

به نام خدا
جزوه و نکات کلیدی
پایه هشتم
شهرستان شهریار

عدهای صحیح و گویا

یادآوری اعداد صحیح: اعداد صحیح از سه دسته تشکیل شده است: (اعداد مثبت و عدد صفر و اعداد منفی)

نکته: اعداد صحیح را با حرف انگلیسی Z نمایش می دهند: $Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

جمع و تفریق اعداد صحیح: ابتدا اعداد را مختصر کرده سپس اگر هم علامت باشند دو عدد را کم می کنیم و برای جواب علامت عدد بزرگتر را می گذاریم.

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

$$[(-18) + (+12)] - (-7) = -18 + 12 + 7 = 1 \quad 10 - 83 + (+6) - (-(9)) = 10 - 83 + 6 - 9 = -76$$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح: ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس اعداد را با توجه به علامت بین آن ها ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال: حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

$$[(-6) \times (+4)] \div (-3) = (-24) \div (-3) = 8 \quad (-8) \times [12 \div (+4)] = (-8) \times (+3) = (-24)$$

اولویت های ریاضی: (۱) داخل مجموعه یا کروشه یا پرانتز (۲) توان و جذر

(۳) ضرب و تقسیم (از چپ به راست) (۴) جمع و تفریق

مثال: حاصل عبارت زیر با توجه به ترتیب عملیات به دست آورید؟

$$4 - 4 \times 3^2 \div 6 - (9 \div 3) = 4 - 4 \times 9 \div 6 - 1 = 4 - 36 \div 6 - 1 = 4 - 6 - 1 = -3$$

نکته: برای جمع اعداد یک سری منظم از رابطه های زیر استفاده می کنیم:

$$\text{عدد اول} - \text{عدد آخر} \\ \text{تعداد اعداد} = \frac{\text{فاصله اعداد}}{+1}$$

$$\text{عدد اول} + \text{عدد آخر} \\ \text{تعداد اعداد} \times \frac{\text{مجموع اعداد}}{2}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$3 + 6 + 9 + \dots + 204 = 7038 \quad \text{تعداد اعداد} = \frac{204 - 3}{3} + 1 = 67 + 1 = 68 \quad \text{مجموع اعداد} = \frac{204 + 3}{2} \times 68 = 207 \times 34 = 7038$$

نکته: برای جمع اعداد یک سری منظم که یک در میان مثبت و منفی باشند ابتدا دو به دو اعداد جواب می دهیم.

مثال: حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\begin{array}{r} -2 \quad -2 \quad -2 \\ 10 - 12 + 14 - 16 + \dots + 102 - 104 = 24 \times -2 = -48 \\ 104 - 10 \\ \text{تعداد اعداد} = \frac{104 - 10}{2} + 1 = 47 + 1 = 48 \quad 48 \div 2 = 24 \end{array}$$

عددهای صحیح و گویا

اعداد گویا: هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

نکته: اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

جمع و تفریق اعداد گویا (اعداد کسری): ابتدا اعداد را مختصر کرده سپس مخرج مشترک می گیریم. که بهترین مخرج همان (ک.م.م) مخرج ها می باشد.

مثال: حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید؟

$$\left(+\frac{3}{4}\right) - \left(+\frac{5}{12}\right) = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{9-5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$-\frac{4}{5} + \frac{1}{12} - \frac{3}{10} = \frac{-48+5-18}{60} = -\frac{61}{60} = -1\frac{1}{60}$$

ضرب اعداد گویا: ابتدا در ضرب اعداد را ساده کرده سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می کنیم.

مثال: حاصل ضرب های زیر را به دست آورید؟

$$\left(+\frac{3}{5}\right) \times \left(+\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)$$

تقسیم اعداد گویا: تقسیم به ضرب تبدیل می شود یعنی کسر اولی را در معکوس کسر دوم ضرب کرده و حاصل را به دست می آوریم.

مثال: حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$\left(-\frac{5}{8}\right) \div \left(-\frac{14}{15}\right) = \left(-\frac{5}{8}\right) \times \left(-\frac{15}{14}\right) = \frac{15}{16}$$

$$\frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال: حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید؟

$$\left(-\frac{2}{5}\right) \div \left[\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right)\right] = \left(-\frac{2}{5}\right) \div \left(\frac{15-14}{20}\right) = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(+\frac{20}{1}\right) = (-8)$$

نکته: نوشتن عددی گویا بین هر دو عدد گویا به چند روش است که دو روش کاربردی آن :

(۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم
بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال: بین $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{5}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{3}{4} < \frac{7}{9} < \frac{11}{14} < \frac{4}{5}$$

روش اول

$$\frac{3}{4} < \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{15}{20} < \frac{16}{20} \Rightarrow \frac{45}{60} < \frac{48}{60} \Rightarrow \frac{45}{60} < \frac{46}{60} < \frac{47}{60} < \frac{48}{60}$$

روش دوم

عددهای اول

شمارنده (مقسوم علیه) یک عدد: به اعدادی که عدد داده شده بر آن ها بخش پذیر باشد. شمارنده های آن عدد می گویند.

مانند: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \text{شمارنده های عدد } 12$

عدد اول: هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که فقط دو شمارنده (یک و خودش) داشته باشد. عدد اول نام دارد.

مانند: $\{1, 11\} = 11 \text{ عدد اول}$ $\{1, 2\} = 2 \text{ عدد اول}$

نکته: اعداد اول به ترتیب عبارتند از: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$

عدد مرکب: هر عدد طبیعی که بیش از دو شمارنده داشته باشد. عدد مرکب نام دارد.

مانند: $\{1, 3, 5, 15\} = 15 \text{ عدد مرکب}$ $\{1, 2, 4\} = 4 \text{ عدد مرکب}$

نکته: هر عدد مرکب را می توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت: $15 = 3 \times 5$ عدد مرکب

نکته: عدد یک نه اول است و نه مرکب است. (چون فقط یک شمارنده دارد)

مضارب طبیعی یک عدد: اگر یک عدد را در اعداد طبیعی به ترتیب ضرب کنیم. مضارب طبیعی آن عدد حاصل می شود.

مثال (الف): مضارب طبیعی عدد ۸ را بنویسید؟ $\{8, 16, 24, 32, \dots\} = 8 \text{ مضارب طبیعی}$

(ب) هشتمین مضرب ۱۳ چند است؟ $13 \times 8 = 104$

نکته: اعداد طبیعی به سه دسته (اعداد اول - اعداد مرکب - عدد یک) تقسیم بندی می شوند.

دو عدد متباین (نسبت به هم اول): اگر (ب.م.م) (بزرگترین شمارنده ی مشترک) دو عدد یک شود آن دو عدد متباین هستند.

مانند: $(18, 25) = 1$ $(14, 15) = 1$

نکته: اعداد طبیعی زیر همواره نسبت به هم اول هستند:

(الف) دو عدد پشت سر هم: $(21, 22) = 1$ (ب) هر عدد با عدد یک: $(14, 1) = 1$

(ج) دو عدد اول متفاوت: $(5, 13) = 1$

نکته: اگر عددی اول باشد تمام مضارب آن غیر از خودش مرکب هستند:

اول مرکب
 $11 = \{11, 22, 33, \dots\}$ مضارب طبیعی

نکته: اگر عددی مرکب باشد تمام مضارب آن مرکب هستند:

مرکب
 $6 = \{6, 12, 18, \dots\}$ مضارب طبیعی

عددهای اول

تعیین عددهای اول (روش غربال) : در این روش مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

- (۱) عدد یک را خط می زنیم. (چون عدد یک نه اول است و نه مرکب)
- (۲) تمام مضارب عدد ۲ (غیر از خودش) را خط می زنیم.
- (۳) تمام مضارب عدد ۳ (غیر از خودش) را خط می زنیم.
- (۴) تمام مضارب عدد ۵ (غیر از خودش) را خط می زنیم.
- (۵) تمام مضارب عدد ۷ (غیر از خودش) را خط می زنیم.
- (۶) به همین ترتیب مضارب اعداد اول را تا جایی خط می زنیم که مربع (توان دوم) آن عدد اول از بزرگترین عدد داده شده بزرگتر باشد.

مثال : روش غربال از ۱ تا ۳۰ را به کار ببرید؟ آخرین عدد اولی که مضارب آن خط می خورد عدد ۵ است. چون مربع عدد ۷ عدد ۴۹ می شود که از عدد ۳۰ بزرگتر است.

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۸, ۲۹, ۳۰

نکته : در خط زدن مضارب مرکب اعداد اول اولین مضربی که خط می خورد مربع آن عدد اول است.

مثال : اولین مضرب عدد ۷ در روش غربال خط می خورد چند است؟ $7^2 = 49$

نکته : برای این که بدانیم در روش غربال عددی چند بار خط می خورد باید آن عدد را تجزیه کرد عوامل اول آن عدد تعداد را نشان می دهد.

مثال : در روش غربال ۱ تا ۲۰۰ اعداد ۲۷ و ۳۵ و ۴۲ چند بار خط می خورند؟

(سه بار خط می خورد) $42 = 2 \times 3 \times 7$ (دو بار خط می خورد) $35 = 5 \times 7$ (یک بار خط می خورد) $27 = 3^3$

شناخت اعداد اول و مرکب : برای تشخیص اول بودن یا مرکب بودن یک عدد آن عدد را بر اعداد اول کوچکتر از جذرش تقسیم می کنیم. اگر بر هیچ کدام بخش پذیر نبود اول در غیر این صورت مرکب است.

مثال : آیا عدد ۱۱۹ اول است؟ یا مرکب؟ ابتدا جذر تقریبی عدد ۱۱۹ را می گیریم : $\sqrt{119} \approx 10/9$

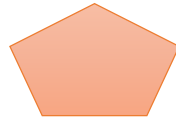
پس عدد ۱۱۹ را بر اعداد اول کمتر از ۱۰ (۲ و ۳ و ۵ و ۷) تقسیم می کنیم. چون بر عدد ۷ بخش پذیر است. پس عدد ۱۰۳ مرکب است.

مثال : با چند بار تقسیم می توان فهمید عدد ۱۵۱ اول است یا مرکب؟ $\sqrt{151} \approx 12/2$

باید بخش پذیر را بر اعداد اول کمتر از ۱۲ (۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱) بررسی کنیم. چون بر هیچ یک بخش پذیر نیست پس با ۵ بار تقسیم می توان فهمید عدد ۱۵۱ اول است.

چند ضلعی ها

چند ضلعی: به هر خط شکسته بسته ای به شرطی که اضلاع آن همدیگر را قطع نکنند چند ضلعی می گویند.



مانند:

چند ضلعی منتظم: چند ضلعی که تمام اضلاع و تمام زاویه های آن با هم مساوی باشند.



مانند:

سه ضلعی منتظم

شش ضلعی منتظم

چهار ضلعی منتظم

چند ضلعی محدب: چند ضلعی که تمام زاویه های آن از 180° درجه کمتر باشد.



مانند:

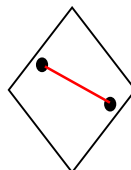
چند ضلعی مقعر: چند ضلعی که حداقل یکی از زاویه های آن از 180° درجه بیشتر باشد.



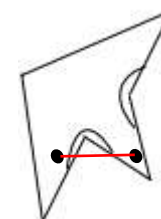
مانند:

نکته: اگر در یک چند ضلعی دو نقطه دلخواه انتخاب کنیم و آن دو نقطه را با یک خط راست به هم وصل کنیم اگر قسمتی از خط بیرون از چند ضلعی قرار گرفت آن چند ضلعی مقعر است. اگر تمام خط داخل چند ضلعی قرار گرفت چند ضلعی محدب است.

چند ضلعی محدب



چند ضلعی مقعر

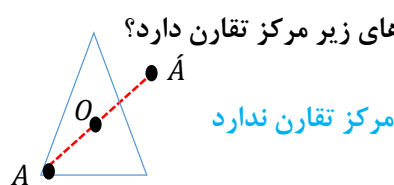
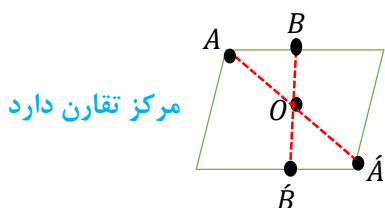


مانند:

مرکز تقارن: اگر دوران 180° درجه شکلی حول یک نقطه از شکل روی خود شکل قرار گیرد آن شکل مرکز تقارن دارد.

نکته: برای این که بدانیم شکلی مرکز تقارن دارد یا نه . نقطه ای در وسط شکل به عنوان مرکز تقارن در نظر گرفته سپس از شکل نقاطی به دلخواه انتخاب کرده به مرکز تقارن وصل و به همان اندازه ادامه می دهیم اگر نقطه حاصل روی شکل قرار گرفت آن شکل مرکز تقارن دارد. در غیر این صورت آن شکل مرکز تقارن ندارد.

چند ضلعی ها



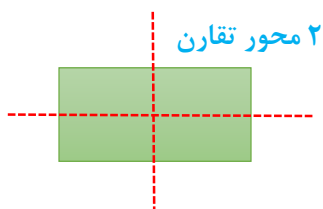
مثال: کدام یک از چند ضلعی های زیر مرکز تقارن دارد؟

نکته: در چند ضلعی منظم اگر تعداد اضلاع زوج باشد مرکز تقارن دارد و اگر فرد باشد مرکز تقارن ندارد.

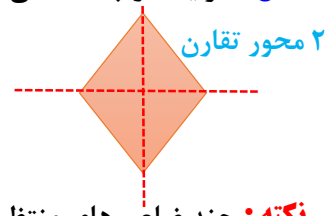
به طور مثال: ۸ ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد ولی ۷ ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

محور تقارن (خط تقارن): خطی است که اگر کاغذ را تا کنیم همه نقاط شکل روی هم قرار می گیرند.

نکته: خط تقارن خطی است که چند ضلعی را به دو قسمت مساوی تقسیم کند.



