sqrt[3]{2 \times -27} + \sqrt[3]{2 \times 8} - 2\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times 3 + 3\sqrt[3]{2} \times -3 + \sqrt[3]{2} \times 2 - 2\sqrt{2} \times 2 = -\sqrt{2} - 7\sqrt[3]{2}$$

گویا کردن مخرج کسره های رادیکالی: گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم.

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{3\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

مانند:

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد: صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار فرجه را توان کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

$$\sqrt[3]{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7} \times \sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{147}}{7}$$

$3 - 1 = 2$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a}$$

$3 - 2 = 1$

مانند: