

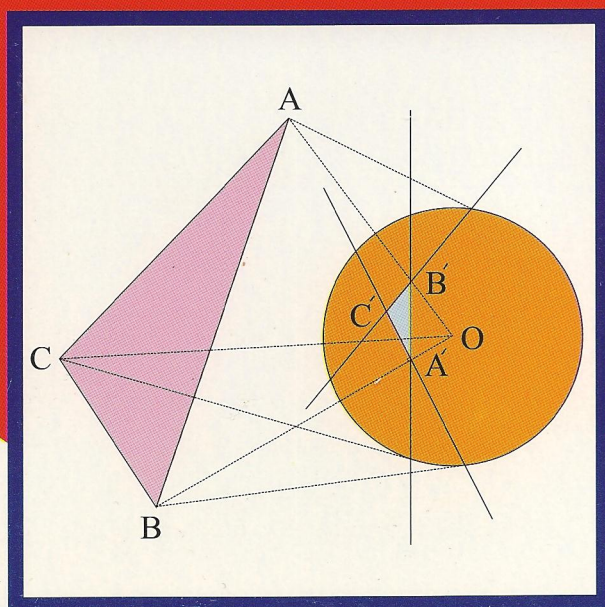


دایرة المعارف هندسه

۹

تبدیلهای هندسی در
صفحه و فضا

(قطب و قطبی، انعکاس، تبدیلهای آفین و تصویری)



مؤلف: محمد هاشم رستمی

دایرةالمعارف هندسه

«جلد نهم»

تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا

(قطب و قطبی، انعکاس، تبدیلهای آفین و تصویری)

مؤلف: محمد هاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ -

دایرةالمعارف هندسه / مؤلف محمدهاشم رستمی - تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی
آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۸ -
ج.: مصور، جدول.

ISBN 964-353-341-7 (ج. ۹).

فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیفا (فهرست‌نویسی پیش از انتشار).
ویرایش قبلی این کتاب تحت عنوان دایرةالمعارف مسائل هندسه منتشر شده است.
کتابنامه.

مندرجات: ج. ۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه... ج. ۹. تبدیلهای
هندسی در صفحه و فضا (قطب و قطبی، انعکاس تبدیلهای آفین و تصویری).
۱. هندسه - مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات
مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف مسائل هندسه.

۵۱۶/۰۰۷۶

QA۵۰۱/۵/ ۵ د ۲

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه
دایرةالمعارف هندسه
(جلد نهم)

تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا

مؤلف: محمدهاشم رستمی

یونیرم جلد: گشتاسب فروزان

چاپ اول: تابستان ۱۳۸۰

تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه

لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه
حق چاپ محفوظ است

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، پلاک ۳۶

تلفن: ۸۸۰۰۳۲۴-۹

دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، ۸۹۰۳۸۰۹

شابک ۷-۳۴۱-۳۵۳-۹۶۴

ISBN-964-353-341-7

صفحه		موضوع
۱۳		پیشگفتار
حل	صورت	
۱۹۸-۲۷۳	۱۹-۷۳	بخش ۱. قطب و قطبی
۱۹۸	۲۳	۱.۱. تعریف و قضیه
۲۱۶	۴۳	۲.۱. قطب و قطبی در: نقطه، خط، زاویه
۲۱۶	۴۳	۱.۲.۱. قطب خط، قطبی نقطه
۲۱۶	۴۳	۲.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
۲۱۶	۴۳	۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند
۲۱۷	۴۳	۳.۲.۱. خطهای: هم‌رس، موازی،...
۲۱۷	۴۳	۱.۳.۲.۱. خطها موازی‌اند
۲۱۷	۴۴	۲.۳.۲.۱. خطها دستگاه توافقی می‌سازند
۲۱۷	۴۴	۳.۳.۲.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۲۱۸	۴۴	۴.۲.۱. زاویه
۲۱۸	۴۴	۱.۴.۲.۱. اندازه زاویه
۲۱۹	۴۴	۵.۲.۱. پاره‌خط
۲۱۹	۴۴	۱.۵.۲.۱. اندازه پاره‌خط
۲۱۹	۴۵	۶.۲.۱. رابطه‌های متریک
۲۲۰	۴۵	۷.۲.۱. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند
۲۲۰	۴۶	۸.۲.۱. رسم شکلهای
۲۲۲	۴۶	۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲۲۲	۴۶	۳.۱. قطب و قطبی در مثلث
۲۲۲	۴۶	۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه
۲۲۳	۴۷	۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
۲۲۳	۴۷	۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها همخطند
۲۲۶	۴۸	۳.۳.۱. خطهای: هم‌رس، موازی،...
۲۲۶	۴۸	۱.۳.۳.۱. خطها هم‌رسند
۲۳۲	۵۱	۲.۳.۳.۱. خطها دستگاه توافقی می‌سازند
۲۳۳	۵۱	۳.۳.۳.۱. خطها بر هم عمودند
۲۳۳	۵۱	۴.۳.۳.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۲۳۴	۵۲	۵.۳.۳.۱. خط نیمساز است
۲۳۴	۵۳	۴.۳.۱. زاویه
۲۳۴	۵۳	۱.۴.۳.۱. اندازه زاویه
۲۳۵	۵۳	۲.۴.۳.۱. رابطه بین زاویه‌ها
۲۳۵	۵۳	۵.۳.۱. پاره‌خط
۲۳۵	۵۳	۱.۵.۳.۱. رابطه بین پاره‌خطها

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۲۳۵	۵۳	۶.۳.۱. رابطه‌های متری
۲۳۸	۵۴	۷.۳.۱. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند.
۲۴۰	۵۴	۸.۳.۱. رسم شکلهای
۲۴۱	۵۴	۹.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲۴۱	۵۵	۱۰.۳.۱. مسأله‌های ترکیبی
۲۴۳	۵۶	۴.۱. قطب و قطبی در چندضلعی
۲۴۳	۵۶	۱.۴.۱. قطب خط، قطبی نقطه
۲۴۳	۵۷	۲.۴.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
۲۴۳	۵۷	۱.۲.۴.۱. نقطه‌ها همخطند
۲۴۴	۵۷	۳.۴.۱. خطهای: هم‌رس، موازی،...
۲۴۴	۵۷	۱.۳.۴.۱. خطها هم‌رسند
۲۴۵	۵۷	۲.۳.۴.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۲۴۵	۵۷	۳.۳.۴.۱. خط نیمساز است
۲۴۵	۵۸	۴.۴.۱. زاویه
۲۴۵	۵۸	۱.۴.۴.۱. اندازه زاویه
۲۴۶	۵۸	۵.۴.۱. پاره خط
۲۴۶	۵۸	۱.۵.۴.۱. اندازه پاره خط
۲۴۶	۵۸	۶.۴.۱. رابطه‌های متری
۲۴۷	۵۸	۷.۴.۱. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند
۲۴۹	۵۹	۸.۴.۱. رسم شکلهای
۲۵۰	۵۹	۹.۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲۵۱	۵۹	۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی
۲۵۲	۶۰	۵.۱. قطب و قطبی در دایره
۲۵۲	۶۱	۱.۵.۱. قطب خط، قطبی نقطه
۲۵۳	۶۱	۲.۵.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
۲۵۳	۶۱	۱.۲.۵.۱. نقطه‌ها همخطند
۲۵۴	۶۱	۳.۵.۱. خطهای: هم‌رس، موازی،...
۲۵۴	۶۱	۱.۳.۵.۱. خطها هم‌رسند
۲۵۴	۶۱	۲.۳.۵.۱. خطها بر هم عمودند
۲۵۵	۶۲	۳.۳.۵.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
۲۵۷	۶۳	۴.۳.۵.۱. خط نیمساز است
۲۵۷	۶۳	۵.۳.۵.۱. خط مماس بر دایره است
۲۵۷	۶۳	۴.۵.۱. زاویه
۲۵۷	۶۳	۱.۴.۵.۱. اندازه زاویه
۲۵۷	۶۳	۲.۴.۵.۱. رابطه بین زاویه‌ها
۲۵۷	۶۳	۵.۵.۱. پاره خط
۲۵۷	۶۳	۱.۵.۵.۱. رابطه بین پاره خطها

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۲۶۰	۶۵	۶.۵.۱. رابطه‌های مترى
۲۶۲	۶۶	۷.۵.۱. ثابت كنيد شكلها تبديل يافته يكديگرند
۲۶۲	۶۶	۸.۵.۱. رسم شكلها
۲۶۳	۶۶	۹.۵.۱. ساير مسأله‌هاى مربوط به اين قسمت
۲۶۵	۶۷	۱۰.۵.۱. مسأله‌هاى تركيبى
۲۷۰	۷۱	۶.۱. قطب و قطبى در مقطعهاى مخروطى و شكلهاى ديگر
۲۷۰	۷۱	۱.۶.۱. قطب خط، قطبى نقطه
۲۷۱	۷۱	۲.۶.۱. نقطه‌هاى: همخط، همدايه، همصفحه، ...
۲۷۱	۷۱	۱.۲.۶.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند
۲۷۱	۷۱	۳.۶.۱. خطها يا صفحه‌هاى: هم‌رس، موازى، همصفحه، ...
۲۷۱	۷۱	۱.۳.۶.۱. صفحه‌ها بر يك خط مى‌گذرند
۲۷۱	۷۲	۴.۶.۱. زاويه
۲۷۱	۷۲	۱.۴.۶.۱. اندازه زاويه
۲۷۲	۷۲	۵.۶.۱. پاره‌خط
۲۷۲	۷۲	۱.۵.۶.۱. اندازه پاره‌خط
۲۷۲	۷۳	۶.۶.۱. رابطه‌هاى مترى
۲۷۲	۷۳	۷.۶.۱. ثابت كنيد شكلها تبديل يافته يكديگرند
۲۷۲	۷۳	۸.۶.۱. رسم شكلها
۲۷۳	۷۳	۹.۶.۱. ساير مسأله‌هاى مربوط به اين قسمت
۲۷۳	۷۳	۱۰.۶.۱. مسأله‌هاى تركيبى
۲۷۴-۳۵۵	۷۵-۱۲۱	بخش ۲. انعكاس
۲۷۴	۷۸	۱.۲. تعريف و قضيه
۲۹۴	۷۸	۲.۲. انعكاس در: نقطه، خط، زاويه
۲۹۴	۷۸	۱.۲.۲. قطب انعكاس، قوت انعكاس
۲۹۶	۷۸	۲.۲.۲. نقطه‌هاى: همخط، همدايه، ...
۲۹۶	۷۸	۱.۲.۲.۲. جاى نقطه
۲۹۶	۷۸	۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها به تقسيم توافقى‌اند
۲۹۷	۹۸	۳.۲.۲. خطهاى: هم‌رس، موازى، ...
۲۹۷	۹۸	۱.۳.۲.۲. خطها هم‌رسند
۲۹۷	۹۸	۴.۲.۲. زاويه
۲۹۷	۹۸	۱.۴.۲.۲. اندازه زاويه
۲۹۷	۹۸	۵.۲.۲. پاره‌خط
۲۹۷	۹۸	۱.۵.۲.۲. اندازه پاره‌خط
۲۹۸	۹۸	۶.۲.۲. رابطه‌هاى مترى
۳۰۱	۹۹	۷.۲.۲. ثابت كنيد شكلها تبديل يافته يكديگرند
۳۰۱	۹۹	۸.۲.۲. رسم شكلها

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۰۵	۱۰۱	۹.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۰۶	۱۰۱	۱۰.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی
۳۱۴	۱۰۲	۳.۲. انعکاس در مثلث
۳۱۴	۱۰۲	۱.۳.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس
۳۱۴	۱۰۳	۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
۳۱۴	۱۰۳	۱.۲.۳.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند
۳۱۵	۱۰۳	۳.۳.۲. خطهای: هم‌رس، موازی،...
۳۱۵	۱۰۳	۱.۳.۳.۲. خطها هم‌رسند
۳۱۵	۱۰۳	۴.۳.۲. زاویه
۳۱۵	۱۰۳	۱.۴.۳.۲. اندازه زاویه
۳۱۶	۱۰۴	۵.۳.۲. پاره‌خط
۳۱۶	۱۰۴	۱.۵.۳.۲. رابطه بین پاره‌خطها
۳۱۷	۱۰۴	۶.۳.۲. رابطه‌های متری
۳۱۷	۱۰۴	۷.۳.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند
۳۱۸	۱۰۵	۸.۳.۲. رسم شکلها
۳۱۸	۱۰۵	۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۱۹	۱۰۵	۱۰.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی
۳۲۶	۱۰۷	۴.۲. انعکاس در چند ضلعی
۳۲۶	۱۰۷	۱.۴.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس
۳۲۶	۱۰۸	۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
۳۲۶	۱۰۸	۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها هم‌خطند
۳۲۷	۱۰۸	۳.۴.۲. خطهای: هم‌رس، موازی،...
۳۲۷	۱۰۸	۱.۳.۴.۲. خطها موازی‌اند
۳۲۷	۱۰۸	۴.۴.۲. زاویه
۳۲۷	۱۰۸	۱.۴.۴.۲. اندازه زاویه
۳۲۷	۱۰۹	۵.۴.۲. پاره‌خط
۳۲۷	۱۰۹	۱.۵.۴.۲. رابطه بین پاره‌خطها
۳۲۸	۱۱۰	۶.۴.۲. رابطه‌های متری
۳۲۸	۱۱۰	۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند
۳۲۹	۱۱۰	۸.۴.۲. رسم شکلها
۳۲۹	۱۱۱	۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۳۳۰	۱۱۱	۱۰.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی
۳۳۰	۱۱۲	۵.۲. انعکاس در دایره
۳۳۰	۱۱۲	۱.۵.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس
۳۳۳	۱۱۲	۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
۳۳۳	۱۱۲	۱.۲.۵.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند
۳۳۴	۱۱۳	۳.۵.۲. خطهای: هم‌رس، موازی،...

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۳۴	۱۱۳	۱.۳.۵.۲. خطها بر هم عمودند
۳۳۴	۱۱۳	۴.۵.۲. زاویه
۳۳۴	۱۱۳	۱.۴.۵.۲. اندازه زاویه
۳۳۵	۱۱۴	۵.۵.۲. پاره خط
۳۳۵	۱۱۴	۱.۵.۵.۲. رابطه بین پاره خطها
۳۳۶	۱۱۴	۶.۵.۲. رابطه های متری
۳۳۸	۱۱۵	۷.۵.۲. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند
۳۴۰	۱۱۷	۸.۵.۲. رسم شکلهای
۳۴۴	۱۱۸	۹.۵.۲. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
۳۴۷	۱۱۹	۱۰.۵.۲. مسأله های ترکیبی
۳۵۵	۱۲۱	۶.۲. انعکاس در مقطعهای مخروطی
۳۵۶-۴۴۱	۱۲۳-۱۹۶	بخش ۳. تبدیلهای آفین و تصویری
۳۵۶	۱۲۷	۱.۳. تعریف و قضیه
۳۷۵	۱۶۴	۲.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در: نقطه، خط، زاویه
۳۷۵	۱۶۴	۱.۲.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۳۷۵	۱۶۵	۲.۲.۳. نقطه های: همخط، همدایره، ...
۳۷۵	۱۶۵	۱.۲.۲.۳. نقطه ها همخطند
۳۷۶	۱۶۵	۲.۲.۲.۳. تعیین نقطه های برخورد
۳۷۶	۱۶۵	۳.۲.۳. خطهای: همرس، موازی، ...
۳۷۶	۱۶۵	۱.۳.۲.۳. خطها موازی اند
۳۷۶	۱۶۵	۴.۲.۳. زاویه
۳۷۶	۱۶۵	۱.۴.۲.۳. اندازه زاویه
۳۷۷	۱۶۵	۵.۲.۳. پاره خط
۳۷۷	۱۶۵	۱.۵.۲.۳. اندازه پاره خط
۳۷۸	۱۶۶	۶.۲.۳. رابطه های متری
۳۷۸	۱۶۶	۷.۲.۳. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند
۳۷۹	۱۶۶	۸.۲.۳. رسم شکلهای
۳۸۱	۱۶۷	۹.۲.۳. سایر مسأله های مربوط به این قسمت
۳۸۱	۱۶۷	۱۰.۲.۳. مسأله های ترکیبی
۳۸۵	۱۶۸	۳.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مثلث
۳۸۵	۱۶۸	۱.۳.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۳۸۵	۱۶۸	۲.۳.۳. نقطه های: همخط، همدایره، ...
۳۸۵	۱۶۸	۱.۲.۳.۳. نقطه ها همخطند
۳۸۶	۱۶۹	۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی، ...
۳۸۶	۱۶۹	۱.۳.۳.۳. خطها همرسند
۳۸۹	۱۷۱	۴.۳.۳. زاویه

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۳۸۹	۱۷۱	۱.۴.۳.۳. اندازه زاویه
۳۹۰	۱۷۱	۵.۳.۳. پاره خط
۳۹۰	۱۷۱	۱.۵.۳.۳. اندازه پاره خط
۳۹۰	۱۷۱	۶.۳.۳. رابطه های مترى
۳۹۳	۱۷۳	۷.۳.۳. ثابت كنيد شكلها تبديل يافته يكديگرند
۳۹۴	۱۷۴	۸.۳.۳. رسم شكلها
۳۹۶	۱۷۵	۹.۳.۳. ساير مسأله هاى مربوط به اين قسمت
۳۹۶	۱۷۵	۱۰.۳.۳. مسأله هاى تركيبى
۴۰۴	۱۷۸	۴.۳. تبديلهای آفین و تصویری در چند ضلعیها
۴۰۴	۱۷۸	۱.۴.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۴۰۴	۱۷۸	۲.۴.۳. نقطه های: همخط، همدایره، ...
۴۰۴	۱۷۸	۱.۲.۴.۳. نقطه ها همخطند
۴۰۶	۱۸۰	۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...
۴۰۶	۱۸۰	۱.۳.۴.۳. خطها همرسند
۴۰۸	۱۸۱	۴.۴.۳. زاویه
۴۰۸	۱۸۱	۱.۴.۴.۳. اندازه زاویه
۴۰۸	۱۸۱	۵.۴.۳. پاره خط
۴۰۸	۱۸۱	۱.۵.۴.۳. اندازه پاره خط
۴۰۹	۱۸۱	۶.۴.۳. رابطه های مترى
۴۱۰	۱۸۱	۷.۴.۳. ثابت كنيد شكلها تبديل يافته يكديگرند
۴۱۰	۱۸۲	۸.۴.۳. رسم شكلها
۴۱۲	۱۸۳	۹.۴.۳. ساير مسأله هاى مربوط به اين قسمت
۴۱۲	۱۸۳	۱۰.۴.۳. مسأله هاى تركيبى
۴۲۴	۱۸۸	۵.۳. تبديلهای آفین و تصویری در دایره
۴۲۴	۱۸۸	۱.۵.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۴۲۴	۱۸۸	۲.۵.۳. نقطه های: همخط، همدایره، ...
۴۲۴	۱۸۸	۱.۲.۵.۳. نقطه ها همخطند
۴۲۶	۱۸۸	۲.۲.۵.۳. نقطه ها بر هم منطبقند
۴۲۷	۱۸۹	۳.۵.۳. خطهای: همرس، موازی، ...
۴۲۷	۱۸۹	۱.۳.۵.۳. خطها موازی اند
۴۲۸	۱۸۹	۴.۵.۳. زاویه
۴۲۸	۱۸۹	۱.۴.۵.۳. اندازه زاویه
۴۲۸	۱۸۹	۵.۵.۳. پاره خط
۴۲۸	۱۸۹	۱.۵.۵.۳. اندازه پاره خط
۴۲۹	۱۹۰	۶.۵.۳. رابطه های مترى
۴۲۹	۱۹۰	۷.۵.۳. ثابت كنيد شكلها تبديل يافته يكديگرند
۴۲۹	۱۹۰	۸.۵.۳. رسم شكلها

صفحه		موضوع
حل	صورت	
۴۳۲	۱۹۰	۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۴۳۲	۱۹۱	۱۰.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی
۴۳۹	۱۹۴	۶.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مقطعهای مخروطی
۴۳۹	۱۹۴	۱.۶.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
۴۴۰	۱۹۴	۲.۶.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
۴۴۰	۱۹۴	۱.۲.۶.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند
۴۴۰	۱۹۵	۳.۶.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...
۴۴۰	۱۹۵	۱.۳.۶.۳. خطها موازی‌اند
۴۴۰	۱۹۵	۴.۶.۳. زاویه
۴۴۰	۱۹۵	۱.۴.۶.۳. اندازه زاویه
۴۴۰	۱۹۵	۵.۶.۳. پاره‌خط
۴۴۰	۱۹۵	۱.۵.۶.۳. اندازه پاره‌خط
۴۴۱	۱۹۵	۶.۶.۳. رابطه‌های متری
۴۴۱	۱۹۶	۷.۶.۳. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند
۴۴۱	۱۹۶	۸.۶.۳. رسم شکلهای
۴۴۲ - ۴۴۸		فهرست منابع

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعه‌ای کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود چهل سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه.
۲. رابطه‌های متری در هندسه مسطحه.
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسه مسطحه.
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس، ...).
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی).
۶. هندسه تحلیلی.
۷. هندسه فضایی.
۸. هندسه‌های نااقلیدسی.

...

هر یک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد؛ به عنوان مثال رابطه‌های متری در هندسه مسطحه، شامل پنج جلد

به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسه مسطحه (نسبت و تناسب، قضیه تالس و ...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث ؛ مثلث و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین، مثلث قائم الزاویه، ...) ؛ و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۷. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهارضلعیها، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج ضلعی، شش ضلعی، ...) ؛

برای استفاده بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است :

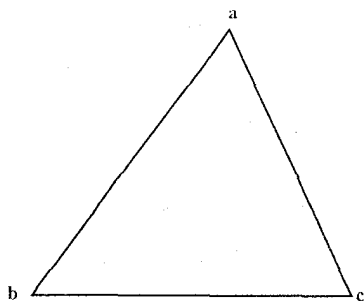
● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، تا دانشجویان علاقه‌مند، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند (به استثنای برخی مسأله‌ها که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است).

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچه مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیه فیثاغورس در مورد مثلث قائم الزاویه « در هر مثلث قائم الزاویه مربع اندازه وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویه قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$ » که تنها به وسیله اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.

● علامتهای به کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای

مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، پاره‌خط AB ، به صورتهای $\overline{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a ، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است ؛ به عنوان مثال گفته شده : «در مثلث abc ، ضلعهای ab ، bc ، ac و ...».



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریف‌ها و شکل‌ها، از حرف‌ها و علامت‌های یکسان استفاده شده است؛ به عنوان مثال، همه جا، نقطه‌ها با حرف‌های بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A, B, C و ...؛ و پاره‌خط AB به صورت AB ، و اندازه زاویه A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است. این جلد از دایرةالمعارف هندسه، قسمت دیگری از تبدیلهای هندسی است که دارای سه بخش است:

بخش ۱. قطب و قطبی

بخش ۲. انعکاس

بخش ۳. تبدیلهای آفین و تصویری

هر یک از بخشهای بالا، شامل چند زیربخش است؛ به عنوان مثال، بخش ۱. قطب و قطبی، دارای ۶ زیربخش است:

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. قطب و قطبی در: نقطه، خط، زاویه

۳.۱. قطب و قطبی در مثلث

۴.۱. قطب و قطبی در چند ضلعی

۵.۱. قطب و قطبی در دایره

۶.۱. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکل‌های دیگر

زیربخشهای بالا نیز به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند. به عنوان مثال، زیربخش ۳.۱. قطب و قطبی در مثلث، شامل زیربخشهای زیر است:

۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، هم‌دایره، ...

۳.۳.۱. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۴.۳.۱. زاویه

۵.۳.۱. پاره‌خط

۶.۳.۱. رابطه‌های متری

۷.۳.۱. ثابت کنید شکل‌ها تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۳.۱. رسم شکل‌ها با استفاده از قطب و قطبی

۹.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۳.۱. مسأله‌های ترکیبی

بیشتر زیربخشهای بالا نیز، زیربخشهای جدیدی دارند، و در هر یک از این زیربخشها،

مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

تبدیل‌های هندسی، دنیایی از شگفتیها و زیباییها، در ارائه راه حل‌های بدیع و جالب، برای بسیاری از قضیه‌ها و مسأله‌های هندسه است.

امید است این مجموعه مورد استفاده دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است، لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرها و پیشنهادات اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها، و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

تبدیلهای هندسی در صفحه و فضا

بخش ۱. قطب و قطبی

بخش ۲. انعکاس

بخش ۳. تبدیلهای آفین و تصویری

بخش ۱

• قطب و قطبی

۱.۱. تعریف و قضیه

۲.۱. قطب و قطبی در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۲.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۳.۲.۱. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۲.۱. خطها موازی‌اند

۲.۳.۲.۱. خطها دستگاه توافقی می‌سازند

۳.۳.۲.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۴.۲.۱. زاویه

۱.۴.۲.۱. اندازه زاویه

۵.۲.۱. پاره خط

۱.۵.۲.۱. اندازه پاره خط

۶.۲.۱. رابطه‌های متری

۷.۲.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۲.۱. رسم شکلها

۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳.۱. قطب و قطبی در مثلث

۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه

- ۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
- ۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها همخطند
- ۳.۳.۱. خطهای: هم‌رس، موازی،...
- ۱.۳.۳.۱. خطها هم‌رسند
- ۲.۳.۳.۱. خطها دستگاه توافقی می‌سازند
- ۳.۳.۳.۱. خطها برهم عمودند
- ۴.۳.۳.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
- ۵.۳.۳.۱. خط نیمساز است
- ۴.۳.۱. زاویه
- ۱.۴.۳.۱. اندازه زاویه
- ۲.۴.۳.۱. رابطه بین زاویه‌ها
- ۵.۳.۱. پاره خط
- ۱.۵.۳.۱. رابطه بین پاره خطها
- ۶.۳.۱. رابطه‌های متری
- ۷.۳.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند
- ۸.۳.۱. رسم شکلها
- ۹.۳.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
- ۱۰.۳.۱. مسأله‌های ترکیبی
- ۴.۱. قطب و قطبی در چند ضلعی
- ۱.۴.۱. قطب خط، قطبی نقطه
- ۲.۴.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره،...
- ۱.۲.۴.۱. نقطه‌ها همخطند
- ۳.۴.۱. خطهای: هم‌رس، موازی،...
- ۱.۳.۴.۱. خطها هم‌رسند
- ۲.۳.۴.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد
- ۳.۳.۴.۱. خط نیمساز است
- ۴.۴.۱. زاویه
- ۱.۴.۴.۱. اندازه زاویه

۵.۴.۱. پاره خط

۱.۵.۴.۱. اندازه پاره خط

۶.۴.۱. رابطه های متری

۷.۴.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۴.۱. رسم شکلها

۹.۴.۱. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۱۰.۴.۱. مسأله های ترکیبی

۵.۱. قطب و قطبی در دایره

۱.۵.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۲.۵.۱. نقطه های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۱. نقطه ها همخطند

۳.۵.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۵.۱. خطها همرسند

۲.۳.۵.۱. خطها بر هم عمودند

۳.۳.۵.۱. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۴.۳.۵.۱. خط نیمساز است

۵.۳.۵.۱. خط مماس بر دایره است

۴.۵.۱. زاویه

۱.۴.۵.۱. اندازه زاویه

۲.۴.۵.۱. رابطه بین زاویه ها

۵.۵.۱. پاره خط

۱.۵.۵.۱. رابطه بین پاره خطها

۶.۵.۱. رابطه های متری

۷.۵.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۵.۱. رسم شکلها

۹.۵.۱. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۱۰.۵.۱. مسأله های ترکیبی

۶.۱. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکل‌های دیگر

۱.۶.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۲.۶.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، همصفحه،...

۱.۲.۶.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۳.۶.۱. خطها یا صفحه‌های: هم‌رس، موازی، همصفحه،...

۱.۳.۶.۱. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند

۴.۶.۱. زاویه

۱.۴.۶.۱. اندازه زاویه

۵.۶.۱. پاره خط

۱.۵.۶.۱. اندازه پاره خط

۶.۶.۱. رابطه‌های متری

۷.۶.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

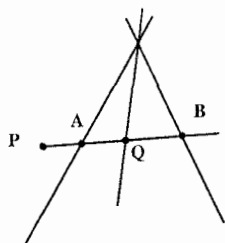
۸.۶.۱. رسم شکلها

۹.۶.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۶.۱. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۱. قطب و قطبی

۱.۱. تعریف و قضیه



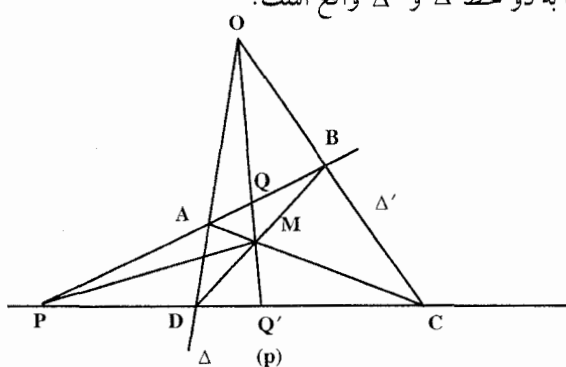
الف. قطب و قطبی نسبت به دو خط متقاطع

تعریف. قطبی نقطه‌ای مانند P (شکل) نسبت به دو خط Δ

و D، عبارت است از مکان هندسی مزدوج توافقی نقطه P نسبت به نقطه‌های برخورد Δ و D با خط غیر مشخصی که بر P می‌گذرد. P را قطب این مکان می‌نامند.

۱. قضیه. قطبی هر نقطه نسبت به دو خط متقاطع D و Δ خط راستی است که بر O، نقطه برخورد آن دو خط، می‌گذرد.

۲. قضیه. هرگاه از نقطه‌ای مانند P (شکل) دو خط رسم کنیم تا دو خط داده شده Δ و Δ' را در چهار نقطه A، B، C و D قطع کنند، نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD، بر قطبی P نسبت به دو خط Δ و Δ' واقع است.

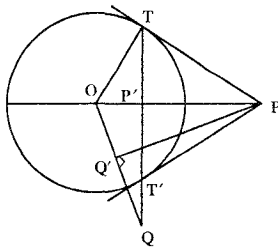


ب. قطب و قطبی نسبت به دایره

تعریف. قطبی نقطه P نسبت به دایره O، مکان هندسی مزدوجهای توافقی P است نسبت به نقطه‌های برخورد دایره با هر خط غیر مشخصی که بر P بگذرد. P را قطب مکان ذکر شده می‌نامند.

۳. قضیه. قطبی هر نقطه نسبت به دایره، خطی است مستقیم، عمود بر قطری که از آن نقطه می‌گذرد.

۴. الف. خط قطبی یک نقطه داده شده نسبت به یک دایره، بر قطری از دایره که از آن نقطه داده شده می‌گذرد، در نقطه‌ای عمود است که این نقطه برخورد، وارون آن نقطه نسبت به دایره است.



ب. قطب یک خط داده شده نسبت به یک دایره، وارون پای عمودی است که از مرکز دایره بر آن خط رسم می‌شود.

نکته ۱. خط قطبی یک نقطه از دایره، خطی است که در آن نقطه بر دایره مماس می‌شود. قطب خط مماس بر دایره، نقطه تماس خط با دایره است؛ زیرا وارون یک نقطه واقع بر دایره بر خود آن منطبق است.

نکته ۲. هر نقطه‌ای از صفحه یک دایره نسبت به آن دایره، یک خط قطبی دارد، به جز مرکز دایره. هر خطی واقع در صفحه یک دایره، نسبت به آن دایره یک قطب دارد، به جز خطهایی که از مرکز دایره می‌گذرند.

نکته ۳. اگر قطب داخل دایره باشد، خط قطبی دایره را قطع نمی‌کند. اگر قطب خارج دایره باشد، خط قطبی آن خطی است که از نقطه‌های تماس مماسهایی که از آن نقطه بر دایره رسم می‌شوند، می‌گذرد.

۵. قضیه. اگر خط قطبی نقطه P از نقطه Q بگذرد، خط قطبی نقطه Q هم از نقطه P خواهد گذشت.

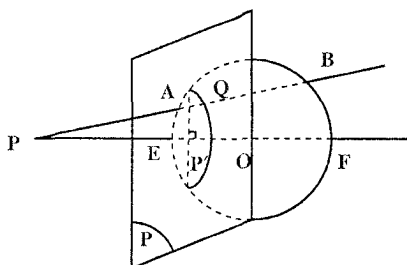
۶. تعریف. دو نقطه را که خط قطبی یکی از دیگری بگذرد، نقطه‌های مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر نقطه داده شده، بینهایت نقطه مزدوج دارد، که عبارتند از همه نقطه‌های واقع بر خط قطبی آن نقطه.

اگر دو نقطه مزدوج با مرکز دایره همخط باشند، آن گاه نسبت به دایره، وارون یکدیگرند. قضیه. اگر قطب خط p روی خط q باشد، آن گاه قطب خط q نیز روی خط p قرار دارد. تعریف. دو خط را که قطب هر یک روی دیگری قرار دارد، خطهای مزدوج نسبت به دایره می‌نامند. هر خط داده شده، بینهایت خط مزدوج دارد، که عبارتند از همه خطهایی که از قطب آن خط داده شده می‌گذرند.

۷. قضیه. قطبهای تمام خطهایی که بر یک نقطه می‌گذرند، بر قطبی این نقطه قرار دارند.

۸. قضیهٔ عکس. قطبیهای تمام نقطه‌هایی که روی یک خط باشند، بر قطب این خط می‌گذرند، یعنی همرسند.

۹. قضیه. اگر دو خط مزدوج، یکدیگر را خارج از دایره قطع کنند، این دو خط نسبت به دو مماسی که از نقطه برخورد آنها بر دایره رسم می‌شوند، مزدوج همسازند.



پ. قطبی یک نقطه نسبت به یک کره. اگر از نقطه P قاطع PAB را نسبت به یک کره رسم کنیم، مکان هندسی نقطه Q، مزدوج توافقی نقطه P نسبت به دو نقطه A و B، صفحه‌ای است عمود بر قطری که از نقطه P می‌گذرد. این صفحه را، قطبی نقطه P نسبت به کره و P را قطب این صفحه می‌گویند.

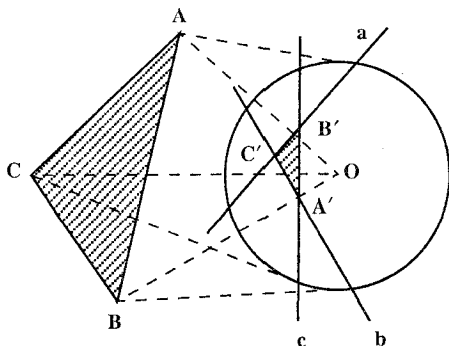
اگر شعاع کره باشد، داریم $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = R^2$ ؛ که OP و OP' فاصله مرکز کره، از قطب و صفحه قطبی است.

اگر نقطه‌ای در صفحه P واقع باشد، صفحه قطبی آن، از قطب صفحه P می‌گذرد. اگر صفحه‌ای از نقطه A بگذرد، قطب آن، در صفحه قطبی نقطه A قرار می‌گیرد. دو نقطه را نسبت به یک کره مزدوج گویند، وقتی که یکی از آنها در صفحه قطبی دیگری واقع باشد. دو صفحه را نسبت به یک کره مزدوج گویند، وقتی که قطب یکی از آنها در صفحه دیگر واقع باشد. قطبهای صفحه‌های گذرنده بر خط D، روی یک خط D' قرار دارند. بعکس قطبهای صفحه‌های گذرنده بر خط D' روی خط D واقعند. دو خط D و D' را نسبت به کره مزدوج گویند. دو خط مزدوج بر یک قطر کره عمود، و آن را به توافق تقسیم می‌کنند.

قطبی معکوس

تبدیل به وسیله قطب و قطبی

هرگاه یک چند ضلعی ... ABC را در نظر گرفته، (a)، (b)، (c) و ... قطبیهای رأسهای آن را نسبت به دایره‌ای به دست آوریم (شکل)، چند ضلعی دیگری به دست می‌آید که ضلعهای متوالی آن، (a)، (b)، (c) و ... است؛ واضح است که تعداد رأسها و ضلعهای این دو چند ضلعی با هم مساوی است؛ می‌گوییم شکل اول را به وسیله قطب و قطبی به شکل دوم تبدیل کرده‌ایم. چون (چنان که بعداً ثابت خواهیم کرد) در این دو چند ضلعی، هر رأس یکی، قطب یک ضلع از



دیگری، و هر ضلع یکی، قطبی یک رأس از دیگری است، دو شکل را قطبی متقابل یا قطبی معکوس می خوانند.

۱۰. قضیه. در دو شکل قطبی متقابل، هر رأس یکی، قطب یک ضلع دیگری، و هر ضلع یکی، قطبی یک رأس دیگری است.

۱۱. قضیه. اگر دو دایره متعامد باشند، دو نقطه انتهایی هر قطری از یک دایره نسبت به دایره دیگر مزدوجند و بعکس، اگر دو نقطه انتهایی قطری از یک دایره نسبت به دایره دیگر مزدوج باشند، آن دو دایره مزدوجند.

تعریف. یک مثلث را نسبت به یک دایره، خود مزدوج یا مزدوج، یا خود قطبی، یا قطبی می نامند، اگر هر ضلع مثلث خط قطبی رأس مقابل آن ضلع باشد.
بسادگی می توان دید که با مفروض بودن دایره (O) بینهایت مثلث از این نوع را می توان رسم کرد.

فرض کنید P نقطه دلخواهی از صفحه، و Q نقطه دلخواهی روی خط p، یعنی خط قطبی P نسبت به (O) باشد؛ q، یعنی خط قطبی Q نیز از P می گذرد و p را در رأس سوم مثلث خواسته شده PQR، یعنی R، قطع می کند. دو خط RQ و RP بترتیب خطهای قطبی P و Q هستند، و قطب PQ بر R منطبق است.

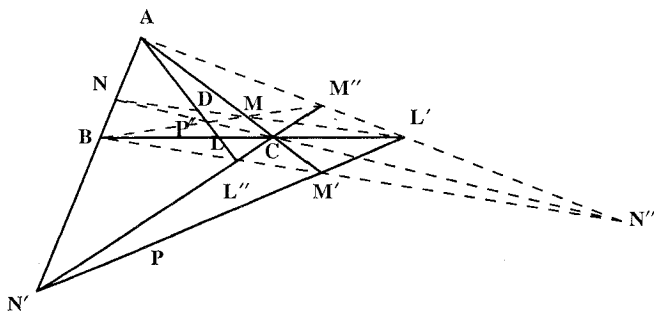
۱۲. قضیه. از سه رأس یک مثلث قطبی، یکی داخل دایره و دو رأس دیگر، خارج دایره قرار دارند.

۱۳. قضیه. اگر مثلثی نسبت به یک دایره قطبی باشد، مرکز دایره بر مرکز ارتفاعی مثلث منطبق است.

۱۴. قضیه. برای هر مثلث منفرجه الزاویه، یک دایره مزدوج وجود دارد که نسبت به این دایره، دایره های محیطی و نه نقطه مثلث مزبور منعکس یکدیگرند.

به عبارت دیگر، دایره مزدوج مثلث یکی از دو دایره نیمساز دایره‌های محیطی و نه نقطه مثلث می‌باشد. نتیجه می‌شود که این سه دایره به یک دسته دایره تعلق دارند (که مرکزهای آنها بر خط اوپلر واقع است)؛ و بنابراین در مثلث منفرجه‌الزاویه، دایره نه نقطه نه تنها بر نه نقطه بلکه بر یازده نقطه مهم می‌گذرد و دو نقطه دیگر آن عبارتند از نقطه‌های برخورد دایره محیطی با دایره مزدوج مثلث.

۱۵. قطب و خط قطبی نسبت به یک مثلث. رابطه‌های همساز. الف. فرض کنید P نقطه‌ای در صفحه مثلث ABC باشد (شکل) و M, L, N نقطه‌های برخورد خطهای AP, BP و CP با ضلعهای BC, CA, AB ؛ و L', M', N' مزدوجهای همساز M, L, N و نسبت به جفت رأسهای متناظر مثلث ABC باشند.



قضیه. نقطه‌های L', M', N' همخطند.

ب. فرض کنید p خطی در صفحه مثلث ABC باشد که امتداد ضلعهای BC, CA, AB را در نقطه‌های L', M', N' قطع کند و M, L, N مزدوجهای همساز M', L', N' و نسبت به جفت رأسهای متناظر ABC باشند. قضیه. خطهای AL, BM, CN هم‌رسند.

۱۶. چند تعریف. خط $p = L'M'N'$ را قطبی سه خطی یا خط همساز نقطه P برای مثلث ABC و P را قطب سه خطی یا قطب همساز خط p برای مثلث ABC می‌نامند. قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث محور منبری آن مثلث، و مثلث سوایی نقطه داده شده برای مثلث داده شده است، و بعکس.

۱۷. تعریف. رأسهای $M'' = (CN', AL')$ ، $L'' = (BM', CN')$ و $N'' = (AL', BM')$ از مثلثی را که از خطهای AL', BM', CN' تشکیل می‌شود، وابسته‌های همساز P برای مثلث ABC می‌نامند.

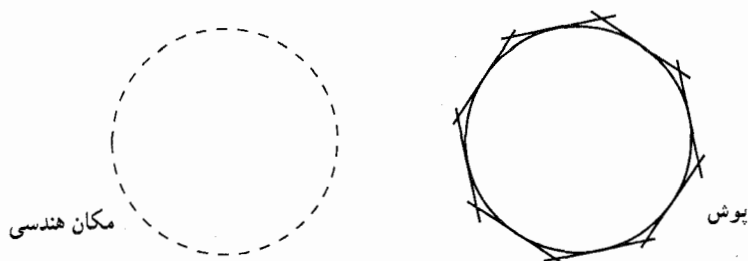
- قضیه. وابسته‌های همساز نقطه P روی خطهای AP، BP و CP قرار دارند، و بترتیب با نقطه‌های A و L، B و M، و C و N به‌طور همساز از نقطه P تقسیم می‌شوند.
۱۸. قضیه. نقطه P و سه وابسته همساز آن نسبت به یک مثلث ABC چهار نقطه هستند، که هر سه تایی از آنها مثلی محیط بر ABC و منظری نسبت به آن را تشکیل می‌دهند، و نقطه چهارم مرکز منظری است.
- محورهای منظری خطهای LMN ، $L'MN$ و LMN' هستند.
۱۹. تعریف. هر خط مماس بر دایره محیطی در یک رأس مثلث ضلع روبه‌روی آن رأس را در یک نقطه قطع می‌کند. سه نقطه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آیند. روی یک خط قرار دارند که محور لوموان مثلث خوانده می‌شود.
- قضیه. نقطه لوموان یک مثلث قطب محور لوموان مثلث نسبت به دایره محیطی مثلث است.
۲۰. قضیه. نقطه لوموان یک مثلث، قطب سه خطی محور لوموان برای آن مثلث است.
۲۱. قضیه. نقطه لوموان یک مثلث، نقطه برخورد خطهایی است که وسط هر ضلع مثلث را به وسط ارتفاع وارد بر آن ضلع وصل می‌کنند.
۲۲. قضیه. خطهایی که رأسهای یک مثلث را به رأسهای متناظر دایره اول بروکار وصل می‌کنند، یکدیگر را در نقطه هم‌نواى نقطه لوموان نسبت به مثلث، قطع می‌کنند.
۲۳. قاطعی که دو دایره متعامد بر روی آن دو وتر همساز جدا می‌کنند، از مرکز حداقل یکی از دایره‌ها می‌گذرد.

اصل دوگانگی یا دوگانگی

با توجه به تعریف قطبی معکوس، اصل دوگانگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

به هر شکل مرکب از خطها و نقطه‌ها که در آن بعضی از نقطه‌ها بر بعضی از خطها واقعند، متقابلاً شکلی مرکب از نقطه‌ها و خطها نظیر است که در آن بعضی از خطها بر بعضی از نقطه‌ها می‌گذرند. به‌عنوان مثال، به یک چهار گوشه ABCD (که شامل چهار نقطه است که هیچ یک از سه‌تای آنها بر یک خط واقع نیستند و شامل شش خط می‌باشد که بترتیب بر جفتهای نقطه‌های A، D و B، D و C، C و B و A، A و C می‌گذرند)، متقابلاً یک چهارخطی abcd نظیر می‌شود (که شامل چهار خط است بدون آن که هیچ سه‌تای آنها هم‌رس باشند و شامل شش نقطه است که بترتیب محل برخورد جفتهای خطهای a، d و b، d و c، c و b و a، a و c می‌باشند). دایره را می‌توان مکان هندسی نقطه‌ها یا این که پوش خطها (مماسهای

بر آن در نظر گرفت، (شکل). هر مماس بر دایره وضع حدی قاطعی است که دو نقطه تقاطع آن با دایره بر هم منطبق گردند. متقابلاً هر نقطه از دایره را می توان وضع حدی نقطه تقاطع دو مماس بر آن دانست که این دو مماس بر هم منطبق گردند.



بنابراین، تبدیل قطبی معکوس، مکان هندسی و پوش را نظیر هم قرار می دهد. هرگاه دایره ω را مکان هندسی نقطه ها بگیریم، مبدل آن در تبدیل قطبی معکوس نسبت به ω ، همان دایره است؛ اما به عنوان پوش خطها و بعکس. همچنین اگر دایره ای به مرکز O و به شعاع r داشته باشیم، مبدل قطبی معکوس آن نسبت به دایره ω به مرکز O و به شعاع k ، دایره ای خواهد بود به مرکز O و شعاع $\frac{k^2}{r}$.

فرهنگچه زیر مفاهیم متناظر را در تبدیل قطبی معکوس نشان می دهد و در به کار بردن آن در قضیه ها و ترسیمها، کافی است که هر مفهوم از یک ستون را با مفهوم مقابل آن از ستون دیگر جانشین ساخت.

خط	نقطه
می گذرد بر	واقع است بر
نقطه تقاطع دو خط	خط واصل بین دو نقطه
واقع بر یک استقامت	همرس
چهار خطی	چهار گوشه
قطبی	قطب
پوش	مکان هندسی
نقطه تماس	مماس

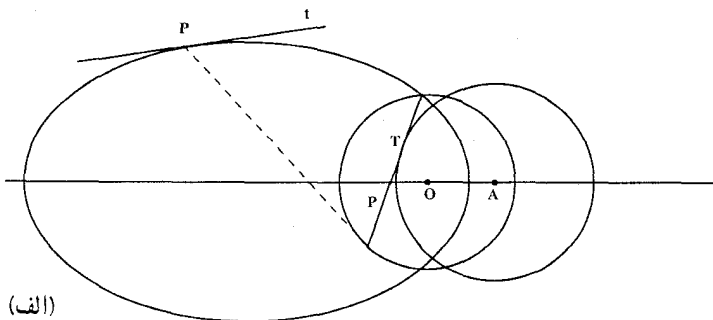
۲۴. قضیه. قطب هر خط که در A و B با دایره ω برخورد کند (بدون آن که بر مرکز دایره بگذرد)، نقطه برخورد مماسهایی است که در A و B بر دایره رسم می شوند. قطبی هر نقطه واقع در خارج دایره، عبارت است از خط واصل بین نقطه های تماس دو مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می شوند. قطب هر خط (که بر مرکز دایره نگذرد) نقطه تلاقی قطبیهای دو نقطه از آن می باشد. قطبی هر نقطه (غیر از O) خط واصل بین قطبهای دو قاطع است که از آن نقطه بر دایره رسم شوند.

مقطعه های مخروطی

برای بررسی منحنیهای مقطعه های مخروطی روشهای مختلف وجود دارد. یکی از روشهایی که به کار می رود این است که هر یک از منحنیهای مزبور را به عنوان مبدل قطبی معکوس دایره در نظر بگیریم. به این ترتیب که نسبت به دایره ω به مرکز O و به شعاع k، مبدل قطبی معکوس دایره α به مرکز A و به شعاع r را بررسی کنیم.

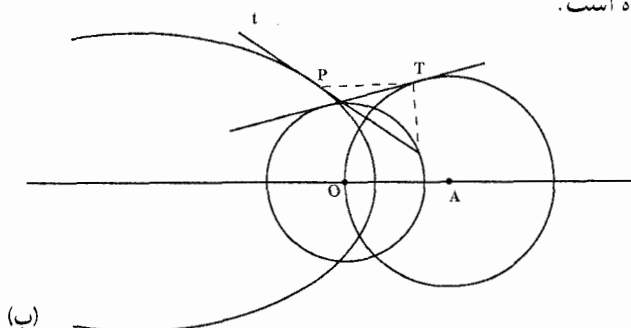
شعاع k از دایره ω را ثابت می گیریم، زیرا اندازه آن فقط در بعدهای شکل حاصل تأثیر دارد و در نوع این شکل دخالتی ندارد. نوع منحنی مقطع مخروطی از روی رابطه $\varepsilon = \frac{OA}{r}$ مشخص می شود. این نسبت را خروج از مرکز و نقطه O را یک کانون منحنی مقطع مخروطی می نامند.

وقتی منحنی مقطع مخروطی را به عنوان مبدل قطبی معکوس یک دایره α در نظر می گیریم به معنی آن است که آن منحنی مکان هندسی قطبهای مماسهای بر α و یا پوش قطبیهای نقطه های واقع بر α می باشد. اگر $\varepsilon < 1$ باشد، O داخل دایره α قرار داشته و روی هر نیمخط ابتدا از O نقطه ای از منحنی مقطع وجود خواهد داشت؛ در این حالت، منحنی مقطع یک مرغانه است که بیضی نام دارد؛ مانند شکل (الف). در حالت خاص $\varepsilon = 0$ بیضی به دایره تبدیل می شود.

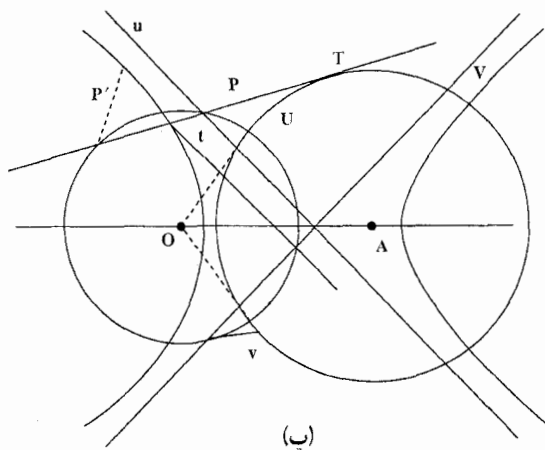


(الف)

با ترقی کردن مقدار ε منحنی به تدریج از شکل دایره خارج شده و کشیده‌تر می‌شود. وقتی $\varepsilon = 1$ باشد، داریم $OA = r$ و نقطه O بر دایره α قرار دارد؛ در این حال همه نقطه‌های واقع بر α به استثنای نقطه O دارای قطبی می‌باشند و تنها نقطه O قطبی ندارد. همچنین همه مماسهای بر α دارای قطب می‌باشند مگر مماس در O که قطب ندارد. در این حالت منحنی حاصل در امتداد OA دارای نقطه بینهایت دور می‌باشد. این منحنی سهمی نام دارد و در شکل (ب) نموده شده است.



در حالت $\varepsilon > 1$ نقطه O در خارج دایره α واقع است که از آن دو مماس می‌توان بر دایره α رسم کرد. اگر نقطه‌های تماس این مماسها را با دایره با U و V نشان دهیم، مماسهای OU و OV قطب ندارند، در صورتی که نقطه‌های U و V دارای قطبی می‌باشند. منحنی حاصل هذلولی نام دارد که u و v قطبی‌های نقطه‌های U و V مجانبهای آن می‌باشند. این مجانبها بر منحنی مماس می‌باشند اما نقطه‌های تماس در فاصله محدود وجود ندارند. مطابق با شکل (پ) هرچه منحنی دورتر شود، به مجانبها نزدیکتر می‌گردد تا در فاصله بینهایت دور بر آن مماس می‌شود.



می دانیم که مشاهدات نجومی کپلر که توسط نیوتن توجیه گردید، معلوم ساخت که مسیر هر یک از سیاره ها یک بیضی است که خورشید در یکی از دو کانون آن واقع است. خروج از مرکز مدارهای سیاره ها و همچنین ستارگان دنباله دار که تاکنون حساب شده، طبق جدول زیر است:

ستارگان دنباله دار			سیاره ها	
۰/۸۵	Encke	انک	۰/۲۰۵۶	عطارد
۰/۷۶	Biela	بیلا	۰/۰۰۶۸	زهره
۰/۴۱	Holmes	هلم	۰/۰۱۶۷	زمین
۰/۴۷	Brooks	بروکس	۰/۰۹۳۴	مریخ
۰/۹۶۷	Halley	هالی	۰/۰۴۸۴	مشتری
۰/۹۹۶۳	Donati	دناتی	۰/۰۵۵۷	زحل
۰/۹۹۸۸	Coggia	کگزیا	۰/۰۴۷۲	اورانوس
۱/۰۰۰	Daniel	دانیل	۰/۰۰۸۶	نپتون
۱/۰۰۰	Morehouse	مورهوز	۰/۲۴۸۱	پلوتن

کانونها و خطهای هادی

منحنی مقطع مخروطی را، شکل قطبی معکوس دایره α به مرکز A نسبت به دایره ω به مرکز O در نظر می گیریم؛ قطبی نقطه A نسبت به دایره ω را خط هادی نظیر کانون O منحنی و پاره خط واصل بین O و نقطه دلخواه P از منحنی را شعاع حامل نقطه P می نامیم. اکنون یکی از ویژگیهای بسیار مهم و جالب مقطع مخروطی را به صورت قضیه زیر بیان می کنیم که نخستین بار در قرن چهارم میلادی توسط پاپوس اسکندرانی، و شاید هم ششصد سال زودتر توسط اقلیدس اثبات شده است.

۲۵. قضیه. منحنی مقطع مخروطی با خروج از مرکز ε داده شده است. اگر O یک کانون و a خط هادی نظیر این کانون و P نقطه دلخواهی از منحنی باشد، طول OP، شعاع حامل نقطه P، برابر است با حاصلضرب ε در فاصله نقطه P از خط a.

قضیه عکس. نقطه O و خط a که بر O نمی گذرد و مقدار مثبت ε داده شده است، مکان هندسی نقطه هایی است که فاصله آنها از O برابر است با حاصلضرب ε در فاصله آنها از a، یک مقطع مخروطی است.

صفحه تصویری

در تبدیل قطبی معکوس اگر نقطه O و خطهای گذرنده بر آن را کنار بگذاریم، آن گاه به طور دقیق می توانیم بگوییم که هر نقطه به یک خط و هر خط به یک نقطه تبدیل می شود. در مورد انعکاس نیز یک چنین استثنایی وجود داشت که برای آن نقطه بینهایت را پذیرفیم و صفحه انعکاس را به دست آوریم. برای آن که در تبدیل قطبی معکوس نیز استثناهایی وجود نداشته باشد. خط بینهایت I_{∞} منحصر به فرد را می پذیریم که قطبی نقطه O باشد و در نتیجه نقطه های آن (نقطه های بینهایت) قطبهای خطهایی خواهند بود که بر O می گذرند. با پذیرفتن این عنصرهای جدید، یعنی خط بینهایت و نقطه های بینهایت، می توان به طور قاطع حکم کرد که هر خط دلخواه a یک قطب A دارد که قطبهای همه نقطه های واقع بر a بر A می گذرند. هر گاه a بر O بگذرد، قطبهای نقطه های آن که همه بر a عمودند، یک دسته خطهای متوازی را تشکیل می دهند و در عین حال قطب a که نقطه بینهایت است، نقطه مشترک همه این دسته خطها می باشد. صفحه شامل خط بینهایت را صفحه تصویری می نامیم و در این صفحه بیان زیر بدون استثنا صحیح می باشد:

هر دو خط دلخواه و متمایز a و b یک نقطه مشترک دارند.

۲۶. قضیه. قطب هر خط که در A و B با دایره ω برخورد کند (بدون آن که از مرکز دایره بگذرد) نقطه برخورد مماسهایی است که از A و B بر دایره مماس می شوند. قطبی هر نقطه واقع در خارج دایره عبارت است از خط واصل بین نقطه های تماس دو مماسی که از آن نقطه بر دایره رسم می شود. قطب هر خط (که بر مرکز دایره نگذرد) نقطه تلاقی قطبهای دو نقطه از آن می باشد. قطبی هر نقطه (غیر از O) خط واصل بین قطبهای دو قاطع است که از آن نقطه بر دایره رسم شوند.

۲۷. قضیه. منحنی مقطع مخروطی و نقطه P غیر واقع بر آن داده شده است. هر گاه از P دو قاطع AD و BE رسم شود و L نقطه برخورد AB و DE به M نقطه برخورد AE و BD وصل شود، خط حاصل قطبی نقطه P نسبت به منحنی مزبور می باشد.

۲۸. در هر منحنی مقطع مخروطی، خط هادی نظیر یک کانون، قطبی آن کانون نسبت به منحنی می باشد.

مقطعهای مخروطی مرکزدار

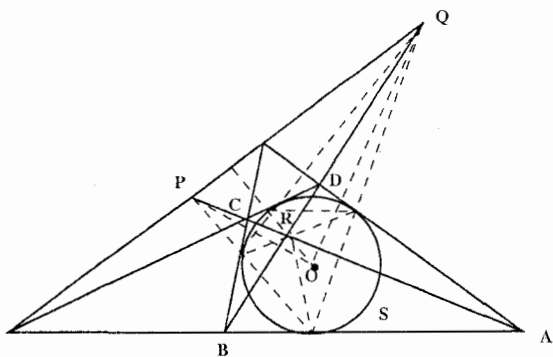
در ترسیم منحنیهای بیضی و هذلولی و ملاحظه وضع عنصرهای هر کدام از آنها نسبت به هم، به طور مثال وضع متشابه دو رأس کانونی بیضی یا وضع متشابه دو شاخه هذلولی، چنین

به نظر می آید که این منحنیها دارای تقارن می باشند. از این رو طبیعی خواهد بود که به بررسی ویژگیهای تقارنی در این منحنیها پردازیم. بحث زیر وجود تقارن کامل را در این منحنیها آشکار می سازد.

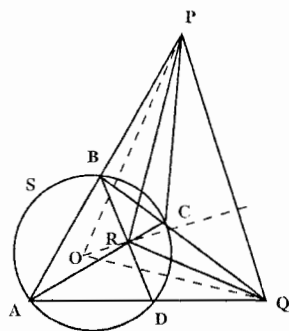
۲۹. قضیه. مقطع مخروطی مرکزدار نسبت به مرکزش متقارن است، یعنی با تبدیل نیمدور حول مرکزش به خودش تبدیل می شود.

اصل دوگانی با بیان دیگر

اگر یک چهارضلعی را در یک دایره S محاط کنیم، مثلی که رأسهای آن نقطه های برخورد قطرهای این چهارضلعی و نقطه های برخورد ضلعهای روبه روی آن هستند، نسبت به S قطبی معکوس خودش است (شکل (الف)). همچنین اگر یک چهارضلعی را بر یک دایره S محیط کنیم، مثلی که دو ضلعش بر قطرهای این چهارضلعی و ضلع سومش بر خط واصل بین نقطه های تلاقی ضلعهای مقابل آن واقعند، نسبت به S قطبی معکوس خودش می باشد (شکل (ب)).



(ب)



(الف)

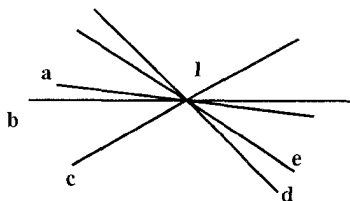
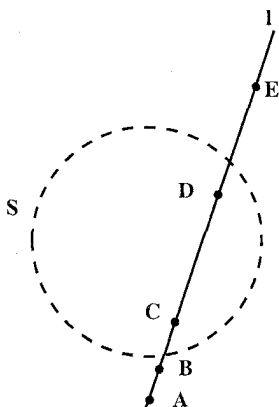
[اگر نقطه های تماس ضلعهای چهارضلعی محیط بر دایره S در شکل (ب)، رأسهای چهارضلعی محاط در S شکل (الف) گرفته شوند، آن گاه $\triangle PQR$ در شکل (ب) بر $\triangle PQR$ در شکل (الف) منطبق می شود؛ اثبات این حکم به عهده خواننده گذارده می شود.] این دو مثلث هر دو منفرجه الزاویه می باشند و نقطه های برخورد ارتفاعهای آنها بر مرکز S منطبق می باشد.

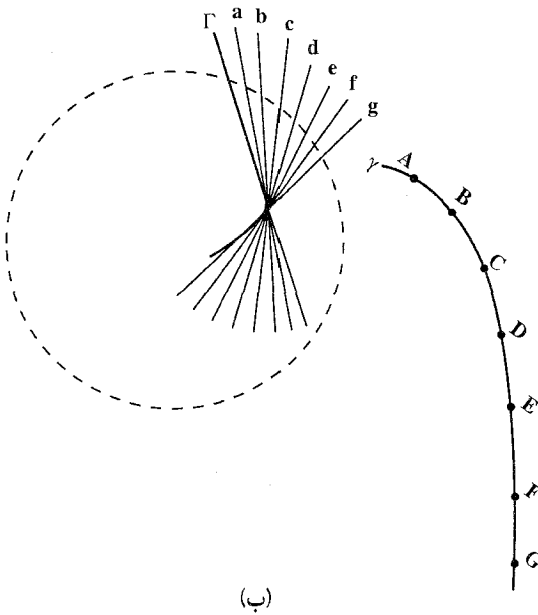
مفهوم قطبی نقطه نسبت به دایره به ما اجازه می دهد که نوعی تبدیل از صفحه را، که در

اثبات بسیاری از قضیه‌ها مفید است، تعریف کنیم. فرض می‌کنیم S دایره ثابتی باشد و F شکل مسطحی که از نقطه‌ها و خط‌ها تشکیل شده است. شکل F' را که هر نقطه‌اش قطب یک خط F و هر خطش قطبی یک نقطه F نسبت به دایره S است، در نظر می‌گیریم. تبدیلی که شکل F' را با شکل F متناظر می‌سازد قطبی معکوس‌سازی یا تبدیل قطب و قطبی می‌نامیم. بعضی اوقات ما اصطلاح تبدیل قطبی را نیز به کار خواهیم برد.

البته قطب و قطبی تبدیلی به معنایی که ما تاکنون به کار برده‌ایم یعنی، نگاشتی که نقطه‌ها را به نقطه‌ها بدل کند (تبدیل نقطه‌ای) نیست. بنا بر تعریف، قطب و قطبی نگاشتی است که خط‌ها و نقطه‌ها را با هم عوض می‌کند. از این قرار، با همه تبدیلهایی که تاکنون دیده‌ایم (حرکتها، تشابه‌ها و تصویرها) تفاوت دارد. در آن چه که در زیر می‌آید ما به موارد دیگری از تبدیلهای خواهیم خورد که تبدیلهای نقطه‌ای نیستند.

تعریفی که از قطب و قطبی کردیم، تا آن جا که به مسأله‌های زیرین مربوط می‌شود، کاری رضایت‌بخش است. به علاوه قطب و قطبی را باید تبدیل صفحه به خودش، یا بهتر بگوییم، تبدیلی در مجموعه‌ای از نقطه‌ها و خط‌های صفحه بگیریم که هر نقطه را به یک خط و هر خط را به یک نقطه بدل می‌کند؛ به علاوه، نقطه‌هایی که بر یک خط l قرار دارند به خط‌هایی بدل می‌شوند که از یک نقطه L و نگاره خط l می‌گذرند (شکل (الف)). در قطب و قطبی، یک منحنی γ ، که به عنوان مجموعه‌ای از نقطه‌هایش تلقی می‌شود، به یک منحنی جدید Γ بدل می‌شود که باید پوش مماس‌هایش انگاشته شود (شکل (ب)).





این یک مثال مناسب و جالبی است. روشن است که قطب و قطبی نسبت به یک دایره S به مرکز O و شعاع r، یک دایره s به مرکز O و به شعاع r را به یک دایره s' به شعاع r بدل می کند، که s مجموعه نقطه های آن و s' مجموعه مناسبی از مماسهای آن انگاشته می شود، یا بعکس (یک نقطه A به فاصله r از O به خط a به فاصله r از O بدل می شود). حال فرض می کنیم B مرکز دایره s (که در این مقام مناسب است آن را با مجموعه مماسهای a یکی بگیریم) بر O منطبق نباشد (مانند قبل، شعاع s برابر r گرفته شده است). اگر b و A بترتیب نگاره های B و a بر اثر قطب و قطبی نسبت به s باشند، آن گاه داریم:

$$OA / AP = OB / BQ (= OB / r)$$

که AP فاصله A از b و BQ = r فاصله B از a است. بنابراین مجموعه خطهای a (یعنی دایره s) به مجموعه «مکانها» s' از نقطه های A بدل می شود، به طوری که:

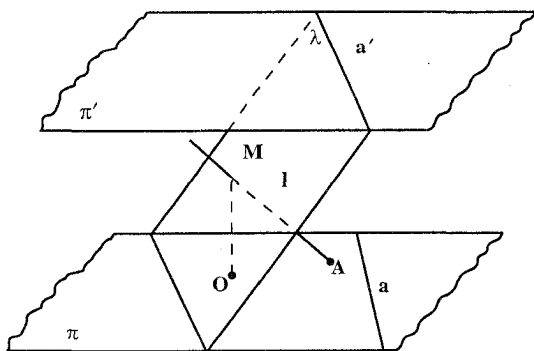
$$OA / AP = \text{مقدار ثابت} (= OB / r)$$

یعنی به مکان نقطه های A بدل می شود که نسبت فاصله هایش از O و b ثابت (و مساوی OB/r) است. اما چنان که می دانیم این مکان یک بیضی است (اگر $OB/r < 1$ ، یعنی اگر O داخل s باشد)، یک سهمی است (اگر $OB/r = 1$ ، یعنی اگر O بر s باشد)، یا هذلولی است (اگر

۱. $OB/r > 1$ ، یعنی اگر O خارج s باشد). از این جا نتیجه می شود که در قطب و قطبی، یک دایره S یا به یک دایره (حالتی که مرکز s بر مرکز دایره S منطبق است)، یا به یک بیضی، سهمی، یا هذلولی بدل می شود. این واقعیت بسیاری از ویژگیهای مقطعهای مخروطی را ایجاد می کند. یادآوری می کنیم که تبدیل قطب و قطبی یک صفحه به خودش را می توان بدون توسل به قضیه ۱. با استفاده از ترسیم گنجانگی به شرح زیر، تعریف کرد:

گیریم π و π' دو صفحه موازی باشند و M نقطه ای متساوی الفاصله از هر دو (شکل (پ)). به هر نقطه A از π (بجز O ، پای عمود رسم شده از M)، یک خط a را که به طریق زیر به دست می آید، مربوط کنیم:

بر نقطه های N و A خط l را می گذرانیم؛ از نقطه M صفحه λ را بر l عمود می کنیم، فصل مشترک صفحه λ و π' را a' می نامیم. حال π' را بر صفحه π «می چکانیم» (یعنی تصویر قائم π' را بر صفحه π به دست می آوریم)، بدین ترتیب a' را به خط a در صفحه π بدل می کنیم.



(پ)

به آسانی می توان نشان داد که تبدیلی که خط a را با نقطه A متناظر می سازد، قطب و قطبی نسبت به دایره به مرکز O و شعاع OM است. در این جا فرصتی نیست که ما از این نتیجه استفاده کنیم و اثبات آن را به عهده خواننده می گذاریم. به آسانی می توان همه ویژگیهای قطب و قطبی را از تعریفی که هم اکنون کردیم، استخراج کنیم؛ توصیه می کنیم که خواننده سعی کند خود آن را آزمایش کند.

تبدیل قطب و قطبی اغلب می تواند یک مسأله را به مسأله ساده تری بدل کند. واقعیت مهمتر این که قطب و قطبی به عنوان وسیله ای برای به دست آوردن نتایج تازه از نتایج قدیم به کار می رود. برای روشن ساختن این مطلب، اشاره می کنیم که وقتی ما تصویرهای مرکزی یا موازی را برای حل مسأله ها در بخشهای پیشین به کار بردیم، منظور ما تبدیل یک مسأله مفروض به حالت خاص ساده ای از همان مسأله بود (به طور مثال، به جای یک مثلث دلخواه، یک مثلث متساوی الاضلاع گذاشت و یا به جای دو خط دلخواه، دو خط موازی). وقتی ما از قطب و قطبی استفاده می کنیم، معمولاً به حالت خاصی از مسأله مفروض نمی رسیم، زیرا تبدیل قطب و قطبی با گذاردن خط به جای نقطه، و نقطه به جای خط، یک شکل را به شکل کاملاً متفاوتی بدل می کند. از این جا نتیجه می شود که هرگاه تبدیل قطب و قطبی را برای شکلی که به گزاره ای مربوط می شود، به کار ببریم، شکلی به دست می آوریم که به گزاره تازه ای مربوط می شود. این گزاره تازه ممکن است از گزاره اصلی ساده تر باشد و با اثبات آن، گزاره اصلی را نیز ثابت کرده باشیم. اگر گزاره تازه ساده تر از گزاره اصلی نباشد، باز هم استفاده می کنیم؛ زیرا یک برهان برای یکی از آن گزاره ها، برهانی معتبر برای دیگری نیز هست.

تعریف. هر دو قضیه حاصل از یکدیگر به کمک قطب و قطبی، قضیه های دوگان نامیده می شوند. وجود جفتهای قضایایی که هریک از آنها دوگان دیگری است به اصل دوگانی معروف است، که ما بعداً به وسیله مثالهای زیاد آن را نشان خواهیم داد.

اصل دوگانی، که بر اساس مفهوم قطب و قطبی در صفحه نهاده شده، به ما امکان می دهد که با تعویض واژه های «نقطه» و «خط» از یک قضیه، قضیه تازه ای به دست آوریم. در آغاز این بخش در تعریف قطب و قطبی استفاده کردیم. اهمیت آن، آن قدرها در این نیست که به ما امکان می دهد با هر نقطه یک خط معین و با هر خط نقطه معینی را متناظر می سازیم، این گونه تناظرها کاملاً عادی هستند (مثلاً ما می توانیم به یک نقطه P محور تقارن p را که با P و نقطه ثابتی چون O معین می شود، مربوط کنیم. با O مثلاً خط بینهایت را، و با یک نقطه در بینهایت خط گذرنده بر O ، عمود بر امتدادی را که نقطه بینهایت به وسیله آن معین می شود، مربوط سازیم)، بلکه در این است که به ما اجازه می دهد به یک نقطه واقع بر یک خط، خطی گذرنده بر نقطه متناظرش را مربوط کنیم. از آن جا نتیجه می شود که هر تناظری از نوع اخیر، یعنی تناظری که به یک نقطه (خط) یک خط (نقطه) منحصر به فرد، و به یک نقطه و خط گذرنده بر آن یک خط و یک نقطه واقع بر آن را مربوط سازد، می تواند به وسیله یک تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S و احتمالاً یک تصویر مرکزی صفحه بر روی خودش، یا یک نیمدور و یک تصویر مرکزی تحقق یابد.

یک توضیح دیگر. ما ممکن است این اثر را بر خواننده گذاشته باشیم که تبدیلهای قطب و قطبی اصولاً وسیله‌ای برای به دست آوردن قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیمند، در حالی که تصویرهای موازی و مرکزی منحصرأ به عنوان تکنیک‌هایی برای اثبات حکمهای هندسی به کار می‌روند. این تشخیص کاملاً درستی نیست، زیرا چنان که در بالا متذکر شدیم، تبدیلهای قطب و قطبی می‌توانند اغلب برای اثبات حکمهای هندسی داده شده مورد استفاده قرار گیرند و چنان که توضیح خواهیم داد، تصویرهای مرکزی و موازی، به‌طور تصادفی برای به دست آوردن قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیم به کار می‌روند: با استفاده از یک تصویر مرکزی یا موازی برای نمودار یک قضیه، اغلب به قضیه تازه‌ای هدایت می‌شویم. قضیه‌ای را در نظر بگیرید که فقط متضمن مفاهیمی باشد که بر اثر تصویرهای موازی محفوظ می‌مانند. روشن است که به کار بردن تصویر موازی برای چنین قضیه‌ای نمی‌تواند قضیه تازه‌ای به دست دهد (درست مانند حرکت، که وقتی برای نمودار یک قضیه به کار برده می‌شود، هرگز ما را به قضیه تازه‌ای هدایت نمی‌کند). ولی ممکن است ما را به حالت خاص ساده‌ای از همین قضیه هدایت کند. از سوی دیگر، استعمال یک تصویر موازی برای نمودار قضیه‌ای که شامل مفاهیمی غیر از مفاهیم آفین باشد، ممکن است قضیه تازه‌ای بدهد؛ به‌طور مثال از تصویر یک مثلث قائم‌الزاویه بر یک مثلث متساوی‌الاضلاع، می‌توانیم از هر قضیه‌ای که به یک مثلث قائم‌الزاویه مربوط می‌شود، قضیه تازه‌ای به دست آوریم. همچنین استفاده از تصویر مرکزی برای قضیه‌های آفین ممکن است ما را به قضیه‌های تازه‌ای سوق دهد؛ مثالهای مناسب قبلاً داده شده‌اند. روی هم رفته، بهتر است بگوییم که تصویرهای موازی و مرکزی بیشتر وقتها برای اثبات قضیه‌ها به کار می‌روند، و تبدیلهای قطب و قطبی برای به دست آوردن قضیه‌های جدید از قضیه‌های قدیم.

نکته مهمی که باید به آن اشاره کنیم این است که اصل دوگانی فقط در صفحه تصویری، یعنی در صفحه‌ای که با «عنصرهای بینهایت» تکمیل شده، صدق می‌کند (تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S ، مرکز S را به خط بینهایت و قطرهای آن را به نقطه‌های بینهایت بدل می‌کند). علت آن این است که اصل دوگانی به ما اجازه می‌دهد در گزاره‌های هندسی نقطه‌ها و خطها را با هم عوض کنیم و بنابراین، به تعبیری، هم ارزی نقطه‌ها و خطها را پدید می‌آورد. پیش از معرفی عنصرهای بینهایت، نقطه‌ها و خطها به هیچ وجه هم ارز نبودند؛ زیرا اگر هم ارز بودند، وجود خطهای موازی (خطهای بدون نقطه مشترک) وجود نقطه‌های «موازی»، (نقطه‌هایی بدون یک «خط مشترک»، یعنی نقطه‌هایی بی آن که خطی بر آنها بگذرد)، را موجب می‌شد و چنین نقطه‌هایی وجود ندارند. وارد کردن عنصرهای بینهایت، حالت خاص خطهای موازی را از بین می‌برد؛ در صفحه تصویری دو خط همواره در یک نقطه منحصر به فرد (یک نقطه معین

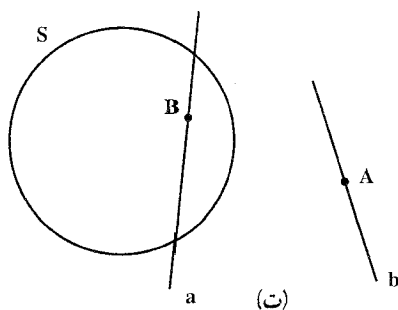
یا یک نقطهٔ بینهایت) اشتراک دارند، و دو نقطه همواره خط منحصر به فردی را مشخص می‌کنند که بر هر دوی آنها می‌گذرد.

می‌توان نشان داد که تقارن ویژگیهای اساسی نقطه‌ها و خطهای صفحهٔ تصویری که در بالا ذکر شد، اصل دوگانی، یعنی امکان به‌دست آوردن یک قضیهٔ جدید (دوگان) از یک قضیهٔ قدیمی را، با تعویض اصطلاحات «نقطه» و «خط» و اصطلاحات «قرار دارد بر» و «می‌گذرد بر» ایجاب می‌کند. زیرا در اثبات یک قضیهٔ هندسی آن را به قضیهٔ ساده‌تری بدل می‌کنیم که به نوبهٔ خود باز به قضیهٔ ساده‌تری بدل می‌شود و هكذا، تا اینکه به ساده‌ترین گزاره‌های هندسی، یعنی اصول موضوعه، که بدون اثبات مسلم گرفته شده‌اند، می‌رسیم. اما در صفحهٔ تصویری ویژگیهای اساسی نقطه‌ها و خطها کاملاً هم ارزند، یعنی اگر در اصل موضوع مفروضی اصطلاحات «نقطه» و «خط» و اصطلاحات «قرار دارد بر» و «می‌گذرد بر» را با هم عوض کنیم، گزارهٔ معتبری به دست می‌آوریم. شایسته است که این گزاره‌ها را در شمار اصول موضوع بگذاریم. وقتی فهرست حاصل از اصول موضوع طولانی باشد، خود، دوگان نیز هست. ولی در آن صورت دوگان هر قضیهٔ (معتبر) یک قضیهٔ جدیدی است معتبر، عیناً مثل قضیهٔ اصلی قابل اثبات است، جز این که حالا فرآیند برهان به اصول موضوع دوگان، به آن اصول موضوعی که در برهان قضیهٔ اصلی به آنها رسیده‌ایم، برمی‌گردد.

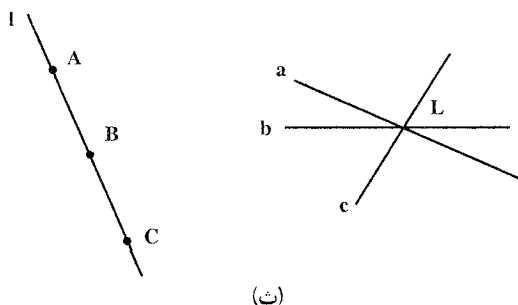
یک توضیح دیگر. وقتی از تبدیلهای قطب و قطبی استفاده کنیم، بیشتر از موقعی که از قضیه‌های هم‌ارزی ویژگیهای اساسی نقطه‌ها و خطها استفاده می‌کنیم، می‌توانیم به قضیه‌های دوگان دست یابیم، زیرا استفاده از این هم‌ارزی (که در وجود جفتهای اصول موضوع دوگان نهاده شده) به منظور به‌دست آوردن قضیه‌های دوگان به قضیه‌هایی محدود شده است که متضمن زاویه یا فاصله نیستند (زیرا این مفاهیم دوگان ندارند، به عبارت دیگر، هم‌ارزی ویژگیهای اصلی نقطه‌ها و خطهای صفحهٔ تصویری به ما اجازه می‌دهد اصل دوگانی را فقط برای قضیه‌های هندسهٔ تصویری به کار ببریم). از سوی دیگر، ویژگیهای (ب) و (ج) تبدیل قطب و قطبی که بعداً داده خواهد شد، به ما امکان می‌دهند که اصل دوگانی را برای ردهٔ بیشتری از قضیه‌ها به کار ببریم.

اکنون برخی از ویژگیهای تبدیل قطب و قطبی را در نظر می‌گیریم. مهمترین آنها عبارت است از: الف. تبدیل قطب و قطبی، یک نقطهٔ A و یک خط b گذرنده بر A را به یک خط a و یک نقطهٔ B واقع بر a بدل می‌کند (شکل ت).

ویژگی (الف) ایجاب می‌کند که تبدیل قطب و قطبی، سه نقطهٔ A، B و C واقع بر یک خط l را به سه خط a، b و c گذرنده بر یک نقطهٔ L بدل کند (شکل ث) و نیز شکل (الف) و بعکس،

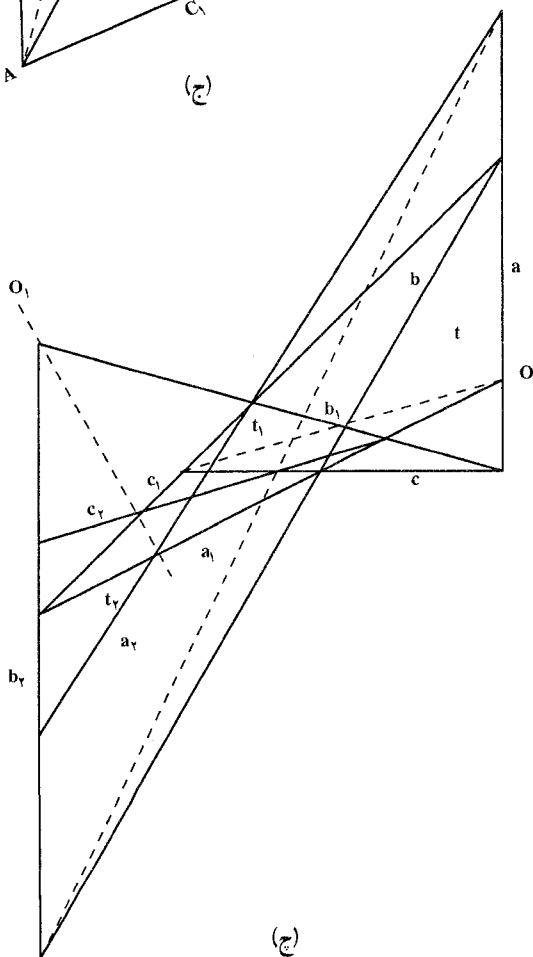
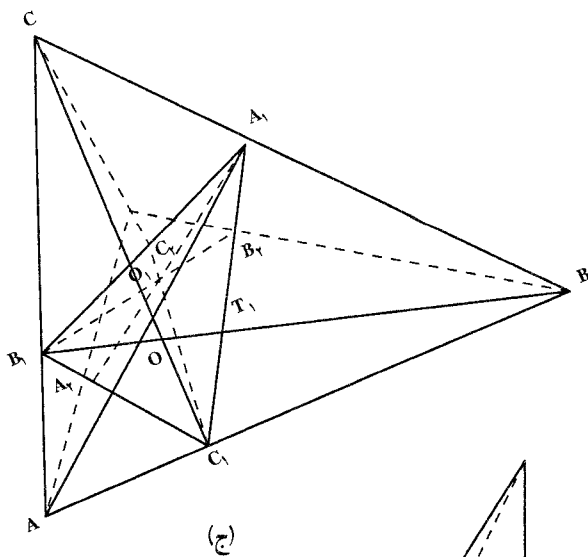


سه خط متقارب (گذرنده بر یک نقطه معین یا یک نقطه در بینهایت) را به سه نقطه همخط بدل می‌کند.



این واقعیت به ما اجازه می‌دهد که قضیه‌های تازه‌ای از قضیه‌های داده شده به دست آوریم. به طور مثال قضیه زیر را در نظر می‌گیریم:

قضیه. هرگاه A_1, B_1, C_1 نقطه‌هایی بر ضلعهای $\triangle ABC$ (که آن را برای اختصار با $\triangle T$ می‌نماییم) باشند، چنان که خطهای AA_1, BB_1, CC_1 در یک نقطه O هم‌رس باشند و هرگاه A_2, B_2, C_2 نقطه‌هایی بر ضلعهای $\triangle A_1B_1C_1 (\triangle T_1)$ باشند، به‌طوری که خطهای AA_2, B_1B_2, C_1C_2 در O_1 هم‌رس باشند، آن‌گاه خطهای AA_2, BB_2, CC_2 هم در یک نقطه هم‌رس خواهند بود (شکل (ج)). ما یک تبدیل قطب و قطبی برای این قضیه اعمال می‌کنیم. در این حال مثلث T به یک مثلث t بدل می‌شود که ضلعهای a, b, c در آن، قطبیهای رأسهای مثلث T هستند؛ نقطه O به یک خط o بدل می‌شود و مثلث T_1 به یک مثلث t_1 که ضلعهای آن، a_1, b_1, c_1 ، خطهای اصل بین رأسهای مثلث t و نقطه‌های تلاقی o با ضلعهای متقابل مثلث t هستند؛ نقطه O_1 به خط o_1 بدل می‌شود و نقطه‌های A_2, B_2, C_2 به خطهای a_2, b_2, c_2 اصل بین رأسهای t_1 و نقطه‌های تلاقی o_1 با ضلعهای مثلث t_1 (شکل (ج)).



چون طبق قضیهٔ بالا (الف) خطهای AA_2 ، BB_2 و CC_2 هم‌رسانند، از آن جا نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های برخورد جفتهای خطهای a و a_2 ، b و b_2 ، c و c_2 هم‌خطند؛ لذا به قضیهٔ زیر هدایت می‌شویم:

اگر t_1 مثلثی باشد که ضلعهایش بر خطهای واصل بین رأسهای مثلث t و محل برخورد یک خط o با ضلعهای مقابل t قرار داشته باشند، و t_2 مثلثی که ضلعهایش بر خطهای واصل بین رأسهای مثلث t_1 و نقطه‌های برخورد یک خط o_1 با ضلعهای مقابل t_1 واقع باشند، آن گاه نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر مثلثهای t و t_2 ، هم‌خطند. این قضیه، قضیه‌ای است کاملاً تازه که با یک نمودار تازه شرح داده شده است، ولی ما به ارائهٔ برهان مستقلی برای اثبات آن نیاز نداریم؛ صحت آن از قضیهٔ بالا و ویژگی (الف) از تبدیل قطبی و قطب نتیجه می‌شود.

۲.۱. قطب و قطبی در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۳۰- زاویهٔ xOy و نقطهٔ P داده شده‌اند. از P دو خط چنان رسم می‌کنیم که Ox و Oy را بترتیب در A ، B و A' ، B' قطع کنند. قطب خط OP کدام نقطه است؟

۲.۲.۱. نقطه‌های: هم‌خط، هم‌دایره،...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها هم‌خطند

۳۱- از نقطهٔ O واقع در صفحهٔ دو خط متقاطع $x'Ox$ و $y'Oy$ سه خط رسم می‌کنیم تا بترتیب آنها را در A ، B ، C و A' ، B' ، C' قطع کنند. ثابت کنید نقطه‌های برخورد زوج خطهای $(AB', A'B)$ ، $(BC', B'C)$ و $(AC', A'C)$ با نقطهٔ O روی یک خط راست واقعند.

۳.۲.۱. خطهای: موازی، هم‌رس، ...

۱.۳.۲.۱. خطها موازی‌اند

۳۲- زاویهٔ $\hat{xOy}$ و نقطهٔ P داده شده‌اند. از نقطهٔ P قاطع غیرمشخص و دلخواهی رسم

می‌کنیم تا OX و OY را بترتیب در A و B قطع کند. از A به M وسط OP وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا OY را در C برخورد نماید. اگر D محل برخورد CP با OX باشید، ثابت کنید: $BD \parallel OP$ است.

۲.۳.۲.۱. خطها دستگاه توافقی می‌سازند

۳۳. ثابت کنید قطبهای ۴ نقطه که تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند، یک دستگاه توافقی می‌سازند.

۳.۳.۲.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۳۴. زاویه XOY و نقطه ثابت P واقع بر ضلع OX داده شده‌اند. دایره متغیر (ω) را مماس بر ضلعهای زاویه بالا رسم می‌نماییم و از نقطه P مماس PC بر این دایره رسم می‌کنیم. در صورتی که A و B بترتیب نقطه‌های تماس ضلعهای OX و OY با دایره (ω) باشند؛ ثابت کنید که BC پیوسته از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۴.۲.۱. زاویه

۱.۴.۲.۱. اندازه زاویه

۳۵. زاویه $\hat{xOy} = \alpha$ و نقطه A در برون این زاویه داده شده‌اند. اندازه زاویه‌هایی را که قطبی نقطه A نسبت به دو خط Ox و Oy ، با این دو خط می‌سازد، تعیین کنید؛ در صورتی که $\hat{AOx} = \beta$ باشد.

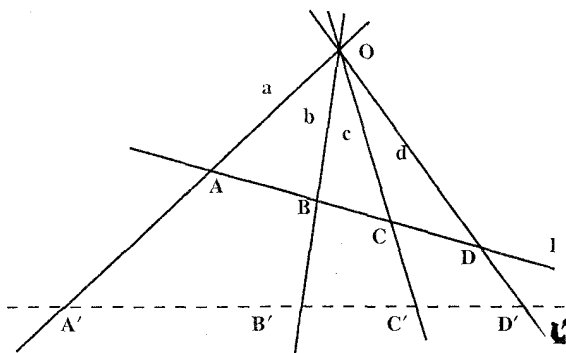
۵.۲.۱. پاره خط

۱.۵.۲.۱. اندازه پاره خط

۳۶. نقطه A به فاصله h از خط Δ و دو خط متوازی Δ و Δ' به فاصله l از یکدیگر داده شده‌اند. قطبی نقطه A نسبت به این دو خط را D می‌نامیم. از A خطی رسم می‌کنیم که D ، Δ' و Δ را بترتیب در نقطه‌های N ، M و P قطع کند و با Δ زاویه α بسازد. اندازه پاره خطهای MN و NP را به دست آورید.

۶.۲.۱. رابطه‌های متریک

۳۷. یک ویژگی دیگر تبدیل قطب و قطبی را که نقش اساسی در کارهای پیشرفته‌تر شامل این تبدیله‌ها دارد نیز متذکر می‌شویم. برای بیان این ویژگی نخست باید مشابه نسبت ناهمساز

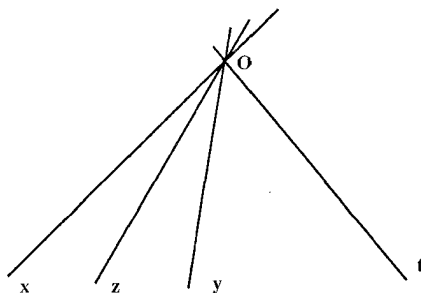


چهار نقطه همخط، نسبت ناهمساز چهار خط هم‌مس a, b, c و d را وارد، و به صورت نسبت ناهمساز A و $B : C$ و D ی نقطه‌های برخورد چهار خط هم‌مس داده شده با یک خط پنجم l (که از نقطه مشترک چهار خط مفروض نمی‌گذرد) تعریف کنیم. روشن است که نسبت ناهمساز چهار خط a, b, c و d مستقل از انتخاب خط l است؛ زیرا اگر یک خط l' خطهای a, b, c و d را در نقطه‌های A', B', C', D' ببرد، آن‌گاه نسبت ناهمساز نقطه‌های A' و $B' : C' و D'$ مساوی است یا نسبت ناهمساز نقطه‌های A و $B : C$ و D . اکنون می‌توانیم ویژگی دیگری از قطب و قطبی را بیان کنیم:

اگر یک تبدیل قطب و قطبی چهار نقطه A, B, C و D واقع بر یک خط l را به چهار خط a, b, c و d (که به موجب ویژگی (الف) تبدیلهای قطب و قطبی در یک نقطه L هم‌رسند) بدل کند، آن‌گاه نسبت ناهمساز چهار خط a و $b : c$ و d با نسبت ناهمساز چهار نقطه A و $B : C$ و D مساوی است.

۷.۲.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۳۸. دستگاه توافقی $O-xyzt$ داده شده است. ثابت کنید که هر نقطه از دو شعاع مزودج Ox و Oy بترتیب قطب شعاع Ox و Oy ، نسبت به دو شعاع Oz و Ot است و بعکس.



۸.۲.۱. رسم شکلهای

۳۹. قطبی نقطه P را نسبت به نقطه C (دایرة به شعاع صفر) و نسبت به خط Δ (دایرة به شعاع بینهایت) معین کنید.

۴۰. دایره‌ای بر نقطه داده شده A بگذرانید که قطبی نقطه معین B نسبت به آن، خط مفروض d باشد.

۴۱. خطهای D و Δ و نقطه A داده شده‌اند. دایره‌ای چنان رسم کنید که بر خط D مماس بوده و خط Δ قطبی A نسبت به آن دایره باشد.

۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۲. نقطه‌های A، M و B به همین ترتیب روی یک خط راست قرار دارند. بر نقطه‌های A و B دایره متغیری رسم می‌کنیم. اگر P نقطه برخورد مماسهای رسم شده بر دایره (O) در نقطه‌های A و B باشد، مطلوب است:

۱. مکان هندسی نقطه H، تصویر نقطه P بر روی خط MO.

۲. مکان هندسی نقطه‌های برخورد PH با دایره (O).

۳.۱. قطب و قطبی در مثلث

۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۴۳. نشان دهید که مرکز ارتفاعی مثلث، قطب ارتفاعی ضلعهای مثلث، نسبت به مثلث است.

۴۴. نشان دهید که مرکز تجانس مثلثهای ارتفاعی و مماسی مثلث مفروض (T) قطب محور ارتفاعی (T) نسبت به دایره محیطی (T) است.

۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

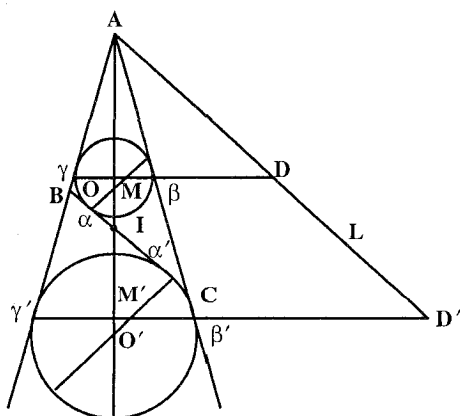
۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها همخطند

۴۵. قضیه‌ای را که از کاربرد تبدیل قطب و قطبی برای قضیه مربوط به خط سیمسون نتیجه می‌شود، بیان کنید.

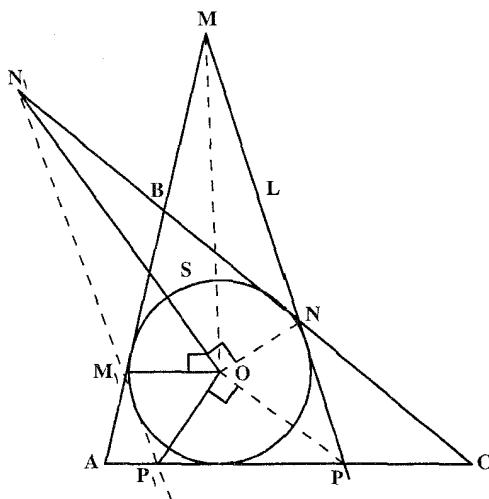
نکته. تصویرهای هر نقطه از دایره محیطی مثلث روی ضلعها یا امتداد ضلعهای آن مثلث، سه نقطه‌اند واقع بر یک خط راست به نام سیمسون.

۴۶. قضیه. هرگاه از یک نقطه واقع در صفحه مثلثی به سه رأس مثلث وصل کنیم و از آن نقطه بر خط واصل به هر رأس، عمودی اخراج کنیم و امتداد دهیم تا ضلع مقابل به آن رأس را در نقطه‌ای قطع کند، سه نقطه‌ای که به این ترتیب به دست می‌آیند، بر یک استقامتند.

۴۷. مثلث ABC داده شده است. دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی مماس بر ضلع BC رسم می‌کنیم. اگر α ، β و γ نقطه‌های تماس ضلعهای مثلث با دایره محاطی داخلی و α' ، β' و γ' نقطه‌های تماس دایره محاطی خارجی با ضلعهای مثلث باشند و اگر M و M' نقطه‌های برخورد قطرهای از دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث با γB و $\gamma' B'$ باشند که بر BC عمودند: ثابت کنید نقطه‌های A، M و M' بر یک خط راست واقعند که از نقطه I وسط BC می‌گذرد.



۴۸. دایرة S در مثلث ABC محاط شده است. خط l بر دایرة S مماس است و ضلعهای مثلث را در نقطه های M ، N و P قطع می کند (شکل). از O ، مرکز S ، عمودی بر خطهای OM ، ON و OP اخراج می کنیم و نقطه های برخورد آنها را با ضلعهای متناظر مثلث، M_1 ، N_1 و P_1 نام می گذاریم. ثابت کنید که نقطه های M_1 ، N_1 و P_1 بر یک خط قرار دارند.

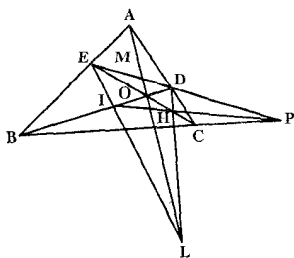


۴۹. از ویژگی (ب) در تبدیل قطب و قطبی برای اثبات قضیه دزارگ استفاده کنید.
۵۰. M ، L و N نقطه های برخورد خطهای AP ، BP و CP با ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC ، و M' ، L' و N' نقطه های برخورد همین ضلعها با قطبی سه خطی P برای ABC هستند. نشان دهید که نقطه های وسط LL' ، MM' و NN' همخطند.

۳.۳.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۳.۱. خطها همرسند

۵۱. در مثلث ABC ، نقطه های D و E را بترتیب روی AC و AB در نظر می گیریم. محل برخورد BD و CE را O می نامیم. روی AO نقطه اختیاری L را در نظر می گیریم. خطهای LD و LE را رسم می کنیم تا CE و BD را در H و I قطع کنند. نشان دهید خطهای DE ، BC و IH همرسند.

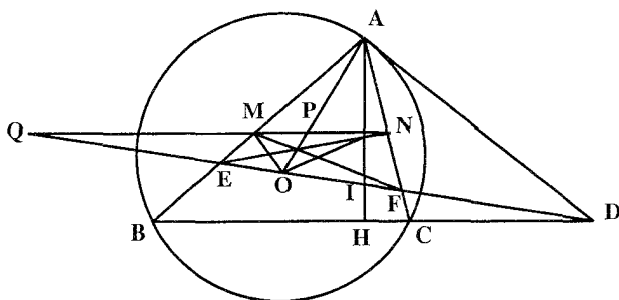


۵۲. خاصیت هم‌رس بودن ارتفاعهای مثلثی را به وسیله قطبی متقابل آن نسبت به دایره محیطی آن اثبات کنید.

۵۳. خاصیت هم‌رس بودن میانه‌های مثلثی را به وسیله تعیین قطبی متقابل آن نسبت به دایره محیطی آن ثابت کنید.

۵۴. قضیه‌های حاصل از کاربرد تبدیل قطب و قطبی را برای قضیه زیر بیان کنید :
نیمسازهای زاویه‌های یک مثلث هم‌رسند.

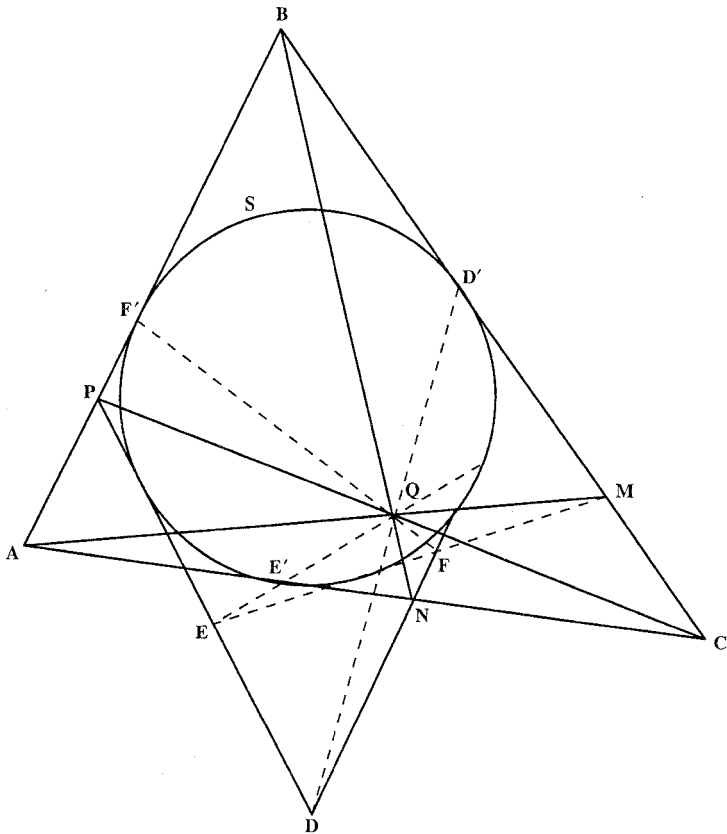
۵۵. مثلث ABC محاط در دایره (O) داده شده است. مماسی بر دایره در نقطه A رسم می‌نماییم تا امتداد BC را در نقطه D قطع نماید. خط OD را رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را به ترتیب در E و F قطع نماید. اگر M و N به ترتیب وسطهای AB و AC باشند، ثابت کنید که AO ، MF و NE هم‌رسند.



۵۶. نشان دهید که موربهای معکوس دو قطر عمود بر هم دایره محیطی یک مثلث، یکدیگر را روی خط قطبی مرکز دایره محیطی نسبت به دایره نه نقطه، قطع می‌کنند.

۵۷. به وسیله تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره‌ای که در مسأله زیر آمده است، چه مسأله‌هایی به دست می‌آید؟

مثلث ABC و نقطه Q داده شده‌اند. بگیریم M ، N و P محل برخورد خطهای AQ ، BQ و CQ با ضلعهای BC ، CA و AB باشند (شکل). هرگاه S دایره محاطی داخلی مثلث ABC و D' ، E' و F' نقطه‌های تماس آن با ضلعهای BC ، CA و AB باشند و مماسهای رسم شده از M ، N و P بر S مثلث DEF را پدید آورند، نشان دهید که سه خط واصل بین رأسهای متناظر در دو مثلث DEF و $D'E'F'$ در Q هم‌رسند.



۵۸. نشان دهید که خطهای واصل بین رأسهای مثلث ABC و نقطه‌های A' ، B' و C' ، قطبهای ضلعهای مقابل به این رأسها نسبت به یک دایرة S ، هم‌رسانند. این قضیه را می‌توان بترتیب زیر بیان کرد:

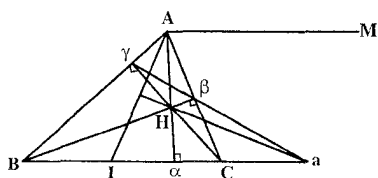
دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را نسبت به یک دایره قطبی معکوس یکدیگر گوئیم هرگاه ضلعهای $\Delta A'B'C'$ قطبهای رأسهای متناظر ΔABC باشند و بعکس. ضلعهای ΔABC نیز قطبهای رأسهای $\Delta A'B'C'$ می‌باشند. پس حکم این قضیه این است که مثلثهای قطبی معکوس همواره تصویر منظری یکدیگرند. از این جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های برخورد ضلعهای متناظر مثلثهای ABC و $A'B'C'$ هم‌خطند.

۵۹. با استفاده از قطبی متقابل ثابت کنید که اگر ضلعهای مثلثی بر دایره‌ای مماس باشند، خطهای واصل بین هر نقطه تماس به رأس مقابل آن، سه خط هم‌رسانند.

۶۰. دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ و یک دایره S داده شده‌اند. ثابت کنید که اگر خطهای واصل بین رأسهای متناظر این دو مثلث هم‌رس باشند، خطهای واصل بین قطبهای ضلعهای ΔABC (نسبت به S) و قطبهای متناظر به ضلعهای $\Delta A_1B_1C_1$ نیز هم‌رسند (به عبارت دیگر اگر دو مثلث تصویر منظری یکدیگر باشند، مثلثهای قطبی معکوس آنها نیز تصویر منظری یکدیگرند).

۲.۳.۳.۱. خطها دستگاه توافقی می‌سازند

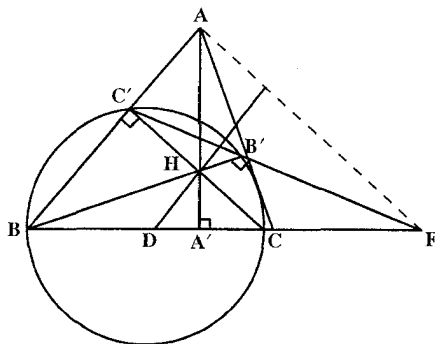
۶۱. اگر نقطه I محل برخورد دو خط مزدوج Δ و D نسبت به دایره (C) در خارج این دایره واقع شود، ثابت کنید مماسهایی که از I بر دایره رسم می‌شوند، با D و Δ یک دستگاه شعاعهای توافقی می‌سازند.



۳.۳.۳.۱. خطها بر هم عمودند

۶۲. ارتفاعهای مثلث ABC یعنی $A\alpha$, $B\beta$ و $C\gamma$ در H متقاطعند و I وسط BC و محل برخورد $\beta\gamma$ با BC نقطه a است. نشان دهید AI بر aH عمود است.

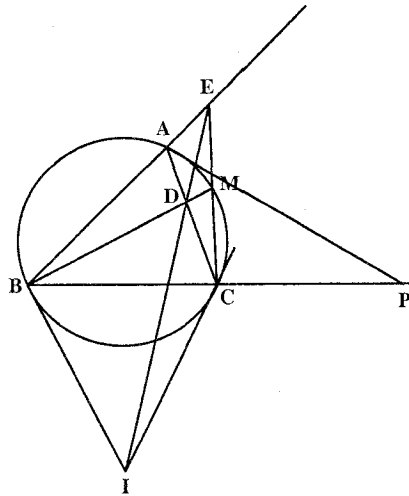
۶۳. در مثلث ABC ارتفاعهای BB' و CC' را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در H قطع کنند. پای ارتفاعهای مثلث را به هم وصل می‌کنیم تا امتداد ضلع BC را در F قطع کند. خط واصل بین نقطه (O) وسط BC و نقطه H بر AF عمود است.



۴.۳.۳.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۶۴. مثلث غیر مشخص ABC داده شده است. نقطه M بر دایره محیطی مثلث ABC را در

نظر گرفته، آن را به رأسهای B و C وصل می کنیم تا AC و AB را به ترتیب در D و E قطع کند. ثابت کنید وقتی M بر محیط دایره محیطی مثلث تغییر می نماید، DE از نقطه ثابتی می گذرد.



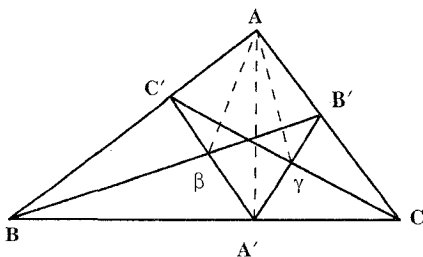
۶۵. اگر در مثلث ABC، $B'C'$ با BC موازی باشد و از پای میانه متقارن رسم شده از A بگذرد، نشان دهید که خط قطبی A نسبت به دایره ای که BC قطر آن است، از مرکزهای ارتفاعی مثلثهای ABC و $A'B'C'$ می گذرد.

۶۶. مثلث ABC محاط در دایره (O) داده شده است. ثابت کنید قرینه میانه AM نسبت به نیمساز AD از قطب وتر BC نسبت به دایره محیطی مثلث می گذرد.

۶۷. چهار دایره می توان رسم کرد که بر ضلعهای AB و AC از مثلث ABC و دایره محیطی مثلث (O) مماس باشند. نشان دهید هر یک از چهار خط قطبی A نسبت به این چهار دایره، از یکی از مرکزهای سه مماس مثلث ABC می گذرد.

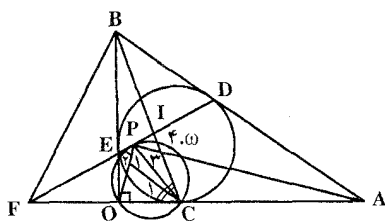
۱.۳.۳.۵. خط نیمساز است

۶۸. AA' ، BB' و CC' نیمسازهای زاویه های داخلی مثلث ABC می باشند. محل برخورد BB' و $A'C'$ را β و $A'B'$ و CC' را γ می نامیم. نشان دهید AA' نیمساز زاویه $\beta\alpha\gamma$ است.



۴.۳.۱. زاویه

۱.۴.۳.۱. اندازه زاویه



۶۹. مثلث قائم‌الزاویه OAB ($\hat{O} = 90^\circ$) و دایره محاطی داخلی آن داده شده است. چنانچه D, C و E به ترتیب نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای OA, AB و OB باشد، از نقطه C عمود CP را بر DE فرود می‌آوریم. ثابت کنید $\hat{OPA} = 90^\circ$ است.

۲.۴.۳.۱. رابطه بین زاویه‌ها

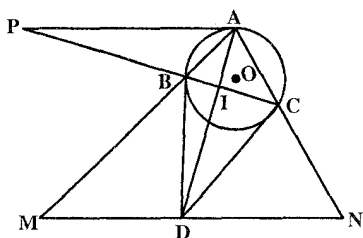
۷۰. زاویه دایره محیطی مثلث منفرجه‌الزاویه با دایره مزدوج آن را به θ نشان می‌دهیم. ثابت

$$\cos \hat{\theta} = \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C}$$

کنید که :

۵.۳.۱. پاره خط

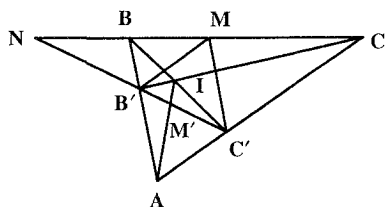
۱.۵.۳.۱. رابطه بین پاره خطها



۷۱. مثلث ABC و دایره محیطی آن داده شده‌اند. مماسهای بر دایره در نقطه‌های B و C یکدیگر را در D قطع می‌کنند. از D خطی به موازات مماس در A رسم می‌نماییم تا امتدادهای AB و AC را در M و N برخورد نماید. ثابت کنید D وسط MN است.

۶.۳.۱. رابطه‌های متری

۷۲. از نقطه اختیاری M واقع بر ضلع BC از مثلث ABC خطهایی به موازات AC و AB رسم می‌کنیم تا AB و AC را به ترتیب در B' و C' قطع کنند. CB' و BC' همدیگر را در I



و خط $B'C$ را در M' قطع می کند. ثابت کنید:

$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC}$$

۷۳. با استفاده از تبدیل قطب و قطبی، قضیه سوا را از قضیه منلائوس و بعکس قضیه منلائوس را از قضیه سوا به دست آورید.

۷۴. نشان دهید که مربع شعاع دایرة قطبی یک مثلث با نصف قوت مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به دایرة محیطی مثلث برابر است.

۷.۳.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۷۵. مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید که این مثلث و مثلث مماسی آن $(A'B'C')$ نسبت به دایرة محیطی، قطبی معکوس یکدیگرند.

۸.۳.۱. رسم شکلها

۷۶. ۱. مثلث ABC داده شده است. دایرة (A) را به مرکز A چنان رسم کنید که B و C نسبت به آن مزدوج باشند.

۲. اگر (B) و (C) دایره های شبیه دایرة (A) باشند، سه دایره (A) ، (B) و (C) دو به دو برهم عمودند.

۹.۳.۱. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۷۷. مثلث ABC و دایرة محیطی آن داده شده است. مماسهای نقطه های B و C بر دایرة مزبور در نقطه M متقاطعند. ثابت کنید خط AM قرینه میانه رأس A نسبت به نیمساز زاویه همین رأس است.

۷۸. مثلی را نسبت به یک دایره، قطبی معکوس خودش گویند هرگاه ضلعهای آن قطبیهایی رأسهای مقابلش باشند. ثابت کنید که به ازای هر مثلث منفرجه الزاویه ABC دایره منحصراً به فردی وجود دارد که این مثلث نسبت به آن قطبی معکوس خودش است؛ و نیز مرکز این دایره نقطه برخورد ارتفاعهای $\triangle ABC$ است. یک مثلث قائم الزاویه یا حاده الزاویه نسبت به هیچ دایره‌ای قطبی معکوس خودش نیست.

۷۹. نشان دهید خط قطبی مرکز دایره محیطی یک مثلث نسبت به دایره دوم لوموان، محور اصلی دایره و دایره بروکار است.

۸۰. نشان دهید که دایره قطبی یک مثلث، ضلعهای مثلث را به صورت همساز قطع می‌کند.

۸۱. نشان دهید که محور ارتفاعی یک مثلث، قطبی سه خطی مرکز ارتفاعی مثلث نسبت به آن مثلث و نسبت به مثلث ارتفاعی آن است و رأسهای مثلث مفروض وابسته‌های همساز مرکز ارتفاعی نسبت به مثلث ارتفاعی هستند.

۸۲. X نقطه دلخواهی روی ضلع BC از مثلث ABC است. نشان دهید دایره‌ای که AX قطر آن است با دایره قطبی مثلث متعامد است.

۸۳. اگر A' نقطه برخورد ضلع BC از مثلث ABC با قطبی سه خطی نقطه P واقع بر دایره محیطی ABC باشد، نشان دهید که دایره APA' از نقطه وسط ضلع BC می‌گذرد.

۱۰.۳.۱. مسأله‌های ترکیبی

۸۴. ضلع AB از مثلث غیر مشخص ABC و امتداد آن را محوری می‌انگاریم که مبدأ آن نقطه A و جهت مثبتش اختیاری باشد؛ روی این محور دو نقطه E و F را به طولهای $\overline{AE} = m \cdot \overline{AB}$ و $\overline{AF} = n \cdot \overline{AB}$ اختیار می‌کنیم (m و n اعدادی جبری و معلومند)؛ نقطه دلخواه D را نیز در صفحه ABC اختیار کرده، محل برخورد دو خط نامحدود DE و DF را با ضلع AC (یا امتداد آن) بترتیب G و H می‌نامیم؛ دو خط EH و FG (یا امتداد آنها) یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که آن را به I نمایش می‌دهیم؛ خط DI (یا امتداد آن) با محور AB در نقطه‌ای برخورد می‌کند که آن را K می‌نامیم.

$$\overline{EK} = \frac{m(n-m)}{n+m} \cdot \overline{AB} \quad ۱. \text{ ثابت کنید:}$$

۲. با فرض: $m = \frac{1}{4}$ و $n = \frac{-3}{4}$ ، تحقیق کنید که $2KF + 3AB = 0$ باشد.

۸۵. در مثلث ABC خطهای AD و AD' نیمسازهای زاویه A و AE قرینه میانه رأس نسبت به نیمساز داخلی AD و AT مماس در نقطه A بر دایرة محیطی مثلث است. خطهای AD, AD', AE و AT ضلع BC را در D, D', E و T قطع کرده اند. ثابت کنید :

$$1. \quad AT = \frac{DD'}{2}$$

۲. T و E مزدوج توافقی B و C می باشند.

۸۶. الف. M و M' دو نقطه همزاویه مثلث (T) هستند؛ نشان دهید که ضلعهای مثلثهای پادک نقطه های M و M' نسبت به (T)، یعنی مثلثهای PQR و P'Q'R'، خطهای قطبی نقطه های M و M' نسبت به دایره های (A)، (B) و (C) هستند. (A)، (B) و (C) دایره هایی هستند که رأسهای A, B و C از مثلث (T) مرکزهایشان هستند و بر دایرة پادک M و M' نسبت به (T) عمودند.

ب. نشان دهید سه خطی که رأسهای A, B و C را بترتیب به نقطه های $P_1 = (QR, Q'R')$, $P_2 = (RP, R'P')$ و $P_3 = (PQ, P'Q')$ وصل می کنند، موازی اند.

۸۷. ۱. نشان دهید که قطبی سه خطی مرکز دایرة محاطی داخلی یک مثلث، از پای نیمسازهای خارجی می گذرد، و بر خط واصل بین مرکز دایرة محیطی و مرکز دایرة محاطی داخلی عمود است؛ همچنین نشان دهید که مرکزهای دایره های محاطی خارجی وابسته های همساز مرکز دایرة محاطی داخلی هستند.

۲. بینهایت مثلث می توان رسم کرد که نسبت به یک دایرة مفروض قطبی باشند و نقطه مفروضی رأس مشترک همه آنها باشد. نشان دهید که :

الف. مرکز ثقل این مثلثها روی یک خط راست قرار دارد.

ب. مرکز ارتفاعی این مثلثها نقطه ثابتی است.

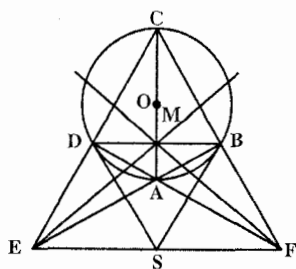
ج. مرکزهای دایره های محیطی آنها روی یک خط ثابت قرار دارد.

۱.۴. قطب و قطبی در چند ضلعی

۱.۴.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۸۸. ثابت کنید قطبیهای نقطه های برخورد ضلعهای روبه رو در هر چهارضلعی محدب، بر نقطه برخورد قطرهای آن چهارضلعی می گذرند.

۲.۴.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...



۱.۲.۴.۱. نقطه‌ها همخطند

۸۹. چهارضلعی ABCD محاط در دایره (O) داده شده است. اگر E و F بترتیب نقطه‌های تقاطع ضلعهای (AB و CD) و (AD و BC) و نقطه تقاطع مماسهای بر دایره در نقطه‌های B و D باشد، ثابت کنید E، S و F بر یک استقامت قرار دارند.

۳.۴.۱. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۴.۱. خطها هم‌رسند

۹۰. اگر از نقطه برخورد قطرهای AB' و BA' یک دوزنقه محاط در دایره، خط CC' را به موازات دو قاعده AA' و BB' رسم کنیم، ثابت کنید مماسهای نقطه‌های C و C' از محل برخورد دو ضلع AB و A'B' می‌گذرند.
۹۱. قطرهای یک چهارضلعی محیطی و وترهایی که نقطه‌های تماس مقابل را وصل می‌کند، هم‌رسند.
۹۲. خطهایی که رأسهای روبه‌روی یک شش‌ضلعی محیطی را به هم وصل می‌کنند در یک نقطه هم‌رسند. (برایانشن)

۲.۳.۴.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۹۳. چهارضلعی ABA'B' در دایره (O) محاط است. AB ثابت و A'B' تغییر می‌کند. AA' و BB' یکدیگر را در E و AB' و BA' یکدیگر را در F قطع می‌کنند. ثابت کنید که EF از نقطه ثابتی می‌گذرد.

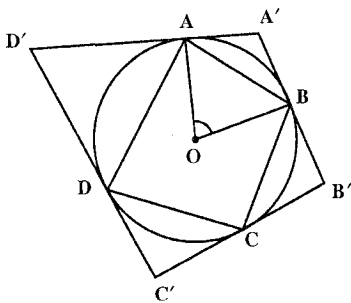
۳.۳.۴.۱. خط نیمساز است

۹۴. قضیه حاصل از کاربرد قطب و قطبی را برای قضیه زیر بیان کنید:

اگر قطره‌های متوازی الاضلاعی بر هم عمود باشند، زاویه‌های رأسها را نصف می‌کنند.

۴.۴.۱. زاویه

۱.۴.۴.۱. اندازه زاویه



۹۵. چهارضلعی ABCD داده شده است. قطبی معکوس این چهارضلعی نسبت به دایرة (S) به مرکز O را $A'B'C'D'$ می‌نامیم. اگر $\hat{AOB} = 50^\circ$ باشد، اندازه زاویه بین قطبیهای دو رأس A و B چند درجه است؟

۵.۴.۱. پاره خط

۱.۵.۴.۱. اندازه پاره خط

۹۶. چهارضلعی محاطی ABCD داده شده است. قطبیهای دو نقطه A و C نسبت به دایرة محیطی این چهارضلعی در نقطه E متقاطعند. طول پاره خطهای EB و ED را به دست آورید.

۶.۴.۱. رابطه‌های متری

۹۷. این خاصیت را که هر قطر چهارضلعی کامل به وسیله دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود، به وسیله قطبی متقابل مورد مطالعه قرار دهید.

۷.۴.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

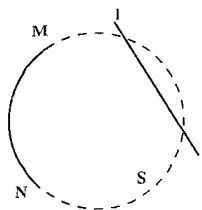
۹۸. ثابت کنید که مبدل قطبی معکوس مستطیل به مرکز O یک لوزی است.
 ۹۹. ثابت کنید قطبی متقابل هر چهارضلعی کامل یک چهارضلعی کامل است.

۱۰۰. ثابت کنید که در تبدیل قطبی معکوس، مبدل‌های رأس‌ها و ضلع‌های یک n ضلعی منتظم به مرکز O بترتیب ضلع‌ها و رأس‌های یک n ضلعی منتظم می‌باشند.

۱۰۱. در چهارضلعی توافقی $ABCD$ به قطرهای AB و CD ، خط CD شبه میانه مثلث‌های CAB ، DAB و خط AB شبه میانه مثلث‌های ACD و BCD است.

تعریف. چهار نقطه A ، B ، C و D را روی یک دایره در نظر می‌گیریم. گفته می‌شود که تقسیم $(ABCD)$ توافقی است. هرگاه نقطه M را که روی دایره اختیار کنیم، $(M.ABCD)$ ، یک دستگاه توافقی باشد. در این صورت برای هر نقطه‌ای مانند M' از دایره، تقسیم $(M'.ABCD)$ توافقی است. چهارضلعی $ABCD$ را چهارضلعی توافقی یا همساز می‌نامند. در این چهارضلعی جفت نقطه‌های $(A$ و $B)$ و $(C$ و $D)$ را نقطه‌های دوه‌دو مزدوج می‌نامند.

۸.۴.۱. رسم شکلها



۱۰۲. بگیریم قوسی از یک دایره S باشد، و l خطی نامتقاطع با آن (شکل). با استفاده از یک ستاره تنها نقطه‌های تقاطع l و S را پیدا کنید.

۹.۴.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۳. می‌دانیم که یک چهارضلعی که رأس‌هایش وسط‌های ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع باشد، یک متوازی‌الاضلاع است. از به کار بردن تبدیل قطب و قطبی برای این قضیه چه گزاره‌ای می‌توانیم به دست آوریم.

۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۰۴. الف. بگیریم $ABCD$ یک چهارضلعی محاط در دایره S باشد. نشان دهید که عمود رسم شده از مرکز S بر خط واصل بین نقطه‌های برخورد ضلع‌های مقابل این چهارضلعی از نقطه برخورد قطرهایش می‌گذرد.

ب. حکم بالا را با این فرض که چهارضلعی $ABCD$ محیط بر S باشد، ثابت کنید.

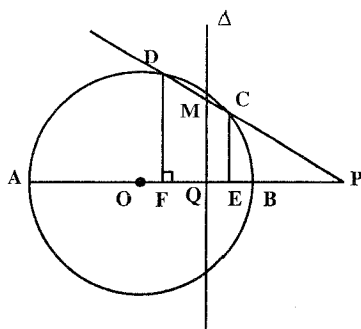
۵.۱. قطب و قطبی در دایره

۱.۵.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۰۵. نقطه A به فاصله $۲R$ از مرکز دایره‌ای به شعاع R قرار دارد. قطبی A نسبت به این دایره چیست؟

۱۰۶. ثابت کنید قطبی نقطه P نسبت به یک دایره به مرکز O ، محور اصلی این دایره و دایره به قطر OP است.

۱۰۷. در صفحه دایره (O) نقطه P روی قطر AOB و Δ قطبی آن نسبت به دایره که AB را در Q قطع می‌کند، داده شده است. از نقطه P قاطع PCD را رسم می‌کنیم. اگر E و F تصویرهای C و D روی AB باشند، ثابت کنید خطهای CE و DF ، قطبیهای نقطه‌های E و F نسبت به دایره به قطر PQ می‌باشند.



۱۰۸. قطبی نقطه P نسبت به دایره (O) در تجانس به مرکز P و با نسبت ۲ متناظر است با محور اصلی دایره (O) و نقطه P .

۱۰۹. ثابت کنید قطب خطی که از دو نقطه مزدوج می‌گذرد، مرکز ارتفاعی مثلثی است که این دو نقطه مفروض و مرکز دایره رأسهای آن هستند.

۱۱۰. نشان دهید اگر دایره (L) با دو دایره مفروض (A) و (B) متعامد باشد، محورهای اصلی (L) و (A) ، و (L) و (B) یکدیگر را در قطب خط AB نسبت به (L) قطع می‌کنند و نقطه‌های برخوردشان با خط AB قطبهای محور اصلی (A) و (B) نسبت به این دو دایره هستند.

۲.۵.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۱. نقطه‌ها همخطند

۱۱۱. دایره (O) و نقطه‌های A ، B و C بر محیط آن مفروضند. نقطه‌های A' ، B' و C' را بترتیب وسطهای کمانهای $\widehat{BC}$ ، $\widehat{AC}$ و $\widehat{AB}$ انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید مماسهای بر دایره در نقطه‌های (A, A') ، (B, B') و (C, C') در سه نقطه واقع بر یک استقامت، متقاطعونند.

۱۱۲. به وسیله تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره‌ای که در مسأله زیر آمده است، از این مسأله چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

گیریم سه وتر AA_1 ، BB_1 و CC_1 از یک دایره S در یک نقطه O هم‌رس باشند و X نقطه‌ای دلخواه از S باشد، نشان دهید که P ، Q و R ، نقطه‌های برخورد خطهای XA_1 ، XB_1 و XC_1 با ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC بر خطی گذرنده بر نقطه O واقع است.

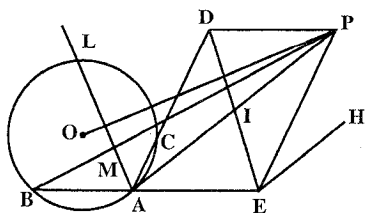
۳.۵.۱. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۵.۱. خطها هم‌رسند

۱۱۳. خطهای قطبی یک نقطه نسبت به دایره‌های یک دسته دایره هم‌محور، هم‌رسند.

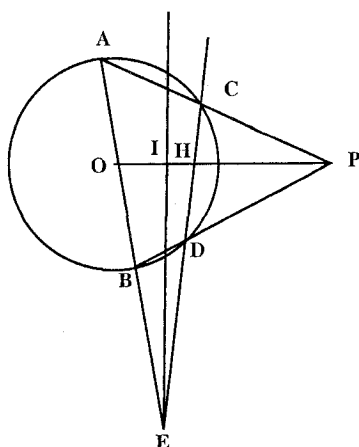
۲.۳.۵.۱. دو خط بر هم عمودند

۱۱۴. از نقطه ثابت P واقع در خارج دایره مفروض (O) مماس PA و قاطع PCB ، بر آن دایره رسم نموده و از P موازی AB و AC رسم می‌کنیم تا بترتیب امتدادهای AC و AB را در D و E قطع نماید. ثابت کنید وقتی قاطع PCB تغییر می‌نماید، ED بر OP عمود است.



۱.۳.۵.۳. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۱۱۵. دایرة (O) و نقطه P خارج آن داده شده‌اند. از P به دو سر قطر متغیر AB وصل کرده، PA و PB را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های دیگر C و D قطع نماید. ثابت کنید خط CD از نقطه ثابتی می‌گذرد.



۱۱۶. از نقطه M دو قاطع MAA' و MBB' را نسبت به دایرة (O) رسم می‌کنیم. اگر AB از نقطه ثابت P بگذرد، ثابت کنید A'B' نیز از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۱۱۷. دایرة (O) و دو نقطه ثابت A و B بر آن را در نظر می‌گیریم و همچنین نقطه‌های C و D را مجدداً بر آن دایره انتخاب می‌کنیم. اگر AC و DB در نقطه M و AD و BC نیز در نقطه N متقاطع باشند، ثابت کنید وقتی C و D بر دایره تغییر می‌نمایند، خط MN از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۱۱۸. دو نقطه ثابت A و B و دایره‌ای داده شده است. بر A خطی می‌گذرانیم تا دایره را در M و N قطع کند. BM و BN بار دیگر دایره را در M' و N' تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که M'N' بر نقطه ثابتی می‌گذرد.

۱۱۹. دایرة (O) به شعاع R و خط xy که دایره را قطع نمی‌کند، داده شده است. از نقطه غیر مشخص A واقع بر xy دو مماس AB و AC را بر این دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید خط BC قطر عمود بر xy را در نقطه ثابتی قطع می‌کند.

۱۲۰. دو دایره متقاطع داریم که یک دایره متغیر بر آنها مماس است. نشان دهید که خط قطبی یک نقطه مشترک دو دایره متقاطع نسبت به دایره متغیر از یک نقطه ثابت می‌گذرد (فرض می‌کنیم که دایره متغیر به یک شیوه بر دو دایره متقاطع مماس باشد، یعنی هر دو مماس داخلی هستند یا خارجی). نشان دهید اگر دو دایره مفروض مماس باشند، این قضیه برای نقطه تماس آن دو دایره نیز صادق است.

۱.۳.۵.۴. خط نیمساز است

۱۲۱. در دایره (O) وسطهای دو وتر AB و CD را M و N می‌نامیم. اگر AB یکی از نیمسازهای زاویه $\hat{C}MD$ باشد، ثابت کنید CD یکی از نیمسازهای زاویه $\hat{A}NB$ است.

۱.۳.۵.۵. خط مماس بر دایره است

۱۲۲. تصویر نقطه M واقع بر دایره مفروض (O) روی دو قطر عمود برهم u و v، به ترتیب، نقطه‌های A و B هستند. قطب خط AB نسبت به دایره (O) را بر u و v تصویر می‌کنیم. نشان دهید خطی که از این دو تصویر می‌گذرد، بر دایره مماس است.

۱.۴.۵.۱. زاویه

۱.۴.۵.۱. اندازه زاویه

۱۲۳. ثابت کنید که یکی از زاویه‌های بین قطبهای دو نقطه A و B نسبت به یک دایره، با زاویه $\hat{A}OB$ برابر است.

۱.۴.۵.۲. رابطه بین زاویه‌ها

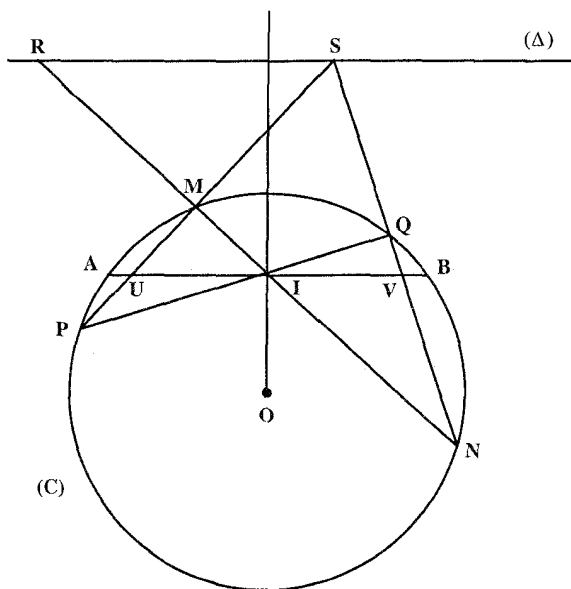
۱۲۴. قضیه حاصل از کاربرد قطب و قطبی را برای قضیه زیر بیان کنید :
زاویه‌های محاط در یک دایره و متقابل به یک کمان، با هم برابرند.

۱.۵.۵.۱. پاره خط

۱.۵.۵.۱. رابطه بین پاره خطها

۱۲۵. دایره به مرکز O و نقطه I وسط وتر AB از آن داده شده است. بر نقطه I دو وتر اختیاری

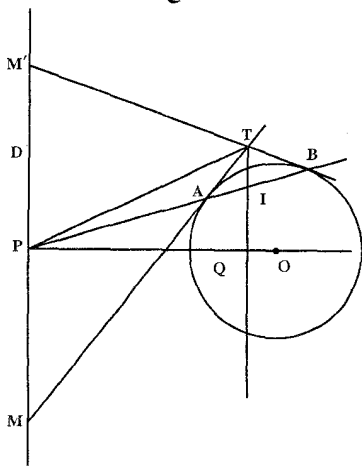
MN و PQ را می‌گذرانیم. خطهای MP و NQ خط AB را در U و V قطع می‌کنند. ثابت کنید I وسط U.V است.

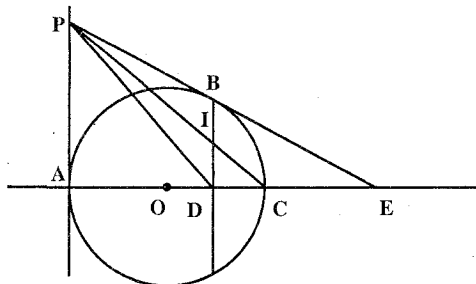


۱۲۶. دایره‌ای به قطر AOB داده شده است. از نقطه T واقع بر مماس در نقطه A قاطع TCD را رسم می‌کنیم. خط‌های BC و BD خط OT را در M و M' قطع می‌کنند. ثابت کنید که نقطه O وسط MM' است.

۱۲۷. دایره (O) و نقطه P واقع در خارج آن داده شده‌اند. از نقطه P قاطع دایره APB بر

دایره و خط D عمود بر PO رسم می‌نماییم. ثابت کنید مماسهای بر دایره در نقطه‌های A و B ، خط D را در دو نقطه M و M' که نسبت به P قرینه‌اند، قطع می‌کنند.





۱۲۸. دایره (O) و نقطه P واقع در خارج آن داده شده اند. از P مماسهای PA و PB را بر دایره رسم نموده و قطر AOC را رسم می کنیم تا امتداد مماس PB را در E قطع نماید. از B خطی موازی مماس

PA رسم می کنیم. ثابت کنید PC از وسط BD می گذرد.

۱۲۹. قطبهای مرکز تجانس دو دایره را نسبت به این دو دایره پیدا می‌کنیم. ثابت کنید که این دو قطبی از محور اصلی به یک فاصله‌اند.

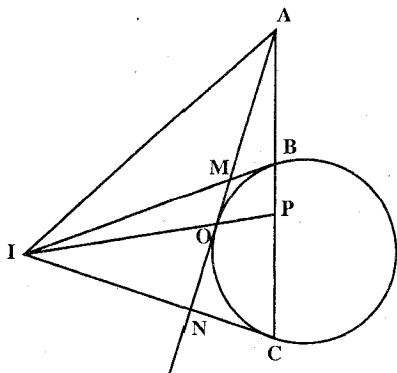
۱.۵.۶. رابطه‌های متری

۱۳۰. ثابت کنید که اگر فاصله یک نقطه A از O ، مرکز دایره S به شعاع a ، برابر d باشد، فاصله O از قطبی نقطه A نسبت به S ، یعنی از خط a ، مساوی $\frac{1}{d}$ خواهد بود.

۱۳۱. ثابت کنید که نسبت فاصله‌های دو نقطه از مرکز دایره‌ای، مساوی است با نسبت فاصله‌های هر نقطه از قطبی نقطه دیگر.

۱۳۲. نقطه‌های ثابت A و O داده شده‌اند. از نقطه (O) دایره دلخواهی مماس بر AO رسم می‌نماییم و از نقطه A قاطع غیرمشخص ABC را بر آن دایره رسم می‌کنیم. مماسهای بر دایره در نقطه‌های B و C یکدیگر را در I و OA را بترتیب در M و N قطع می‌نماید.

ثابت کنید $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ مقداری است ثابت.



۷.۵.۱. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند

۱۳۳. دایرة (S) به مرکز O داده شده است. چهارضلعی ABCD را محاط در این دایره رسم می کنیم. ثابت کنید مثلثی که رأسهای آن نقطه برخورد قطره های این چهارضلعی و نقطه های برخورد ضلعهای روبه روی آن است، قطبی متقابل خودش نسبت به دایرة (S) می باشد.

۸.۵.۱. رسم شکلهای

۱۳۴. قطب یک خط نسبت به یک دایره را پیدا کنید.
 ۱۳۵. قطبی P را نسبت به دایرة O رسم کنید.
 ۱۳۶. از دو نقطه واقع بر یک قطر دایره دو وتر متساوی رسم کنید که یکدیگر را روی دایره قطع کنند.