مثال: هر یک از چند ضلعی های زیر چند محور تقارن دارد؟



نکته: چند ضلعی های منتظم به تعداد اضلاع محور تقارن دارند.

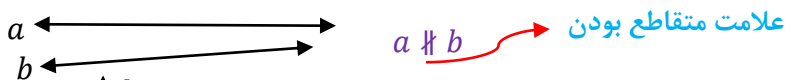
به طور مثال: ۶ ضلعی منتظم ۶ محور تقارن و مثلث متساوی الاضلاع (۳ ضلعی منتظم) ۳ محور تقارن دارد.

دو خط موازی: دو خطی که هر چه آن ها را امتداد دهیم همدیگر را قطع نکنند و فاصله بین دو خط تغییر نکند دو خط موازی می گویند.



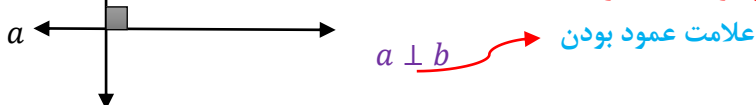
مانند:

دو خط متقاطع: دو خطی که موازی نباشند یعنی دو خطی که همدیگر را در نقطه ای قطع کنند دو خط متقاطع می گویند.



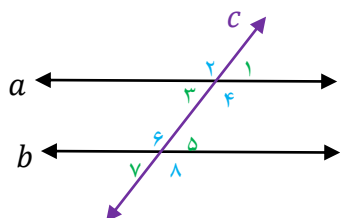
مانند:

دو خط عمود بر هم: دو خط متقاطعی که زاویه بین دو خط ۹۰ درجه باشد.



مانند:

نکته: اگر دو خط موازی را خطی قطع کند (مورب باشد) ۸ زاویه حاصل می شود. ۴ زاویه تند مساوی و ۴ زاویه باز مساوی.



$$(a \parallel b, \text{ مورب } c) \Rightarrow \begin{cases} \hat{1} = \hat{2} = \hat{3} = \hat{4} & \text{۴ زاویه تند} \\ \hat{5} = \hat{6} = \hat{7} = \hat{8} & \text{۴ زاویه باز} \end{cases}$$

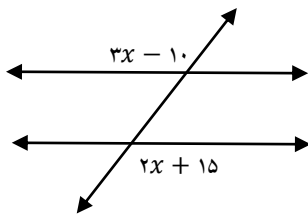
دو زاویه تند و باز مکمل اند: $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$

درسنامه و نکات کلیدی

(فصل سوم)

سال هشتم

چند ضلعی ها

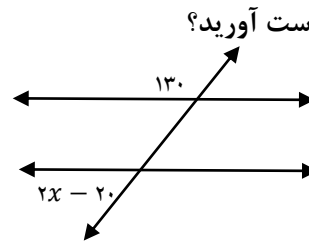


زاویه های باز با هم برابرند :

$$3x - 10 = 2x + 15$$

$$3x - 2x = 15 + 10$$

$$x = 25$$



مثال : در هر شکل مقدار x را به دست آورید؟

زاویه تند با باز مکمل است :

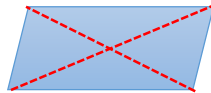
$$2x - 20 + 130 = 180$$

$$2x + 110 = 180$$

$$2x = 70$$

$$x = 35$$

انواع چهار ضلعی ها : (۱) متوازی الاضلاع (۲) مستطیل (۳) مربع (۴) لوزی (۵) دوزنقه



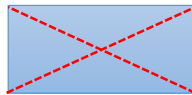
متوازی الاضلاع : چهار ضلعی است که اضلاع روبه رو موازی و مساویند.

(۲) زاویه های روبه رو مساویند

خواص متوازی الاضلاع : (۱) اضلاع روبه رو موازی و مساویند

(۳) زاویه های مجاور (کنارهم) مکمل اند

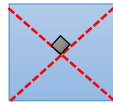
(۳) قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند



مستطیل : متوازی الاضلاعی است که زاویه قائمه داشته باشد.

(۲) دو قطر مستطیل برابرند

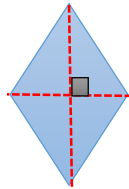
خواص مستطیل : (۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد



مربع : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابر و زاویه قائمه داشته باشد.

(۲) دو قطر مربع برابرند

خواص مربع : (۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد



(۳) قطرهای مربع عمود منصف یکدیگرند

لوزی : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابر است.

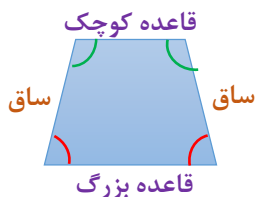
(۲) قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگرند

خواص لوزی : (۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد

دوزنقه : چهار ضلعی است که فقط دو ضلع موازی دارد.

(۲) دوزنقه قائم الزاویه

انواع دوزنقه : (۱) دوزنقه متساوی الساقین



(۲) دو زاویه مجاور قاعده برابرند

خواص دوزنقه متساوی الساقین : (۱) دو ساق آن برابرند

(۳) دو زاویه مجاور ساق مکمل اند

خواص دوزنقه قائم الزاویه : (۱) دارای زاویه قائمه است

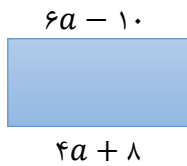


درسنامه و نکات کلیدی

(فصل سوم)

سال هشتم

چند ضلعی ها

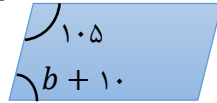


در مستطیل اضلاع روبه رو برابرند :

$$6a - 10 = 4a + 8$$

$$6a - 4a = 10 + 8$$

$$2a = 18 \Rightarrow a = 9$$



مثال : در هر شکل مقادیر مجهول را به دست آورید؟
در متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل اند :

$$b + 10 + 105 = 180 \Rightarrow b + 115 = 180 \Rightarrow b = 65$$

نکته : مجموع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

نکته : مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی از رابطه ی $(n - 2) \times 180$ حاصل می شود.

نکته : اندازه ی یک زاویه ی چند ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{(n-2) \times 180}{n}$ حاصل می شود.

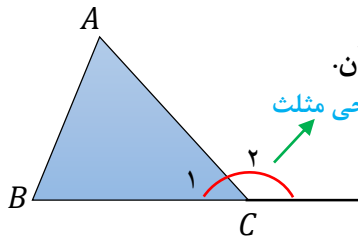
$$(10 - 2) \times 180 = 8 \times 180 = 1440$$

مثال (الف) : مجموع زاویه های داخلی ۱۰ ضلعی منتظم را به دست آورید؟

$$\frac{(15 - 2) \times 180}{15} = 13 \times 12 = 156$$

(ب) اندازه ی یک زاویه ی داخلی ۱۵ ضلعی منتظم را به دست آورید؟

زاویه خارجی : اگر یکی از اضلاع چند ضلعی محدب را در همان راستا امتداد دهیم در بیرون از چند ضلعی زاویه ای تشکیل می شود که به آن زاویه خارجی چند ضلعی می گویند.



نکته : در هر مثلث اندازه ی زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن.

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 180 \text{ درجه} \\ \hat{C}_3 = \hat{A} + \hat{B} \end{cases}$$

به طور مثال :

نکته : مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی ۳۶۰ درجه است.

نکته : اندازه ی یک زاویه خارجی چند ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{360}{n}$ حاصل می شود.

مثال : اندازه ی یک زاویه داخلی و خارجی ۱۲ ضلعی منتظم را به دست آورید؟ (اندازه زاویه داخلی و خارجی مکمل اند)

$$\frac{360}{12} = 30 \text{ اندازه زاویه خارجی}$$

$$180 - 30 = 150 \text{ اندازه زاویه داخلی}$$

نکته : چند ضلعی منتظمی برای کاشی کاری مناسب است که عدد ۳۶۰ بر اندازه ی یک زاویه داخلی آن چند ضلعی بخش پذیر باشد. یک زاویه ی داخلی

۶ ضلعی منتظم

مثال : کدام یک از چند ضلعی های زیر برای کاشی کاری مناسب است؟

$$360 \div 120 = 3 \text{ مناسب است}$$

(ب) ۶ ضلعی منتظم

$$360 \div 135 \approx 2.67$$

مناسب نیست

(الف) ۸ ضلعی منتظم

یک زاویه ی داخلی ۸ ضلعی منتظم

نکته : برای به دست آوردن تعداد قطره های چند ضلعی از رابطه ی $\frac{n(n-3)}{2}$ استفاده می کنیم.

$$\frac{7(7-3)}{2} = \frac{7 \times 4}{2} = 14$$

مثال : ۷ ضلعی دارای چند قطر است؟

جبر و معادله

یک جمله ای جبری: عبارت جبری که از دو قسمت عدد (ضریب) و متغیر تشکیل شده باشد.

مانند: $5xy$ $\frac{a}{3}$

چند جمله ای جبری: اگر بین عبارت های جبری علامت جمع و تفریق باشد تشکیل چند جمله ای می دهد.

مانند: $a - b + 7$ (دارای سه جمله) $x + 2y$ (دارای دو جمله)

عبارت جبری متشابه: عبارتی که متغیر های آن (حروف انگلیسی) و توان متغیرها کاملاً مثل هم باشند.