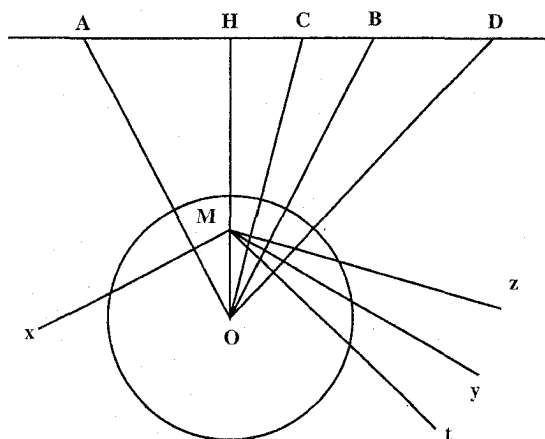
۹.۵.۱. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۱۳۷. دایرة ثابت (O) و نقطه ثابت A داده شده است. ثابت کنید که دایره هایی که بر نقطه A بگذرند و بر دایرة (O) عمود باشند، بر نقطه ثابتی می گذرند.
 ۱۳۸. سه نقطه A، B و C را در نظر می گیریم. اگر هر دایره که از A بگذرد و دو نقطه B و C نسبت به آن نقطه های مزدوج باشند، این دایره از نقطه ثابت دیگری می گذرد.
 ۱۳۹. همه دایره هایی که قطبی نقطه مفروض A نسبت به آنها یک خط BC باشد، یک دستگاه از دایره ها تشکیل می دهند.
 ۱۴۰. اگر S یک مرکز تشابه دو دایرة متعامد متقاطع در نقطه های A و C باشد، و اگر B و D نقطه های برخورد خط الممرکزین دایره ها با خطهای قطبی S نسبت به این دو دایره باشند، ثابت کنید که ABCD یک مربع است.
 ۱۴۱. برای اینکه دو نقطه A و B نسبت به دایرة (O) مزدوج باشند، لازم و کافی است که دایرة به قطر AB بر دایرة (O) عمود باشد.

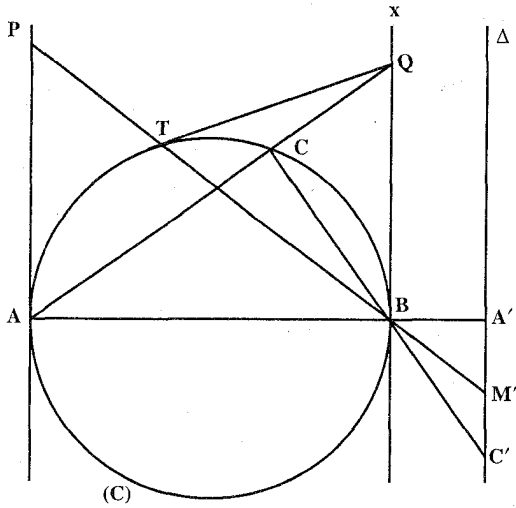
۱۴۲. شکل قطبی معکوس دایره α نسبت به دایره ω یک محور تقارن دارد که همان خط‌المركزین دو دایره است. آیا این شکل می‌تواند یک محور تقارن دیگر داشته باشد؟
۱۴۳. دو دایره (O) و (O') و خط Δ عمود بر خط‌المركزین آنها مفروضند. قطبهای نقطه P واقع بر Δ نسبت به دو دایره، یکدیگر را در Q قطع می‌کنند. مطلوب است مکان هندسی Q وقتی P بر Δ تغییر می‌نماید.

۱۰.۵.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۴۴. ۱. اگر چهار نقطه A, B, C و D تشکیل یک تقسیم توافقی بدهند، ثابت کنید قطبهای آنها نسبت به دایره مفروض (O) تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.
۲. قطبهای شعاعهای یک دستگاه توافقی نسبت به دایره مفروض (O) تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند.



۱۴۵. قطر AB از دایره C ، وتر AD از این دایره مفروضند. روی AC نقطه متغیر M را در نظر می‌گیریم و محل برخورد BA ، BC و BM را با Δ نقطه‌های A' ، C' و M' می‌نامیم (Δ عمود بر AB است).
۱. مکان M را طوری روی AC بیابید که M' وسط $A'C'$ باشد.
۲. نشان دهید هرگاه M سمت بالای مکان فوق را طی کند و P قطب AC نسبت به دایره C باشد، نقطه‌های P ، M و B روی یک خط خواهند بود.



۱۴۶. نقطه ثابت A و قطر متغیر MN از دایره (O) را در نظر می گیریم. AM و AN دایره را در M' و N' قطع می کنند. خطهای MN' و NM' یکدیگر را در E، و MN و M'N' یکدیگر را در F تلاقی می کنند.
۱. مکان نقطه E را تعیین کنید.

۲. ثابت کنید دایره AMN از نقطه ثابتی می گذرد.

۳. ثابت کنید خط M'N' از نقطه ثابتی می گذرد.

۱۴۷. دایره ثابت (O) و نقطه ثابت A بر روی آن دایره داده شده است. BC وترى از این دایره است که همواره به موازات خود تغییر مکان می دهد.

۱. ثابت کنید که قطبی نقطه

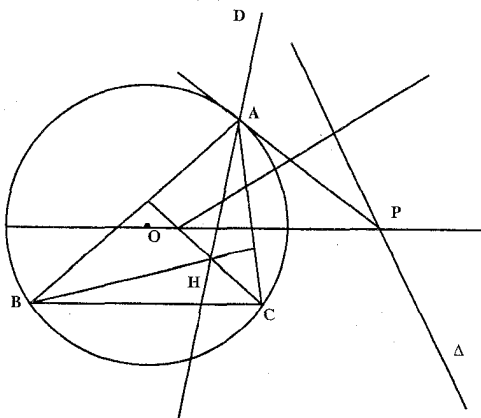
برخورد ارتفاعهای مثلث ABC

همواره بر نقطه ثابتی می گذرد.

۲. مکان هندسی این نقطه ثابت

را وقتی که A روی دایره تغییر

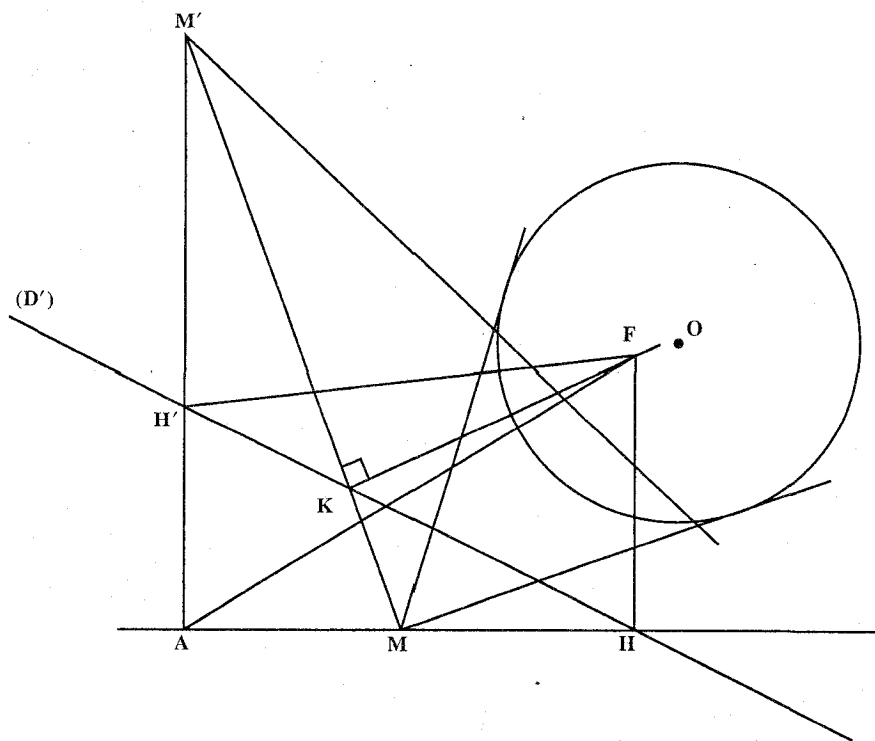
مکان دهد، به دست آورید.



۱۴۸. دو خط D و D' در نقطه A بر هم عمودند و دایره ثابت O در صفحه آنها داده شده است. نقطه متغیر M را بر D قطبی M نسبت به دایره (O) خط D' را در M' قطع می کند.

۱. نشان دهید که نقطه ثابت چون F یافت می شود، به طریقی که قطعه خط MM' تحت زاویه قائمه دیده شود.

۲. پوش MM' را پیدا کنید.



۱۴۹. در صفحه دایره (O) نقطه ثابت D و دایره متغیر (C) که از دو نقطه O و D می گذرد، مفروضند. دایره (C) ، دایره (O) را در نقطه های A و B قطع می کند. از A و B دو مماس بر دایره (O) رسم می کنیم که یکدیگر را در M قطع می کنند.

۱. مکان نقطه M را معین کنید.

۲. ثابت کنید AB حول نقطه ثابتی حرکت می کند.

۱۵۰. در یک صفحه نقطه ثابت O و (C) دایرة متغیر به مرکز I و به شعاع $\frac{1}{4}OI$ مفروض است،

چنانچه (Δ) قطبی نقطه O نسبت به دایرة (C) و J فصل مشترک خط (Δ) با OI باشد :

۱. مطلوب است محاسبه $\frac{OJ}{OI}$.

۲. فرض می کنیم که (Δ) از نقطه ثابت A بگذرد :

(a) ثابت کنید (C) همواره بر یک دایرة ثابت عمود است.

(b) مطلوب است مکان نقطه I.

(c) مطلوب است مکان نقطه های مشترک (Δ) و (C).

۳. فرض می کنیم که (C) از نقطه ثابت B بگذرد :

(a) مطلوب است مکان نقطه های I و J.

(b) محاسبه پوش خط (Δ) .

۴. رسم دایرة (C) با معلوم بودن یکی از نقطه های آن B و یک نقطه A از (Δ) . بحث

در تعداد جوابها در بحث موضعیت نقطه A در صفحه : نقطه های O و B ثابتند.

۱۵۱. شعاعهای دو دایرة α و β تقریباً با هم برابرند و مرکزهای آنها بسیار نزدیک به هم

می باشند و α داخل β واقع است. نقطه های $A_1, A_3, A_5, \dots$ را روی α و

نقطه های $B_1, B_3, B_5, \dots$ را روی β چنان تعیین کنید که خطهای $B_1B_3, B_3B_5, \dots$

در α مماس باشند. خطهای $A_1A_3, A_3A_5, \dots$ را به ترتیب

با $b_1, b_3, b_5, \dots$ و نقطه های برخورد مماسهای بر β در $B_1, B_3, \dots$ و در $B_1, B_3, \dots$ را

بترتیب با $C_1, C_3, \dots$ نشان می دهیم. ثابت کنید که :

اولاً. خطهای $b_1, b_3, \dots$ بر شکل قطبی معکوس β نسبت به α مماسند.

ثانیاً. نقطه های $C_1, C_3, \dots$ بر شکل قطبی معکوس α نسبت به β واقعند.

۱۵۲. ثابت کنید در هر دایره :

الف. زاویه محاطی روبه رو به قطر، برابر 90° است.

ب. زاویه های محاطی روبه رو به یک کمان برابرند.

۱۵۳. نشان دهید که :

الف. دو قطب وتر مشترک دو دایرة متعامد نسبت به این دایره ها بر مرکزهای این دو دایره منطبقند.

ب. اگر AB و CD دو پاره خط همساز باشند، مزدوج همساز نقطه وسط AB نسبت به

C و D بر مزدوج همساز نقطه وسط CD نسبت به A و B منطبق است.

۱۵۴. الف. TP و TQ در دو انتهای وتر PQ از یک دایره بر آن دایره مماسند. خطی که در نقطه دلخواه R بر دایره مماس است، PQ را در S قطع می‌کند؛ ثابت کنید که TR خط قطبی S است.

ب. دو نقطه ثابت R و S مفروضند؛ دایره دلخواه (O) را طوری رسم می‌کنیم که در R بر RS مماس باشد، و از S قاطع دلخواهی رسم می‌کنیم تا (O) را در P و Q قطع کند. اگر مماسهایی که در P و Q بر (O) رسم می‌شوند، خط RS را در U و V قطع کنند، نشان دهید که $\frac{1}{RU} + \frac{1}{RV}$ مقداری ثابت، مستقل از دایره (O) و قاطع RPQ است.

۱. ۶. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکل‌های دیگر

۱. ۶. ۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۵۵. ثابت کنید خطهای هادی هر بیضی، قطبیهای کانونهای آن بیضی نسبت به دایره اصلی آن بیضی می‌باشند.

۱. ۶. ۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱. ۶. ۲. ۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۱۵۶. کره (O) و نقطه A داده شده‌اند. ثابت کنید قطبیهای تمام صفحه‌هایی که بر نقطه A می‌گذرند، روی یک صفحه قرار دارند.

۱. ۶. ۳. خطها یا صفحه‌های: هم‌مس، موازی، ...

۱. ۶. ۳. ۱. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند

۱۵۷. صفحه‌های قطبی یک نقطه P نسبت به کره‌های یک دستگاه کره از یک خط می‌گذرند.

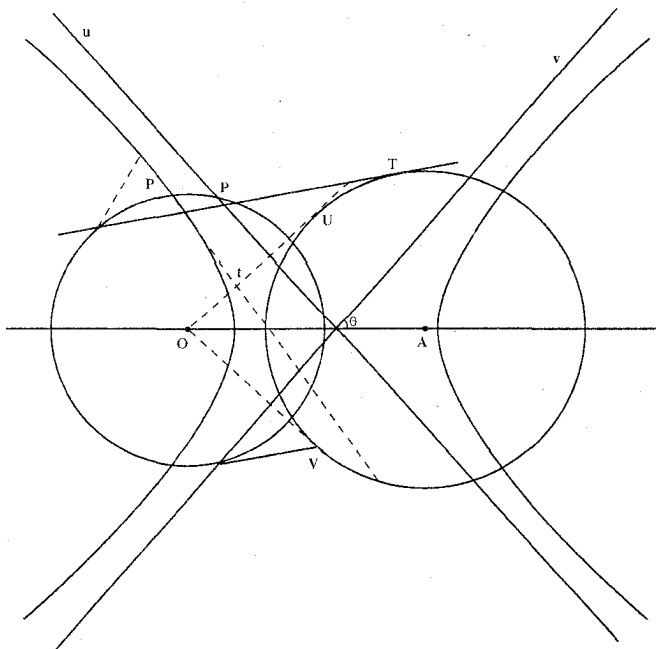
۴.۶.۱. زاویه

۱.۴.۶.۱. اندازه زاویه

۱۵۸. هر یک از مجانبهای هذلولی با خط OA (شکل) زاویه θ می سازد. ثابت کنید که :

$$\cos \theta = \frac{1}{\varepsilon}$$

از این رابطه مقدار خروج از مرکز هذلولی متساوی القطرین را به دست آورید.



۵.۶.۱. پاره خط

۱.۵.۶.۱. اندازه پاره خط

۱۵۹. نقطه A و خط Δ نسبت به بیضی، قطب و قطبی نسبت به هم می باشند و می دانیم که نقطه A بر روی محور بزرگتر بیضی قرار دارد. نقطه ای مانند M از بیضی در دست است. با تعیین کانونهای بیضی، فاصله کانونی آن را بیابید.

۶.۶.۱. رابطه‌های مترى

۱۶۰. نقطه P بر بیضی به کانونهای O و O_1 تغییر مکان می‌دهد. ثابت کنید که مجموع شعاعهای حامل آن، یعنی $OP + O_1P$ مقدار ثابتی است.

۷.۶.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۱۶۱. در چه صورتی، یک منحنی مقطع مخروطی، مبدل قطبی معکوس یک دایره (α) است.

۸.۶.۱. رسم شکلها

۱۶۲. نقطه A و صفحه P داده شده‌اند. کره‌ای به شعاع R چنان رسم کنید که نقطه A و صفحه P نسبت به آن قطب و قطبی باشند.

۹.۶.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۶۳. ثابت کنید که منحنی مقطع مخروطی؛ بیضی، سهمی یا هذلولی است، بر حسب آن که خط بینهایت در خارج آن واقع باشد، بر آن مماس باشد، یا آن را قطع کند.

۱۶۴. ثابت کنید خط‌های سهمی، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از آن نقطه‌ها دو مماس عمود بر هم، می‌توان بر آن سهمی رسم کرد.

۱۰.۶.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۶۵. بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ داده شده است.
الف. قطبی کانون F نسبت به دایره اصلی بیضی را تعیین کنید.
ب. قطبی کانون F نسبت به دایره فرعی بیضی را پیدا کنید.
پ. وضع این دو قطبی نسبت به هم را مشخص کنید.

بخش ۲

• انعکاس

۱.۲. تعریف و قضیه

۲.۲. انعکاس در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۲. جای نقطه

۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی اند

۳.۲.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۲.۲. خطها هم‌رسند

۴.۲.۲. زاویه

۱.۴.۲.۲. اندازه زاویه

۵.۲.۲. پاره خط

۱.۵.۲.۲. اندازه پاره خط

۶.۲.۲. رابطه‌های متري

۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها تبديل يافته يکديگرند

۸.۲.۲. رسم شکلها

۹.۲.۲. ساير مسأله‌های مربوط به اين قسمت

۱۰.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۳.۲. انعکاس در مثلث

۱.۳.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

- ۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
 ۱.۲.۳.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند
 ۳.۳.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...
 ۱.۳.۳.۲. خطها هم‌رسند
 ۴.۳.۲. زاویه
 ۱.۴.۳.۲. اندازه زاویه
 ۵.۳.۲. پاره خط
 ۱.۵.۳.۲. رابطه بین پاره خطها
 ۶.۳.۲. رابطه‌های متري
 ۷.۳.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند
 ۸.۳.۲. رسم شکلها
 ۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
 ۱۰.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی
- ۴.۲. انعکاس در چندضلعی
- ۱.۴.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس
 ۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
 ۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها هم‌خطند
 ۳.۴.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...
 ۱.۳.۴.۲. خطها موازی‌اند
 ۴.۴.۲. زاویه
 ۱.۴.۴.۲. اندازه زاویه
 ۵.۴.۲. پاره خط
 ۱.۵.۴.۲. رابطه بین پاره خطها
 ۶.۴.۲. رابطه‌های متري
 ۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند
 ۸.۴.۲. رسم شکلها
 ۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
 ۱۰.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۵.۲. انعکاس در دایره

- ۱.۵.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس
- ۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
- ۱.۲.۵.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند
- ۲.۲.۵.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند
- ۳.۲.۵.۲. نقطه‌ها غیرمتناظرند
- ۳.۵.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...
- ۱.۳.۵.۲. خطها بر هم عمودند
- ۴.۵.۲. زاویه
- ۱.۴.۵.۲. اندازه زاویه
- ۵.۵.۲. پاره خط
- ۱.۵.۵.۲. رابطه بین پاره خطها
- ۶.۵.۲. رابطه‌های متری
- ۷.۵.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند
- ۸.۵.۲. رسم شکلها
- ۹.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
- ۱۰.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

۶.۲. انعکاس در مقطعهای مخروطی

بخش ۲. انعکاس

۱.۲. تعریف و قضیه

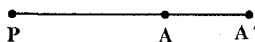
انعکاس

تعریف. هرگاه نقطه ثابتی مانند P و عددی جبری مانند a (مخالف با صفر) داشته باشیم، منعکس هر نقطه مانند A نقطه‌ای است مانند A' که با A و P بر یک استقامت باشد و حاصلضرب اندازه‌های جبری فاصله‌های P از A و A' برابر a باشد، یعنی داشته باشیم:

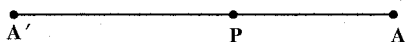
$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = a$$

P را قطب یا مرکز انعکاس و a را قوت انعکاس یا ثابت انعکاس می‌نامند.

اگر قوت انعکاس مثبت باشد، دو نقطه منعکس در یک طرف قطب انعکاسند و می‌گوییم انعکاس مثبت است و A' منعکس مثبت A است (شکل الف) و اگر قوت انعکاس منفی باشد، دو نقطه منعکس در دو طرف قطب انعکاسند و می‌گوییم انعکاس منفی است و A' منعکس منفی A است (شکل ب).

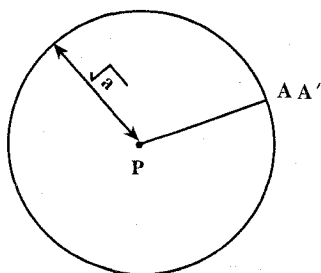


(الف)



(ب)

به طوری که از تعریف انعکاس نتیجه می‌شود، خاصیت انعکاس متقابل است، یعنی اگر A' منعکس A با قوت a باشد، A نیز منعکس A' با همان قوت است.

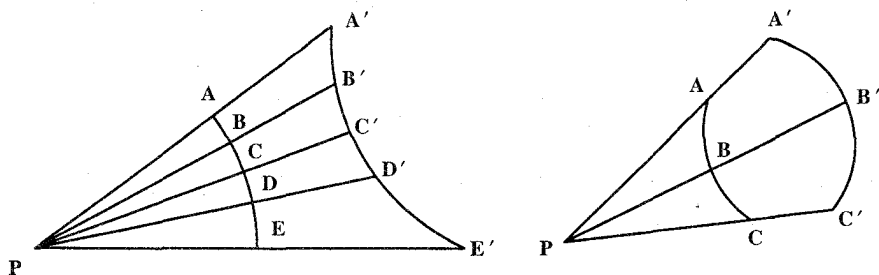


در انعکاس مثبت، هرگاه فاصله نقطه‌ای از قطب انعکاس مساوی جذر قوت انعکاس باشد، منعکس نقطه بر خود آن منطبق است. پس: در انعکاس مثبت، مکان هندسی نقطه‌هایی که منعکسشان بر خودش منطبق است، محیط دایره‌ای است به مرکز قطب انعکاس و به شعاع جذر قوت انعکاس. این دایره را دایره انعکاس و شعاع آن را شعاع انعکاس می‌نامند.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = a > 0$$

در انعکاس منفی، هیچ نقطه‌ای نمی‌تواند بر منعکس خود منطبق باشد.

تعریف. منعکس یک شکل نسبت به یک قطب و با یک قوت معین، شکلی است که هر نقطه‌اش منعکس یکی از نقطه‌های آن شکل باشد. به عبارت دیگر، منعکس هر شکل نسبت به



یک قطب و با یک قوت انعکاس، مکان هندسی منعکسهای نقطه‌های آن شکل است نسبت به همان قطب و با همان قوت انعکاس.

نتیجه ۱. هرگاه دو منحنی متقاطع باشند، منعکسهایشان هم متقاطعند و دو نقطه تقاطع منعکس یکدیگرند (چرا؟).

نتیجه ۲. هرگاه دو منحنی بر هم مماس باشند، منعکسهایشان نیز بر هم مماسند و دو نقطه تماس منعکس یکدیگرند (چرا؟).

۱۶۶. قضیه. چهار نقطه دو به دو منعکس، بر روی محیط یک دایره قرار دارند.

۱۶۷. قضیه. فاصله بین منعکسهای دو نقطه مساوی است با حاصلضرب قدرمطلق قوت انعکاس در فاصله بین آن دو نقطه، تقسیم بر حاصلضرب فاصله‌های قطب انعکاس از همان دو نقطه.

۱۶۸. قضیه. منعکسهای یک شکل، نسبت به یک قطب و با قوتهای مختلف مجانسهای یکدیگرند. مرکز تجانس آنها قطب انعکاس و نسبت تجانس آنها مساوی است با خارج قسمت قوتهای انعکاس.

۱۶۹. قضیه. مماسهای بر دو منحنی منعکس، در دو نقطه منعکس، با خط واصل بین آن دو نقطه، زاویه‌های متساوی می‌سازند.

چند تعریف. اگر دو خم یک نقطه مشترک، مانند P داشته باشند، زاویه بین مماسهایی که در P بر دو خم رسم می‌شوند، زاویه برخورد دو خم خوانده می‌شود.

زاویه برخورد یک خم و یک خط راست، زاویه بین خط راست و مماسی است که نقطه برخورد بر خم رسم می‌شود.

به عنوان مثال زاویه برخورد یک خط راست و یک دایره تنها و تنها به شرطی قائمه است که آن خط از مرکز دایره بگذرد.

۱۷۰. قضیه. زاویه بین دو منحنی، مساوی است با زاویه بین منعکسهای آنها. یا به عبارت دیگر، در انعکاس، زاویه ها تغییر نمی کنند.

۱۷۱. منعکسهای خط و دایره

قضیه. منعکس خط راستی که بر قطب انعکاس بگذرد، بر خود آن منطبق است، یعنی خطی است راست.

۱۷۲. قضیه. منعکس خط راستی که بر قطب انعکاس نگذرد، دایره ای است که بر قطب انعکاس می گذرد.

مرکز این دایره بر روی عمودی است که از قطب انعکاس بر آن خط فرود آید و شعاعش نصف فاصله قطب انعکاس است از منعکس نقطه تقاطع خط با عمودی که از قطب انعکاس بر آن فرود آمده است.

۱۷۳. قضیه عکس. منعکس دایره ای که بر قطب انعکاس بگذرد، خطی است مستقیم عمود بر قطر گذرنده بر مرکز انعکاس (این خط بر منعکس انتهای قطر مذکور می گذرد).

۱۷۴. قضیه. منعکس دایره ای که بر قطب انعکاس نگذرد، دایره است.

۱۷۵. قضیه. یک خط و یک دایره، به هر وضع که در صفحه قرار داشته باشند، منعکس یکدیگرند.

۱۷۶. قضیه. دو دایره، به هر وضع که در صفحه قرار داشته باشند، منعکس یکدیگرند.

۱۷۷. قضیه. قوت انعکاس دو دایره نسبت به یکدیگر، مساوی است با جذر حاصلضرب قوتهای مرکز تجانس آن دو دایره نسبت به آنها.

۱۷۸. مرکزهای دو دایره منعکس، مجانس یکدیگرند و منعکس یکدیگر نیستند. منعکس مرکز دایره از قضیه زیر نتیجه می شود:

قضیه. منعکس مرکز دایره ای که بر قطب انعکاس نگذرد، مزدوج توافقی قطب انعکاس است نسبت به دو انتهای قطری از منعکس آن دایره که بر قطب انعکاس مرور کند.

۱۷۹. جفت نقطه های جداساز. نخست به قضیه زیر توجه کنید:

قضیه. هرگاه چهار نقطه A, B, C و D نه بر یک خط و نه بر یک دایره واقع باشند، دو دایره بدون نقطه مشترک وجود خواهد داشت که یکی از آنها بر A و C و دیگری بر B و D بگذرد.

۱۸۰. قضیه. بین فاصله های هر چهار نقطه A, B, C و D از یکدیگر رابطه زیر برقرار است:

$$AB \times CD + BC \times AD \geq AC \times BD$$

تساوی وقتی برقرار است که $AC \parallel BD$ باشد.

۱۸۱. قضیه. برای آن که نسبت‌های ناهمساز چهار نقطه جدا از هم در رابطه

$$(ADBC) + (ABDC) = 1$$

صدق کند لازم و کافی است که $AC \parallel BD$ باشد.