مانند: $(5xy, -4yx)$, $(3a^3b^2, \frac{2}{3}a^3b^2)$

عبارت جبری نامتشابه: عبارتی که متغیرهای آن یا توان متغیرها شبیه هم نباشند.

مانند: $(3bc, 2b)$, $(-4x^2y, 5xy^2)$

ساده کردن عبارت های جبری: جملات متشابه را جدا کرده سپس مانند جمع و تفریق اعداد صحیح آن ها را جواب داده با این تفاوت که حروف کنار اعداد نوشته می شود.

مثال: عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$-4x + 2y + 10x = 6x + 2y \quad a^2b - 4ab + 5ab + 2a^2b - 4ab = 3a^2b - 3ab$$

ضرب دو جمله ای: در ضرب دو جمله ای ضریب ها در هم و متغیرها در هم ضرب می شوند.

مانند: $5x(-2x) = -10x^2$ $6ab(\frac{2}{3}c) = 4abc$

ضرب یک جمله ای در چند جمله ای: یک جمله ای در تمام جملات چند جمله ای ضرب می شود.

مانند: $-6a(3a + b) = -18a^2 - 6ab$

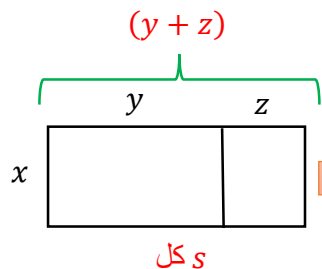
ضرب چند جمله ای در چند جمله ای: جملات پرانتز اول در تمام جملات پرانتز دوم ضرب می شود. سپس عبارت را ساده می کنیم.

مانند: $(2x - y)(x + 3y) = 2x^2 + 6xy - xy - 3y^2 = 2x^2 + 5xy - 3y^2$

نکته: اگر یک چند جمله ای داخل پرانتز و به توان 2 باشد آن عبارت را به صورت ضرب دو پرانتز می نویسیم.

مانند: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

جبر و معادله



نکته: با توجه به مساوی بودن مساحت در دو شکل می توان برای یک شکل تساوی جبری نوشت.

مثال: با توجه به شکل یک تساوی جبری بنویسید.

$$S = S_1 + S_2 \Rightarrow x(y+z) = xy + xz$$

نکته: یک عدد دو رقمی را به صورت $\overline{ab}$ و یک عدد سه رقمی را به صورت $\overline{abc}$ نشان می دهیم.

نکته: مقلوب عدد $\overline{ab}$ را به صورت $\overline{ba}$ نشان می دهیم. مثلاً مقلوب عدد ۳۷ برابر با ۷۳ می شود.

نکته: مجموع هر عدد دو رقمی با مقلوب آن همواره مضرب ۱۱ می باشد:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a+b)$$

نکته: اختلاف هر عدد دو رقمی با مقلوب آن همواره مضرب ۹ می باشد:

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10a + b - 10b - a = 9a - 9b = 9(a-b)$$

مقدار عددی عبارت جبری: به جای متغیرها اعداد داده شده را قرار می دهیم سپس با توجه به ترتیب انجام عملیات (اولویت) عبارت را جواب می دهیم.

مثال: مقدار عددی عبارت های جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف) $5x - 2xy + 7$ ($x = 1, y = -2$) $5(1) - 2(1)(-2) + 7 = 5 + 4 + 7 = 16$

ب) $a^2 + b^2 - 4ab$ ($a = -2, b = 2$) $(-2)^2 + 2^2 - 4(-2)(2) = 4 + 4 + 16 = 24$

تجزیه عبارت جبری: (تبدیل به ضرب یا فاکتورگیری) مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

۱- ابتدا (ب.م.م) ضرایب را به دست می آوریم.

۲- حروف مشترک با توان کمتر را کنار (ب.م.م) ضرایب می نویسیم.

۳- تمام جملات عبارت را بر جمله ی مشترک تقسیم کرده و داخل پرانتز می نویسیم.

مثال: عبارت های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

$$10ab + 15a = 5a(2b + 3)$$

عامل مشترک

$$xyz - xz = xz(y - 1)$$

$$\frac{x^2y + xy^2}{x^2y^2 + x^2y^2} = \frac{\cancel{xy}(x+y)}{\cancel{x^2y^2}(x+y)} = \frac{1}{xy}$$

(فصل چهارم)

xy

جبر و معادله

معادله: معادله یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از اعداد به یک تساوی درست تبدیل می شود.

نکته: برای حل معادله مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم:

(۱) مجهول ها را به طرف چپ و عددهای معلوم را به طرف راست انتقال می دهیم. (عددی که انتقال داده شود علامت آن عوض می شود)

(۲) عددهای مجهول با هم و عددهای معلوم را با هم جواب می دهیم.

(۳) حاصل عددهای معلوم را بر حاصل عددهای مجهول تقسیم می کنیم.

مثال: معادله های زیر را جواب دهید.

$$2x + 3 = -7$$

$$2x = -7 - 3$$

$$x = \frac{-10}{2} = -5$$

$$x = -5$$

$$-6 + x = 2x + 5$$

$$x - 2x = 5 + 6$$

$$x = \frac{11}{-1} = -11$$

$$x = -11$$

$$4(x - 2) = 2x$$

$$4x - 8 = 2x$$

$$4x - 2x = 8$$

$$x = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow x = 4$$

نکته: در معادلات کسری دو طرف معادله را در (ک.م.م) مخرج ها ضرب کرده تا تبدیل به معادله معمولی شود.

$$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = \frac{5}{6} \Rightarrow 12 \times \left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = \left(\frac{5}{6}\right) \times 12 \Rightarrow -6x + 9 = 10 \Rightarrow -6x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{6}$$

(ک.م.م) مخرج ها $[2, 4, 6] = 12$

نکته: سه عدد متوالی را به صورت $(x, x + 1, x + 2)$ و سه عدد فرد یا زوج متوالی را به صورت $(x, x + 2, x + 4)$ نمایش

می دهیم.

مثال: مجموع سه عدد زوج متوالی ۶۰ شده است. عدد بزرگتر چند است؟

$$x + (x + 2) + (x + 4) = 60 \Rightarrow 3x + 6 = 60 \Rightarrow 3x = 54 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow \{18, 20, 22\}$$

مثال: به پنج برابر عددی هشت واحد اضافه کرده ایم حاصل از قرینه دو برابر آن عدد شش واحد کمتر است آن عدد چند است؟

$$5x + 8 = -2x - 6 \Rightarrow 5x + 2x = -6 - 8 \Rightarrow 7x = -14 \Rightarrow x = -2$$

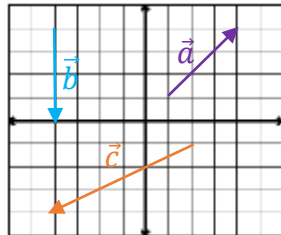
آن عدد

(فصل پنجم)

بردار و مختصات

بردار : خط راست جهت داری است. برای نام گذاری بردار از دو حرف بزرگ انگلیسی یا یک حرف کوچک انگلیسی استفاده می شود.

مختصات بردار : برای به دست آوردن مختصات یک بردار از ابتدا طول (جهت افقی) سپس عرض (جهت عمودی) را به دست می آوریم.



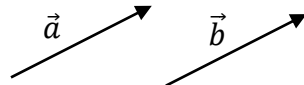
مثال : مختصات بردارهای زیر را بنویسید.

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

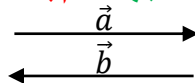
دو بردار مساوی (هم سنگ) : دو بردار در صورتی مساویند که : هم جهت و هم اندازه و موازی باشند.



$$\vec{a} = \vec{b}$$

مانند :

دو بردار قرینه : دو بردار در صورتی قرینه هم هستند که : هم اندازه و موازی ولی خلاف جهت هم باشند.



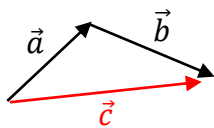
مانند :

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$$

نکته : حاصل جمع هر بردار با قرینه اش برابر با بردار صفر است :

جمع بردارها (برآیند بردارها) : برای جمع دو بردار از دو روش استفاده می شود :

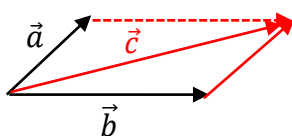
(۱) روش مثلثی : اگر دو بردار پشت سر هم باشند از این روش استفاده می شود و در این روش برای برآیند بردارها از ابتدا بردار اولی به انتها بردار دومی رسم می شود.



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \text{: تساوی جبری}$$

مانند :

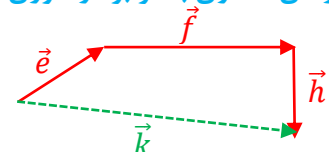
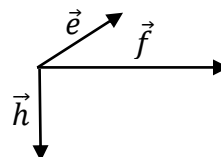
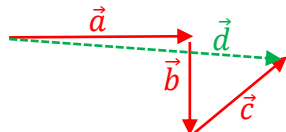
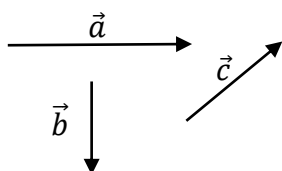
(۲) روش متوازی الاضلاع : اگر دو بردار پشت سر هم نباشند از انتهای یکی از دو بردار مساوی بردار بعدی رسم کرده تا دو بردار پشت سرهم شوند و در آخر از ابتدا دو بردار به انتهای بردار جدید رسم می کنیم.