۱۸۲. انعکاس، نسبت ناهمساز چهار نقطه را محفوظ می‌دارد یعنی، هرگاه A', B', C' و D' بترتیب، منعکسهای نقطه‌های A, B, C و D باشند، داریم:

$$(A'B'C'D') = (ABCD)$$

۱۸۳. قضیه. هرگاه A', B', C' و D' بترتیب منعکسهای نقطه‌های A, B, C و D باشند و اگر داشته باشیم $AC \parallel BD$ ، خواهیم داشت:

$$A'C' \parallel B'D'$$

۱۸۴. قضیه بطلمیوس و بسط آن. در هر چهارضلعی مجموع حاصلضربهای دو ضلع روبه‌روی هم، بسته به محاطی نبودن یا بودن چهارضلعی، بزرگتر یا برابر حاصلضرب قطر‌هاست.

۱۸۵. قضیه. اگر دایره‌ای بر دو ضلع یک مثلث و بر دایره محیطی آن مماس داخلی (یا خارجی) باشد، خطی که از نقطه‌های تماس آن با ضلعها می‌گذرد، از مرکز دایره محاطی داخلی (یا دایره محاطی خارجی متناظر) نیز می‌گذرد.

۱۸۶. قضیه. اگر دو دایره به زاویه θ با یکدیگر برخورد کرده باشند، منعکسهای آنها نیز به زاویه θ با یکدیگر برخورد می‌کنند.

اگر دو دایره در نقطه برخوردشان با یکدیگر زاویه قائمه بسازند، یعنی مماسهای بر دو دایره در نقطه برخورد آنها بر هم عمود باشند، می‌گوییم که آن دو دایره بر هم عمودند. از این‌رو حالت ویژه قضیه بالا به صورت زیر بیان می‌شود:

منعکسهای دو دایره عمود بر هم، دو دایره عمود بر هم می‌باشند.

۱۸۷. قضیه. هر دایره که بر دو نقطه متمایز منعکس یکدیگر بگذرد، منعکس خودش می‌باشد و بر دایره انعکاس ω عمود است.

برعکس، هر دایره که بر دایره ω عمود باشد، منعکس خودش است، زیرا اگر آن دایره در T با ω برخورد داشته و A نقطه دلخواهی از آن باشد، خط OA در نقطه دیگر A' با آن برخورد می‌کند، به گونه‌ای که داریم:

$$OA \times OA' = \overline{OT}^2 = k^2$$

همچنین، هرگاه دو دایره عمود بر ω با یکدیگر برخورد داشته باشند، نقطه‌های مشترک آنها منعکس یکدیگرند، زیرا اگر A نقطه مشترک این دو دایره باشد، خط OA باید هر یک از دو دایره را در A' منعکس A تلاقی کند، پس هر دو دایره در A' مشترکند.

از آنچه گذشت می‌توانیم انعکاس را برحسب دایره‌های عمود بر هم به صورت زیر بیان کنیم :

با انتخاب دایره ω به عنوان دایره انعکاس، منعکس هر نقطه واقع بر ω خودش واقع است و منعکس هر نقطه P غیر واقع بر ω عبارت است از نقطه دیگر برخورد دو دایره که بر P می‌گذرند و بر ω عمودند.

۱۸۸. قضیه. چهار نقطه، سه به سه، چهار دایره را تعیین می‌کنند؛ اگر از این چهار دایره دو دایره متعامد باشند، آن‌گاه دو دایره دیگر نیز متعامدند.

۱۸۹. قضیه فوئرباخ. به کمک انعکاس ثابت کنید که دایره نه نقطه هر مثلث بر هر یک از دایره‌های محاطی داخلی و خارجی آن مماس است.

دسته دایره. یک دسته دایره شامل دو دایره α و β ، که آن را دسته دایره $\alpha\beta$ می‌نامیم، عبارت است از مجموعه دایره‌هایی که محور اصلی هر دو عدد از آنها همان محور اصلی دو دایره α و β باشد. بنابراین هر دسته دایره یک محور اصلی مشترک دارد و هر نقطه P متعلق به این محور اصلی نسبت به همه دایره‌های آن دسته دارای یک قوت است. هرگاه این قوت مقدار مثبت باشد، جذر آن طول مماسی را معین می‌کند که از نقطه P بر هر دایره دلخواه از دسته دایره رسم می‌شود و این مماسها عبارتند از شعاعهای دایره‌ای به مرکز P که بر همه دایره‌های آن دسته دایره عمود است. با توجه به این که نقطه P بر محور اصلی به دلخواه انتخاب شده است، پس دایره‌های بی‌شمار می‌توان رسم کرد که همه بر دایره‌های یک دسته دایره عمود می‌باشند؛ این دایره‌ها نیز یک دسته دایره تشکیل می‌دهند که اگر γ و δ دو دایره غیر مشخص از آن باشند آن را با $\gamma\delta$ مشخص می‌کنیم. دو دسته دایره $\alpha\beta$ و $\gamma\delta$ چنانند که هر یک از دایره‌های هر کدام از آنها بر همه دایره‌های دیگری عمود است و به علاوه، محور اصلی هر دسته عبارت است از خط‌المركزین دسته دیگر؛ پس این دو خط، که هر کدام خط‌المركزین یک دسته دایره و محور اصلی دسته دیگر است، بر هم عمودند. هرگاه این دو خط عمود بر هم را محورهای مختصات بگیریم، در این صورت معادله‌های دو دسته دایره عبارت خواهند بود از :

$$x^2 + y^2 - 2ax + c = 0, \quad x^2 + y^2 - 2by - c = 0$$

که در آنها c مقدار ثابت اما a و b مقدارهای متغیرند. اگر $c > 0$ باشد، دسته نخست دایره‌های بدون نقطه‌های مشترک را در بردارد، در حالی که دایره‌های دسته دیگر در دو نقطه حد به مختصات $(\pm\sqrt{c}, 0)$ مشترکند که این دو نقطه را می‌توان دو دایره به شعاع

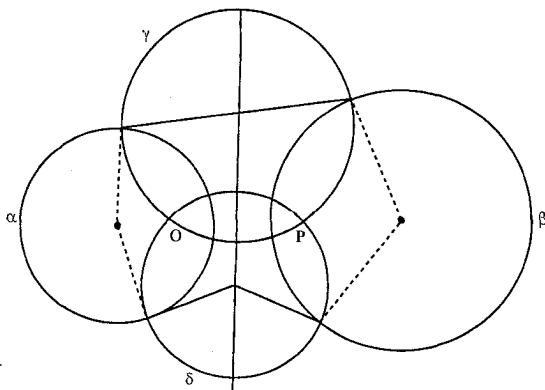
صفر متعلق به دسته نخست دانست که معادله‌های آنها عبارتند از :

$$(x - \sqrt{c})^2 + y^2 = 0, \quad (x + \sqrt{c})^2 + y^2 = 0$$

اگر $c < 0$ باشد، پس از دوران حول محورهای مختصات به زاویه 90° درجه باز هم همان وضع بالا را خواهیم داشت؛ به عبارت دیگر دایره‌های دسته نخست همه در دو نقطه حد مشترکند و دایره‌های دسته دیگر نقطه مشترک ندارند. اگر $c = 0$ باشد، دو دسته دایره متماس عمود برهم داریم، یعنی همه دایره‌های هر دسته در مبدأ مختصات بترتیب بر یکی از دو محور مماس می‌باشند.

ترتیب دایره‌های هر دسته دایره برحسب ترتیب نقطه‌های برخورد آنها با خطی که بر نقطه‌های حد می‌گذرد، مشخص می‌شود و از این راه معلوم می‌شود که مثلاً از هر سه دایره کدام دایره بین دو دایره دیگر واقع است. با توجه به عکس مطلب، می‌توان هر دسته دایره $\alpha\beta$ را به عنوان مجموعه دایره‌هایی که همه بر دو دایره γ و δ از دسته دایره $\gamma\delta$ عمودند، تعریف کرد و همچنین دسته دایره $\gamma\delta$ را مجموعه دایره‌هایی که همه بر دو دایره متمایز α و β عمود می‌باشند، تعریف نمود. به عبارت دیگر، دسته دایره $\alpha\beta$ شامل همه دایره‌های عمود بر دو دایره متمایز عمود بر α و β می‌باشد.

هر گاه دو دایره γ و δ در دو نقطه O و P متقاطع باشند، انعکاس نسبت به هر دایره به مرکز O دو خط به دست می‌دهد که بر P' منعکس نقطه P می‌گذرند. دایره‌های عمود بر این خط دسته دایره‌های هم مرکز به مرکز P' تشکیل می‌دهند و مجموعه قطرهای این دایره‌ها منعکسهای دسته دایره $\gamma\delta$ می‌باشند. هرگاه دو دایره بدون نقطه مشترک در نظر گیریم، باز هم همین نتیجه را خواهیم داشت. بسادگی می‌توانیم دو دایره متقاطع γ و δ را چنان رسم کنیم که هر کدام بر دایره‌های α و β عمود باشند، یعنی دو دایره چنان رسم کنیم که مرکزهای آنها بر محور اصلی دو دایره α و β واقع باشد، مطابق شکل (الف).



۱۹۰. قضیه. به وسیله انعکاس می توان دو دایره غیر مشخص غیر متقاطع را به دو دایره هم مرکز تبدیل کرد.

۱۹۱. انحراف انعکاسی. زاویه بین دو دایره متقاطع در واقع انحراف آنها از یکدیگر است و چون در تبدیل انعکاسی، نیمساز زاویه به نیمساز زاویه تبدیل می شود، پس هر یک از دو دایره نیمساز دو دایره متقاطع، در واقع انحراف بین آن دو دایره را نصف می کند. برای این که این ویژگی را درباره دایره نیمساز دو دایره غیر متقاطع تعمیم دهیم، نوعی انحراف را بین آن دو دایره تصور می کنیم که دایره نیمساز آنها، آن را به تساوی بین آن دو بخش می کند. برای تحقق چنین تصویری، برای هر دو دایره α و β انحرافی به نام انحراف انعکاسی و با نماد (α, β) در نظر می گیریم به گونه ای که اگر دایره γ به دسته دایره $\alpha\beta$ تعلق داشته و β بین α و γ واقع باشد، رابطه زیر را داشته باشیم:

$$(\alpha, \beta) + (\beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) \quad (۱)$$

در انعکاسی که مرکزش یکی از نقطه های حد دسته دایره $\alpha\beta$ باشد، سه دایره مزبور به سه دایره هم مرکز به شعاعهای a, b و c تبدیل می شوند که یکی از دو رابطه $a > b > c$ یا $a < b < c$ و همچنین رابطه زیر برقرار می باشد:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

با توجه به این که لگاریتم، عمل ضرب را به عمل جمع تبدیل می کند، این رابطه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left(\log \frac{a}{b}\right) + \left(\log \frac{b}{c}\right) = \left(\log \frac{a}{c}\right)$$

از این رو، انحراف انعکاسی دو دایره α و β را به صورت زیر اختیار می کنیم:

$$(\alpha, \beta) = \left| \log \frac{a}{b} \right| \quad (۲)$$

که اگر $a > b$ باشد، داریم $(\alpha, \beta) = \log \frac{a}{b}$ و اگر $a < b$ باشد، داریم $(\alpha, \beta) = \log \frac{b}{a}$

و به این ترتیب رابطه (۱) برای سه دایره هم مرکز مزبور به وضوح محقق می باشد. علامت $\log$ که برای خواننده آشنا می باشد به معنی لگاریتم به پایه ۱۰ می باشد؛ یعنی رابطه $x = \log y$ به معنی $y = 10^x$ می باشد. پایه ۱۰ در عددنویسی از این جهت به کار رفته است که انسان ده انگشت دارد. در ریاضیات لگاریتم را با پایه e به کار می برند که e عدد متعالی است برابر با:

$$e = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2/718281828459000 \dots$$

در این صورت $x = \log_e y$ (که آن را به صورت $x = Lny$ یا به صورت $x = Lgy$ نیز می‌نویسند و آن را «لگاریتم طبیعی» y می‌نامند) به معنی آن است که :

$$y = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

همچنین لگاریتم طبیعی به صورت سری زیر مشخص می‌شود :

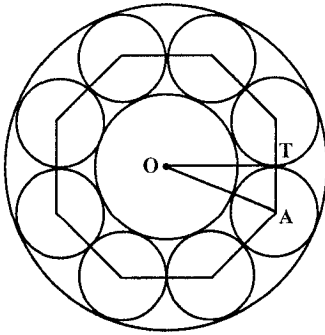
$$Lg(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

بنا به تعریف، انحراف انعکاسی دو دایره غیر مشخص غیر متقاطع عبارت است از لگاریتم طبیعی نسبت شعاعهای دو دایره هم مرکزی که دو دایره مفروض را می‌توان به آنها تبدیل کرد (در نسبت شعاعها آن را که بزرگتر است، صورت می‌گیریم).

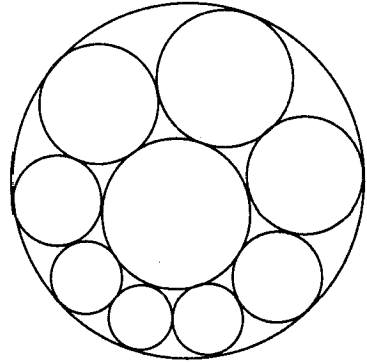
با توجه به این که دایره‌های هم مرکز مبدلهای دایره‌های متعلق به یک دسته دایره می‌باشند، یک چنین «انحراف» برای دایره‌های آن دسته دایره دارای ویژگی جمعی خواهد بود. به‌ویژه، دایره نیمساز دو دایره غیر متقاطع انحراف انعکاسی آنها را نصف می‌کند. همچنین با قبول این که دو خط متوازی حالت حدی دو دایره هم مرکز می‌باشند، مجاز خواهیم بود که انحراف انعکاسی دو دایره مماس بر هم را صفر بگیریم.

اکنون دو دایره متداخل با مرکزهای متفاوت را در نظر می‌گیریم. مطابق با شکل (الف) می‌توانیم یک سلسله دایره رسم کنیم که به‌طور متوالی بر هم مماس باشند و هر کدام از آنها بر دو دایره مفروض نیز مماس باشد. در این سلسله دایره‌ها، که تعداد آنها را n می‌گیریم، می‌توانیم هر یک از آنها را اولین دایره بگیریم که بر دومین دایره و بر آخرین دایره مماس می‌باشد. شکل حاصل به چپستان اشتینر (Porisme de Steiner) معروف است و بسادگی می‌توان ثابت کرد که انجام‌پذیر است. برای این کار کافی است که دایره‌های متداخل مفروض را به دایره‌های هم مرکز تبدیل کنیم که در این صورت سلسله دایره‌های مورد نظر به دایره‌هایی برابر با هم تبدیل می‌شوند که مرکزهای آنها رأسهای یک n ضلعی منتظم خواهند بود، مطابق با شکل (ب). اگر A مرکزی از این دایره‌های متساوی و T نقطه تماس آن با دایره متوالیش و O مرکز مشترک مبدلهای دو دایره مفروض باشد با فرض آن که شعاعهای دو دایره هم مرکز آن که بزرگتر است a و دیگری b باشد، خواهیم داشت :

$$OA = \frac{a+b}{2} \text{ و } AT = \frac{a-b}{2}$$



(ب)



(الف)

اندازه زاویه AOT برابر با $\frac{\pi}{n}$ رادیان و انحراف انعکاسی دو دایره برابر با $\delta = \text{Lg} \frac{a}{b}$ است و داریم:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{AT}{OA} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{e^{\delta} - 1}{e^{\delta} + 1}$$

بنابراین چيستان اشتينر در حالتی محقق است که انحراف انعکاسی دو دایره مفروض در رابطه زیر صدق کند:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{e^{\delta} - 1}{e^{\delta} + 1}$$

این معادله را بر حسب δ حل می کنیم:

$$e^{\delta} = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}} = \left(\frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^2 = \left(\sec \frac{\pi}{n} + \tan \frac{\pi}{n} \right)^2$$

$$\delta = 2 \text{Lg} \left(\sec \frac{\pi}{n} + \tan \frac{\pi}{n} \right)$$

اگر به ویژه $n=4$ باشد، انحراف انعکاسی دو دایره برابر می شود با: $\delta = 2 \text{Lg}(\sqrt{2} + 1)$ و در این حالت شکل نظیر شامل شش دایره است که هر کدام از آنها بر چهار دایره دیگر

مماس می باشد. این شش دایره به سه جفت دایره های «متقابل» بخش می شوند که هر دایره بر همه دایره های دیگر، مگر بر دایره متقابلش مماس است. انحراف انعکاسی دو دایره متقابل برابر با $2\text{Lg}(\sqrt{2}+1)$ است در حالی که انحراف انعکاسی هر دو دایره غیر متقابل صفر است.

هرگاه سلسله دایره های چیستان اشتینر پس از d دور شکل گیرد، در این صورت باید در رابطه های گذشته n را با $\frac{n}{d}$ جانشین سازیم.

هر دایره با مرکز و شعاعش مشخص می شود و چون در صفحه مرکز دایره با دو مختص معین می گردد، پس مجموعه همه دایره های صفحه اقلیدسی و منعکسهای آنها با معادله ای سه پارامتری مشخص می گردند که هر یک از پارامترها می تواند تغییراتی تا بینهایت داشته باشد. هرگاه چنین تعبیر کنیم که این سه تایه های نامحدود از دایره های متعلق به صفحه انعکاسی، صفحه های فضای سه بعدی را مشخص می کنند، می توانیم به هندسه نااقلیدسی مشهور گوس، بولیایی، لوباجفسکی دست یابیم که بین سالهای ۱۸۲۰ و ۱۸۳۰ هر کدام از آنان مستقلاً به کشف آن نایل آمدند. زاویه های متشکل از دو دایره متقاطع در این هندسه به زاویه های بین دو صفحه که در یک خط متقاطعند، تبدیل می شوند؛ دو دایره مماس بر هم به دو صفحه متوازی تبدیل می شوند؛ انحراف انعکاسی دو دایره غیر متقاطع عبارت می شود از فاصله بین دو صفحه غیر متقاطع که یک عمود مشترک دارند و طول آن فاصله مزبور را معین می کند.

۱۹۲. تابعهای هذلولوی. تابعهای مثلثاتی زاویه، زاویه بین دو دایره متقاطع را می شناسیم. تابعهایی از انحراف انعکاسی دو دایره غیر متقاطع تعریف شده است که به مناسبت این که هندسه نااقلیدسی گوس، بولیایی و لوباجفسکی، به هندسه هذلولوی معروف است آنها را تابعهای هذلولوی (تابعهای هیربولیک) می نامند. این تابعها عبارتند از: سینوس هیربولیک با نماد sh ، کسینوس هیربولیک با نماد ch ، تانژانت هیربولیک با نماد th و برحسب تابع نمایی e^x طبق فرمولهای زیر تعریف می شوند:

$$\text{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \text{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

از این فرمولها رابطه های مختلف به دست می آید، از جمله:

$$\text{ch}x + \text{sh}x = e^x, \quad \text{ch}x - \text{sh}x = e^{-x}$$

اکنون طبق جدول زیر تشابهات موجود بین دو نوع تابعهای مثلثاتی و هذلولوی را

ملاحظه می کنیم :

$$\operatorname{sh}^{\circ} = 0, \operatorname{ch}^{\circ} = 1$$

$$\operatorname{th}^{\circ} = 0, \operatorname{th}^{\infty} = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{th} x$$

$$\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}$$

$$\operatorname{th} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{\operatorname{sh} x}$$

$$\sin^{\circ} = 0, \cos^{\circ} = 1$$

$$\tan^{\circ} = 0, \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

با توجه به ملاحظات بالا معادله $\delta = 2 \operatorname{Lg}(\sec \frac{\pi}{n} + \tan \frac{\pi}{n})$ به صورت زیر درمی آید :

$$\operatorname{th} \frac{\delta}{2} = \sin \frac{\pi}{n} \quad \text{یا} \quad \operatorname{sh} \frac{\delta}{2} = \tan \frac{\pi}{n} \quad \text{یا} \quad \operatorname{ch} \frac{\delta}{2} = \sec \frac{\pi}{n}$$

شاید خوانندگان به اهمیت نقش ریشه NH_4 آمونیم در شیمی وقوف داشته باشند ؛ این ریشه مانند یک اتم سدیم یا یک اتم پتاسیم عمل می کند و در عین حال به اتمهای ازت و هیدروژن قابل تجزیه است. در مقام مقایسه می توان گفت که نقش تابعهای هذلولوی در ریاضیات نیز از یک چنین اهمیتی برخوردار است ؛ این تابعها مانند تابعهای مثلثاتی عمل می کنند و در عین حال بر حسب تابعهای نمایی قابل بیان می باشند وانگهی، برای خوانندگانی که با تابعهای با یک متغیر مختلط آشنایی دارند و معنی فرمولهای :

$$i \cos x = \operatorname{ch} ix, \quad i \sin x = \operatorname{sh} ix$$

را درمی یابند دیگر گفتگو از شیمی و مقایسه موردی نخواهد داشت.

از موضوع خارج نشویم و همان بحث مربوط به زاویه بین دو دایرة متقاطع و انحراف بین آنها را دنبال کنیم. دو دایره به شعاعهای a و b و به طول خط المکزین c را در نظر می گیریم. هرگاه هر یک از سه مقدار a ، b و c از مجموع دوتای دیگر کوچکتر باشد، دو دایره در دو نقطه متقاطع می باشند که هر یک از این نقطه های تقاطع با مرکزهای دو دایره مثلثی تشکیل می دهد. زاویه بین دو ضلع a و b از این مثلث همان زاویه بین دو دایره است و مقدار کسینوس آن برابر است با :

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

اگر یکی از سه مقدار a ، b و c از مجموع دوتای دیگر بزرگتر باشد، دو دایره متقاطع نیستند و مثلثی تشکیل نمی‌شود. در این حالت سعی می‌کنیم تا تعبیری هندسی برای عبارت بالا، یعنی:

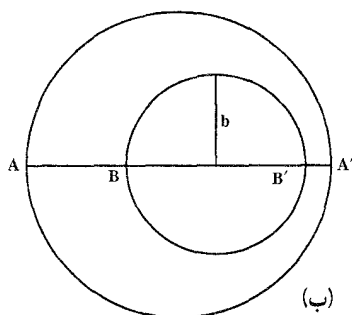
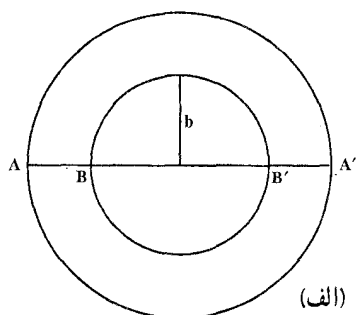
$$\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

به دست دهیم. هرگاه این دو دایره هم مرکز باشند، یعنی $c=0$ و AA' و BB' قطرهایی از دو دایره باشند که در امتداد یکدیگرند، رابطه $AB' \parallel A'B$ برقرار می‌باشد، مطابق شکل (الف). انحراف انعکاسی این دو دایره $\delta = \text{Lg} \frac{a}{b}$ است و نسبت ناهمساز چهار نقطه A ، A' ، B و B' برحسب δ عبارت می‌شود از:

$$\begin{aligned} (AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \times \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \times \overline{A'B}} = \left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} \right)^2 = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \\ &= \left(\frac{e^\delta - 1}{e^\delta + 1} \right)^2 = \frac{e^{2\delta} + 1 - 2e^\delta}{e^{2\delta} + 1 + 2e^\delta} = \frac{e^\delta + e^{-\delta} - 2}{e^\delta + e^{-\delta} + 2} \\ &= \frac{\text{ch}\delta - 1}{\text{ch}\delta + 1} \end{aligned}$$

هرگاه این دو دایره را منعکسهای دو دایره غیرمتقاطع به خط‌المركزین به طول c در نظر بگیریم و شعاعهای آنها a و b و نقطه‌های برخورد خط‌المركزین با آنها A ، A' و B و B' باشد (که داشته باشیم $AB' \parallel A'B$)، بنا به قضیه‌های قبلی نسبت ناهمساز و جداسازی محفوظ بوده و باز هم خواهیم داشت:

$$(AA'BB') = \frac{\text{ch}\delta - 1}{\text{ch}\delta + 1}$$



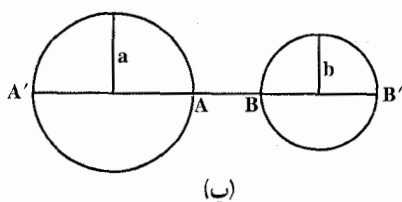
که باید آن را بر حسب a, b و c به دست آوریم. مطابق با شکل (ب)، یعنی در حالت $a - b > c$ داریم:

$$\begin{aligned}(AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \cdot \overline{A'B}} = \frac{(a+c-b)(a-c-b)}{(a+c+b)(a-c+b)} = \frac{(a-b)^2 - c^2}{(a+b)^2 - c^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - 2ab}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\end{aligned}$$

بنابراین داریم: $ch\delta = \gamma$. در حالتی که داشته باشیم $a+b < c$ ، مطابق با شکل (پ) داریم:

$$\begin{aligned}(AA'BB') &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{A'B'}}{\overline{AB'} \cdot \overline{A'B}} = \frac{(c-a-b)(c+a+b)}{(c-a+b)(c+a-b)} = \frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} \\ &= \frac{-a^2 - b^2 + c^2 - 2ab}{-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab} = \frac{-\gamma - 1}{-\gamma + 1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\end{aligned}$$

و در نتیجه داریم: $ch\delta = -\gamma$.



از آن چه گذشت رویهم اثبات قضیه زیر انجام گرفته است:

قضیه. مقدار انحراف انعکاسی δ بین دو دایره غیرمقاطع به شعاعهای a و b و به طول خط مرکزین c در رابطه زیر صدق می کند:

$$ch\delta = \left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right|$$

هرگاه دو دایره به طول خط مرکزین c چنان باشند که اولی به شعاع a بر یک چهارگوشه محیط و دومی به شعاع b در همان چهارگوشه محاط باشد، چنان که می دانیم رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{(a-c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} = \frac{1}{b^2}$$

این رابطه را می‌توان چنین نوشت :

$$|a^2 + b^2 - c^2| = b\sqrt{4a^2 + b^2}$$

و برای δ انحراف انعکاسی دو دایره خواهیم داشت :

$$\text{ch}\delta = \frac{|a^2 + b^2 - c^2|}{2ab} = \frac{\sqrt{4a^2 + b^2}}{2a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}$$

و چون داریم $\text{ch}^2\delta = 1 + \text{sh}^2\delta$ ، بنابراین در مورد دو دایرهٔ مزبور داریم :

$$\text{ch}\delta = \frac{b}{2a}$$

یادآوری. منحنی نمایش تابع $y = \text{ch}x$ به زنجیره موسوم است و در واقع شکل زنجیر یا نخ‌ای است که دو سرش را گرفته و به حالت آویزان قرار داده باشند.

۱۹۳. قضیه. ثابت کنید که یک دسته دایرهٔ هم محور به یک دسته دایرهٔ هم محور منعکس می‌شود.