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \quad \text{: تساوی جبری}$$

مانند :

مثال : حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

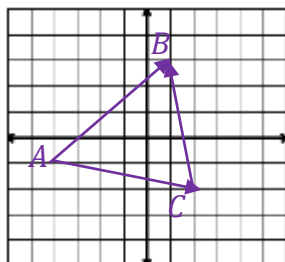


(بردارهای مساوی با هر بردار طوری رسم می کنیم که بردارها پشت سرهم باشند) :

(فصل پنجم)

بردار و مختصات

مثال: برای شکل زیر یک جمع برداری و یک تساوی جبری: $\vec{e} + \vec{f} + \vec{h} = \vec{k}$ بنویسید. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$: تساوی جبری

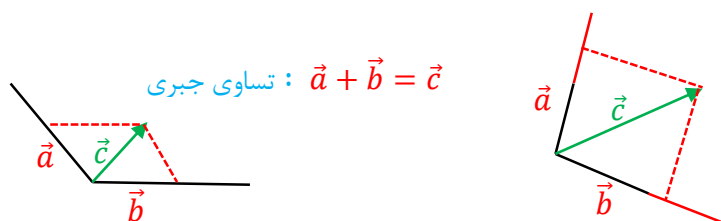


(در شکل دو بردار را طوری مشخص می کنیم که پشت سر هم باشند)

جمع برداری: $\vec{AC} + \vec{CB} = \vec{AB}$

جمع مختصاتی: $\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

تجزیه بردارها: اگر بردار حاصل جمع را داشته باشیم از انتهای آن بردار به موازات دو محور رسم کرده هر جا محور یا امتداد محور را قطع کرد انتهای دو بردار به دست می آید.



مثال: بردار $\vec{c}$ را در امتداد های رسم شده تجزیه کنید.

: تساوی جبری $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$

ضرب عدد در بردار: در ضرب عدد در بردار آن عدد هم در طول و هم در عرض ضرب می شود:

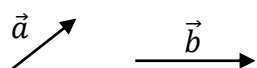
مثال: حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$-5 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix}$

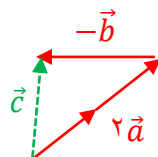
$2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$

مثال: اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.

$\vec{c} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$



$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$



مثال: بردار خواسته شده را رسم کنید.

$2\vec{a}$ در همان جهت (2 برابر بردار)

$-\vec{b}$ در خلاف جهت (1 برابر بردار)

معادله مختصاتی: برای حل معادلات مختصاتی همانند معادلات معمولی عمل می کنیم:

(۱) مجهول ها در سمت چپ و مختصات ها را به سمت راست منتقل می کنیم.

(۲) حاصل مجهول ها و مختصات ها را به دست می آوریم.

(۳) طول و عرض مختصات را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم.

نکته: در حل معادله مختصاتی عدد های معلوم یا مجهول از یک طرف تساوی به طرف دیگر منتقل شود علامت آن ها **قرینه** می شود.

(فصل پنجم)

بردار و مختصات

مثال: معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} 5\vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} &\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \div 5 \\ 10 \div 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow -2\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \\ & & \vec{x} = \begin{bmatrix} 8 \div -2 \\ 4 \div -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$3\vec{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + 2\vec{x} \Rightarrow \cancel{3\vec{x}} - 2\vec{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

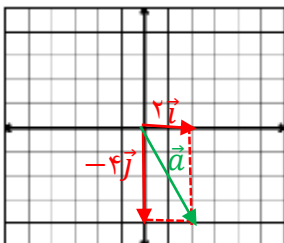
بردارهای واحد مختصات: به دو بردار $\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (واحد طول) و $\vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (واحد عرض) بردارهای واحد مختصات می گویند.

نکته: برای تبدیل یک بردار به بردار واحد مختصات کافی است عدد طول مختصات را ضرب $\vec{i}$ و عدد عرض مختصات را ضرب $\vec{j}$ قرار دهیم.

مثال: بردارهای زیر را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

$$\begin{aligned} \vec{a} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} &= -3\vec{i} + 2\vec{j} & \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} &= 1\vec{i} - 5\vec{j} & \vec{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} &= 4\vec{i} \end{aligned}$$

مثال: مختصات بردار $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ را نوشته سپس بردار $\vec{a}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.



$$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

مثال: اگر $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$ را بنویسید.

$$\begin{aligned} \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} & \vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b} &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix} \\ \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

مثال: معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$2\vec{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow 2\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \div 2 \\ 4 \div 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + 3\vec{i} = 2\vec{x} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \cancel{\vec{x}} - \cancel{2\vec{x}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -6 \div -1 \\ 12 \div -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -12 \end{bmatrix}$$