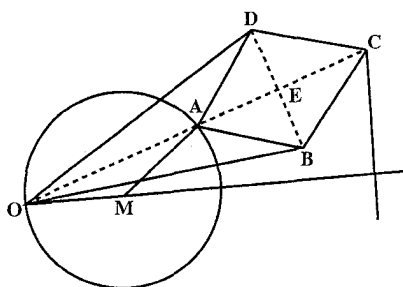
۱۹۴. قضیه. دو دایرهٔ منعکس و دایرهٔ انعکاس هم محورند.

۱۹۵. قضیه. در هر مثلث، دایرهٔ محیطی، دایرهٔ نه نقطه، دایرهٔ قطبی و دایرهٔ محیطی مثلث مماسی هم محورند.

۱۹۶. حجرهٔ پوسلیه (Paucellier). فرض کنید ABCD (شکل) یک لوزی متشکل از چهار میلهٔ صلب هم طول لولا شده به یکدیگر باشد و فرض کنید که لولاهای B و D با دو میلهٔ صلب به نقطهٔ ثابت O لولا شده‌اند.

نقطه‌های O، A، C و E، یعنی نقطهٔ وسط BD، روی عمود منصف BD قرار دارند و داریم :

$$\begin{aligned} OA \cdot OC &= (OE - AE)(OE + AE) = OE^2 - AE^2 \\ &= (OD^2 - DE^2) - (AD^2 - DE^2) = OD^2 - AD^2 \end{aligned}$$



پس A و C منعکس هم هستند، مرکز دایرهٔ انعکاس نقطهٔ O است و شعاع آن یک ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که وتر و ضلع قائمهٔ دیگرش دارای طولهای ثابت OD و AD هستند. پس اگر نقطهٔ A را روی یک خم حرکت دهیم، نقطهٔ C روی خم منعکس آن حرکت خواهد کرد.

در حالت خاص، اگر A با یک میله صلب به نقطه ثابت M متصل باشد و $MA=MO$ ، نقطه A روی دایره‌ای که از O می‌گذرد، حرکت می‌کند؛ بنابراین نقطه C روی خط راستی عمود بر MO حرکت می‌کند. این مکانیسم، که حجره پوسلیه نامیده می‌شود، حرکت دایره‌ای را به حرکت مستقیم الخط تبدیل می‌کند.

نکته. وقتی شکل (F) در یک انعکاس به شکل (F') تبدیل می‌شود، رابطه‌های موجود در شکل (F) به صورتی کم و بیش تغییر یافته، در شکل (F') ظاهر می‌شود. این خاصیت انعکاس به ما امکان می‌دهد، بدانیم برای این که شکل (F') دارای ویژگی (P') باشد، شکل (F) باید کدام ویژگی (P) را داشته باشد و برعکس.

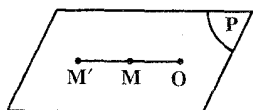
این رابطه بین ویژگیهای دو شکل (F) و (F') را می‌توان به صورت زیر به کار برد. برای این که ثابت کنیم شکل (F) ویژگی خاصی دارد، آن را با انعکاسی مناسب به شکل (F') تبدیل می‌کنیم. غالباً چنین می‌شود که در شکل جدید به آسانی می‌توان یک ویژگی مشاهده کرد که ویژگی متناظرش در شکل (F) همان است که درصدد اثباتش هستیم. این تناظر دو شکل اثبات مطلوب است. مطلب مشابهی در مورد ترسیمهای هندسی صادق است.

۱۹۷. ثابت کنید که اگر قوت انعکاس مثبت باشد، هر دایره که بر دو نقطه منعکس بگذرد بر دایره انعکاس عمود است.

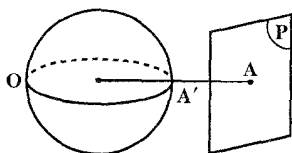
۱۹۸. نشان دهید مماسهایی که از مرکز انعکاس بر یک خم رسم می‌شوند، بر خم منعکس نیز مماسند.

۱۹۹. اگر یک منحنی، منحنی منعکس خود را قطع کند، نقطه‌های تقاطع کجایند؟

انعکاس در فضا. انعکاس در فضا هم مانند انعکاس در صفحه تعریف می‌شود. در مورد انعکاس در فضا داریم:



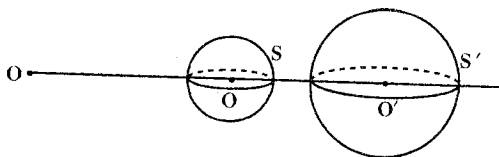
۱. منعکس صفحه‌ای که از قطب انعکاس بگذرد، صفحه‌ای است که بر خود آن صفحه منطبق است.



۲. منعکس صفحه‌ای که بر قطب انعکاس نگذرد، کره‌ای است که بر قطب انعکاس می‌گذرد و بعکس.

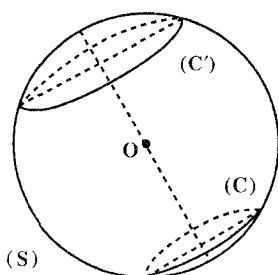
۳. یک صفحه و یک کره را عموماً می‌توان به دو طریق منعکس یکدیگر دانست.

۴. منعکس کره S که از نقطه O قطب انعکاس نگذشته باشد، کره S' است. S و S' نسبت به O مجانس یکدیگرند و نسبت تجانس $\frac{k}{p}$ است. P قوت نقطه O نسبت به کره S است. مرکز کره S' پای صفحه قطبی نقطه O نسبت به کره S است.



۵. دو کره را عموماً می‌توان به دو طریق منعکس یکدیگر دانست.

۶. منعکس دایره (C) نسبت به نقطه O واقع در خارج صفحه دایره، دایره (C') است. (C) و (C') بر یک کره قرار دارند.



۷. دو دایره واقع بر یک کره را عموماً به دو طریق می‌توان منعکس یکدیگر دانست.

تصویر جسم نمایی (رسم الجسمی). تصویر مرکزی

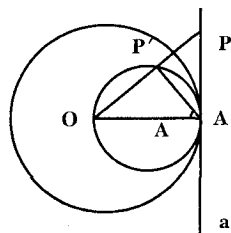
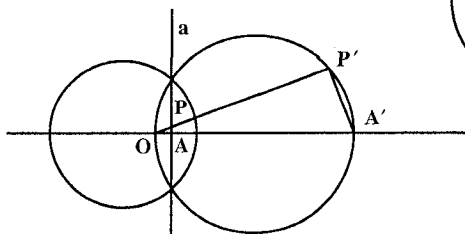
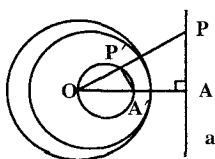
در انعکاس نسبت به دایره ملاحظه کردیم که تنها نقطه O مرکز دایره انعکاس ω دارای منعکس نمی‌باشد. برای از بین بردن این نارسایی، یعنی برای آن که انعکاس یک تبدیل نقطه به نقطه برای کل نقطه‌های صفحه باشد، با افزودن خط بینهایت (که مبدل انعکاسی نقطه O است) به صفحه اقلیدسی، صفحه انعکاسی را به دست آوردیم. به عبارت دیگر، صفحه اقلیدسی را به صفحه انعکاسی گسترش دادیم.

همچنین چنان که قبلاً دیدیم، در صفحه اقلیدسی تنها نقطه‌ای که قطبی ندارد، نقطه O مرکز دایره هادی است. برای از بین بردن این نارسایی، یعنی برای آن که تبدیل قطبی معکوس نیز همه نقطه‌های صفحه را دربرگیرد، خط بینهایت را به صفحه اقلیدسی اضافه کردیم و صفحه تصویری را به دست آوردیم. در این حالت هم صفحه اقلیدسی را به صفحه تصویری گسترش دادیم.

بنابراین دو روش متفاوت اما متشابه وجود دارد که بدان وسیله می توان صفحه اقلیدسی را گسترش داد، در این جا نکته مهمی وجود دارد که خیلی کمتر از آن چه لازم بوده به آن توجه شده است. هرگاه استدلال را نه تنها در صفحه بلکه در فضا تعمیم دهیم و دوگونه بسیار ساده گسترش کرده روی صفحه را مورد مقایسه قرار دهیم، می توانیم به توجیه دقیقتر دو روش گفته شده، دست یابیم.

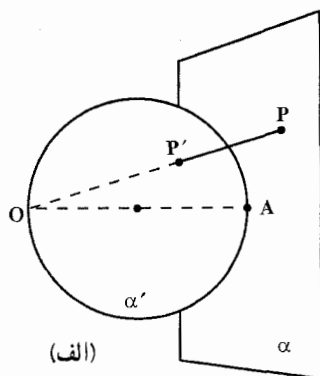
نخست، تعریفی را که قبلاً درباره انعکاس نسبت به یک دایره به کار بردیم، در مورد یک کره تعمیم می دهیم: کره به مرکز O و به شعاع k و نقطه P متمایز از نقطه O را در نظر می گیریم؛ بنا به تعریف، نقطه P' را که بر نیمخط OP قرار داشته و فاصله آن از O طبق رابطه زیر مشخص می شود، منعکس نقطه P می نامیم.

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = k^2$$

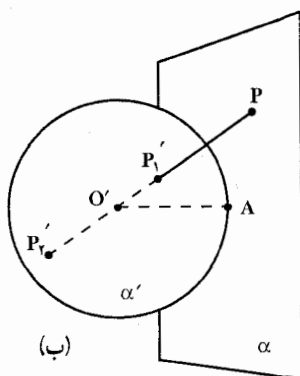


اگر در شکل های بالا صفحه شکل را متعلق به فضای سه بعدی بدانیم و آن را حول خط OA دوران دهیم و در ضمن صفحه را کره به شعاع بینهایت در نظر بگیریم، در این صورت بسادگی می توانیم نتیجه بگیریم که انعکاس، هر کره را به کره دیگر تبدیل می کند. به ویژه اگر α صفحه ای باشد که در A بر کره انعکاس ω مماس باشد، منعکس آن کره α' به قطر OA خواهد بود. از این رو می توانیم با واسطه ω بین نقطه های صفحه α و نقطه های کره α' تناظری برقرار سازیم: اگر P نقطه ای از صفحه α باشد، نقطه P' نظیر آن عبارت است از نقطه تلاقی OP با کره α' (شکل الف)). برعکس، نظیر هر نقطه P' از کره α' ، به استثنای O ، نقطه P از صفحه α وجود دارد که همان نقطه برخورد OP' با α است. در این جا هم استثنایی وجود دارد که برای برطرف کردن آن، صفحه α را با افزودن یک نقطه بینهایت به آن به صفحه انعکاسی تبدیل می کنیم که این یک نقطه وضع P خواهد بود، وقتی که P' روی O واقع باشد.

این روش نمایش کره α' روی صفحه α به تصویر جسم نمایی موسوم است. با ملاحظه آن که این گونه تصویر شیوه ویژه‌ای از انعکاس است، بسادگی نتیجه می‌گیریم که تصویر هر دایره باز هم یک دایره می‌باشد. منعکس هر کره، یک کره (یا یک صفحه) است و هر دایره فصل مشترک دو کره است؛ بنابراین منعکس هر دایره (به هر وضعی که در فضا واقع باشد و حتی اگر بر کره α' قرار داشته باشد) یک دایره می‌باشد.



برای نمایش کره α' روی صفحه α مماس بر آن، روش دیگری وجود دارد که تصویر مرکزی نامیده می‌شود. در این روش نقطه دید را مرکز کره α' اختیار می‌کنند که وسط OA است. هر صفحه‌ای که بر این نقطه بگذرد کره α' را در یک دایره عظیمه و صفحه α را در یک خط قطع می‌کند؛ بنابراین هر خط از صفحه α با یک دایره عظیمه از کره α' معین می‌شود، همچنین هر نقطه از α با یک جفت نقطه‌های واقع در دو سر یک قطر از کره α' مشخص می‌گردد، چنان که در شکل (ب) ملاحظه می‌شود، دو نقطه P_1' و P_2' از کره α' نظیر



نقطه P از صفحه α می‌باشند. برعکس، هر دایرة عظیمه از کره α' را، به استثنای دایرة عظیمه‌ای که صفحه آن با α موازی است، که در نظر بگیریم نظیر آن در صفحه α خطی وجود دارد که محل برخورد صفحه آن دایرة عظیمه با صفحه α می‌باشد. در این جا هم برای از بین بردن استثنا، با افزودن یک خط بینهایت به صفحه α آن را به صورت صفحه تصویری درمی‌آوریم که این خط بینهایت نظیر دایرة عظیمه‌ای از کره α' است که صفحه آن با صفحه α موازی است. هریک از نقطه‌های این خط - نقطه‌های بینهایت - نظیر یک جفت نقطه واقع در دو سر قطری از دایرة عظیمه مزبور می‌باشند. هر دو خط از صفحه یک نقطه مشترک دارند و مؤکد آن است که هر دو دایرة عظیمه واقع بر کره در دو نقطه واقع در دو سر یک قطر مشترک خواهند بود، درواقع هر دو صفحه که بر مرکز کره بگذرند، در یک خط متقاطع می‌باشند.

با توجه به آن چه که گفته شد، نتیجه می‌گیریم که هریک از نقطه‌های صفحه تصویری (با در نظر گرفتن نقطه بینهایت) تصویر یک جفت نقطه واقع در دو سر قطری از کره است؛ از این رو با در نظر گرفتن کره به صورت مجموعه‌ای از جفت نقطه‌ها می‌توان آن را به صفحه تصویری تبدیل کرد که در این تبدیل هر جفت نقطه از کره به یک نقطه از صفحه تصویری تبدیل می‌شود.

از نظر علمی می‌توان روش تبدیل کره به صفحه را در رسم نقشه جغرافیایی کره زمین روی یک صفحه به کار برد. در این باره هیچ یک از روشهای تصویر جسم‌نمایی و تصویر مرکزی مطلوب واقعی نخواهد بود، اما هریک از آنها دارای امتیازهایی است. روش نخست زاویه‌هایی بین هر دو نیم‌خط به مبدأ مشترک را محفوظ می‌دارد و در نتیجه به عنوان مثال دوره‌های جزیره‌های کوچک تغییر شکل نمی‌دهند. با استفاده از روش دوم می‌توان کوتاهترین راه بین دو نقطه از کره را به صورت خط مستقیم نمایش داد.

قبلاً دیده‌ایم که انعکاس، نسبتهای ناهمساز را محفوظ می‌دارد. این ویژگی در تبدیل قطبی معکوس فقط در مورد نقطه‌های واقع بر یک خط وجود دارد. به عبارت دقیقتر، نسبت ناهمساز چهار نقطه واقع بر یک خط P برابر است با نسبت ناهمساز چهار نقطه‌ای که از برخورد قطبیه‌های نقطه‌های مزبور با هر خط غیر گذرنده بر P، قطب خط P، به دست می‌آیند. اثبات این ویژگی طولانی است و متأسفانه در این جا مجال آن وجود ندارد.

خواننده دقیق که مفاهیم گذشته را درک کرده باشد، توانایی آن را خواهد داشت که بیان اصولی هندسه تصویری را حدس بزند: این بار قضیه‌های دزارگ، پاپوس و پاسکال را از نظر کاملاً متفاوتی در خواهد یافت، اما باز هم در آنها دوستان قدیمی را باز خواهد شناخت.

۲.۲. انعکاس در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

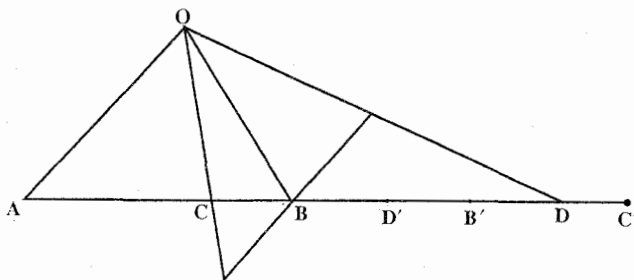
۲۰۰. قطب انعکاس را چگونه باید انتخاب نمود، برای این که منعکسهای سه نقطه مفروض A ، B و C رأسهای مثلث متساوی الاضلاع باشند؟

۲۰۱. ثابت کنید قطب انعکاس را می توان چنان اختیار کرد که هر چهار نقطه دلخواه متمایز را به چهار رأس یک متوازی الاضلاع $A'B'C'D'$ تبدیل کرد (که ممکن است در حالت خاص چهار نقطه A' ، B' ، C' و D' بر یک خط راست واقع باشند، اما داشته باشیم: $A'B' = D'C'$ و $A'D' = B'C'$).

۲.۲.۲. نقطه های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۲. جای نقطه

۲۰۲. چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی می دهند. چنانچه A را قطب انعکاس اختیار نماییم، ثابت کنید منعکس نقطه B مزدوج A وسط پاره خط واصل بین منعکسهای دو نقطه دیگر واقع است.



۲.۲.۲.۲. نقطه ها به تقسیم توافقی اند

۲۰۳. منعکسهای چهار نقطه A ، B ، C و D که یک تقسیم توافقی تشکیل می دهند در انعکاسی که قطبش روی خط AB باشد، نیز یک تقسیم توافقی پدید می آورند.

۳.۲.۲. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۲. خطها همرسند

۲۰۴. ثابت کنید منعکسهای یک دسته خط (مجموعه خطهایی که در یک نقطه همرسند) در انعکاسی که قطبش نقطه همرسی دسته خط و قوت انعکاسش مخالف صفر باشد، یک دسته خط است.

۴.۲.۲. زاویه

۱.۴.۲.۲. اندازه زاویه

۲۰۵. سه نقطه ناهمخط P, A, B و نقطه متغیر M ، همخط با A و B مفروضند. ثابت کنید زاویه برخورد دو دایره PAM و PBM ثابت است.

۵.۲.۲. پاره خط

۱.۵.۲.۲. اندازه پاره خط

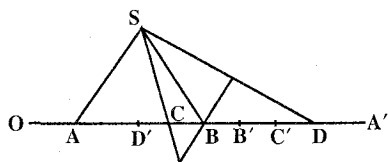
۲۰۶. پاره خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر را در انعکاس $(O, 2)$ به پاره خط $A'B'$ تبدیل شده است. طول پاره خط $A'B'$ چه قدر است در صورتی که $OA = 8\text{cm}$ و $OB = 6\text{cm}$ باشند؟

۲۰۷. اگر فاصله مرکز انعکاس تا نقطه A برابر $\frac{9}{8}$ و شعاع دایره انعکاس $\frac{3}{7}$ باشد، فاصله مرکز انعکاس تا نقطه A' ، منعکس نقطه A چه قدر است؟

۲۰۸. شعاع دایره انعکاس در یک انعکاس برابر $\frac{9}{5}$ و فاصله نقطه منعکس از مرکز انعکاس برابر $\frac{6}{7}$ است. فاصله مرکز انعکاس از نقطه اصلی چه قدر است؟

۶.۲.۲. رابطه های متری

۲۰۹. منعکسهای چهار نقطه A, B, C و D که تشکیل یک تقسیم توافقی می دهند، نسبت به یک نقطه غیر مشخص (O) واقع بر خط گذرنده بر نقطه های مزبور تشکیل یک تقسیم



توافقی می دهند، یعنی اگر A' ، B' ، C' و D' منعکسهای آنها و a' ، b' ، c' و d' طول این نقطه ها باشند، داریم:

$$2(a'b' + c'd') = (a' + b')(c' + d')$$

۲۱۰. رابطه کلی شال. اگر چهار نقطه A ، B ، C و D بر روی یک خط مستقیم جهندار (یک محور) واقع باشند، ثابت کنید که عبارت:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD}$$

همواره صفر است. اگر نقطه D به بینهایت دور منتقل شود، رابطه اختصاصی شال Chasles به دست می آید.

با انعکاسی به قطب O (بیرون خط مستقیم مفروض) و قوت دلخواهی خط را منعکس می کنیم تا نقطه های A' ، B' ، C' و D' به دست آیند. رابطه های شال چه رابطه هایی ایجاد می کنند.

۲۱۱. نشان دهید اگر نقطه های P و Q با مرکز انعکاس همخط باشند، باز رابطه (f) صادق است.

۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۲۱۲. با فرض این که هر خط را می توان حالت خاص دایره دانست، آیا دو خط متقاطع را می توان به دو دایره مماس یا دو دایره متقاطع تبدیل کرد؟ جواب را برحسب تعداد نقطه های مشترک دو خط مفروض تفسیر کنید.

۲۱۳. دو خط راست در نقطه ای غیر از مرکز انعکاس متقاطعند. تصویرهای این دو خط تحت انعکاس چیست؟

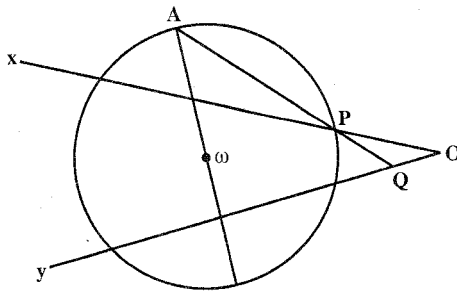
۸.۲.۲. رسم شکلها

۲۱۴. به وسیله انعکاس، سه نقطه مفروض را به سه نقطه واقع بر یک خط راست تبدیل کنید، به طوری که یکی از آنها وسط قطعه خطی باشد که دو نقطه دیگر را به هم وصل می کند.

۲۱۵. بر نقطه مفروض A خطی رسم کنید که ضلعهای زاویه مفروض $\alpha = \angle xOy$ را در P و Q

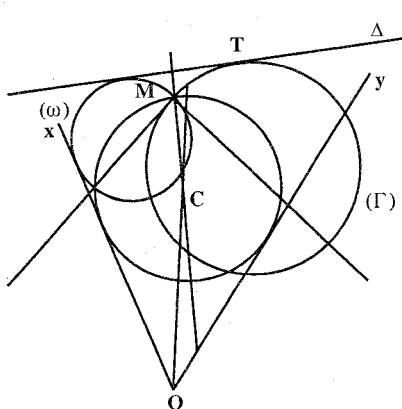
قطع کند و داشته باشیم :

$$AP.AQ = a^2$$



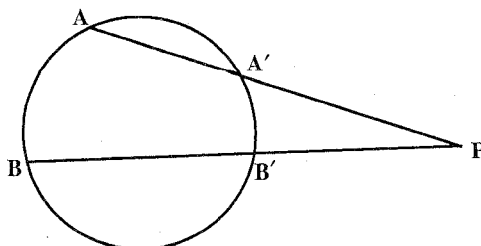
۲۱۶. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطه مفروض A و B بگذرد و بر خط مفروض Δ مماس باشد. واضح است که A و B باید در یک طرف Δ باشند.

۲۱۷. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطه مفروض بگذرد و خط مفروض را به زاویه α قطع کند.



۲۱۸. نقطه M در داخل زاویه xOy واقع است. بر M دایره‌ای بگذرانید که بر دو ضلع زاویه مماس شود.

۲۱۹. منعکس نقطه‌ای را از راه ترسیم به دست آورید.



۲. متوازی الاضلاع باشد.

۳. در رأس A' قائم الزاویه باشد.

۲۲۷. بر روی دو ضلع زاویه قائمه xOy به طور مرتب نقطه های A و B را چنان انتخاب می کنیم

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{a}$$

که رابطه :

که در آن a طول ثابتی است، همواره برقرار باشد :

۱. ثابت کنید که خط AB بر نقطه ثابتی می گذرد.

۲. اگر C چهارمین رأس مستطیلی باشد که AB قطر آن است و $A'B'$ قرینه AB

نسبت به نیمساز خارجی xOy خطی که از C بر $A'B'$ عمود می شود، از نقطه ثابتی مرور می کند.

۳. دایره های به قطرهای OA و OB رسم می کنیم تا در نقطه P تلاقی کنند، مکان نقطه P را تعیین کنید.

۴. ثابت کنید که منعکس دایره محیطی مثلث OAB نسبت به قطب O بر سهمی ثابتی مماس است.

۵. ثابت کنید که مماس مشترک دایره های قسمت ۳ بر دایره ثابتی مماس است.

۲۲۸. چهار نقطه A, B, C و D و چهار نقطه A', B', C', D' نسبت به قطب O منعکس

یکدیگرند. ثابت کنید که در چهار ضلعیهای $ABCD$ و $A'B'C'D'$ مجموع زاویه های مقابل برابر است، یعنی :

$$\hat{B} + \hat{D} = \hat{B}' + \hat{D}', \quad \hat{A} + \hat{C} = \hat{A}' + \hat{C}'$$

$$\frac{A'B' \cdot D'C'}{A'C' \cdot B'D'}, \quad \frac{AB \cdot DC}{AC \cdot BD}$$

و همچنین عبارتهای

با هم برابرند، اگر شکل $DABC$ را به قطب D منعکس کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$ و با انعکاس $D'A'B'C'$ با قطب D' مثلث $A_1'B_1'C_1'$ به دست می آیند. این دو مثلث با هم چگونه اند؟

۳.۲. انعکاس در مثلث

۱.۳.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۲۹. دو مثلث ABC و DEF داده شده است. با ترسیم اجمالی مرکز O و شعاع k از دایره

انعکاس را به قسمی تعیین کنید که اگر A' ، B' و C' منعکسهای A ، B و C باشند مثلث $A'B'C'$ با مثلث DEF برابر باشد.

۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۳۰. در صفحه مثلث ABC ، نقطه‌ای مانند (O) در نظر می‌گیریم. موری ضلعهای AB ، BC و AC را به ترتیب در γ ، α و β قطع می‌کند. خطهای $O\alpha$ ، $O\beta$ و $O\gamma$ دایره‌های OBC ، OCA و OBA را در نقطه‌های A' ، B' و C' تلاقی می‌کنند. ثابت کنید که چهار نقطه O ، A' ، B' و C' بر یک دایره قرار دارند.

۳.۳.۲. خطهای: موازی، هم‌مس، ...

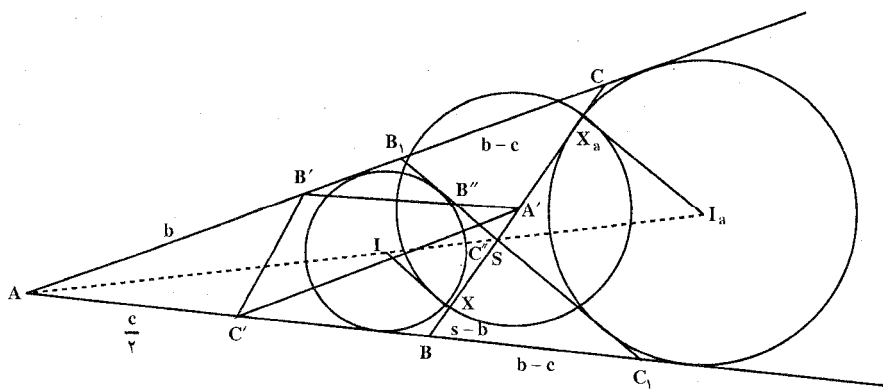
۱.۳.۳.۲. خطها هم‌مسند

۲۳۱. به کمک انعکاس ثابت کنید، ارتفاعهای هر مثلث هم‌مسند.

۴.۳.۲. زاویه

۱.۴.۳.۲. اندازه زاویه

۲۳۲. با توجه به شکل، ثابت کنید که زاویه B_1C_1 با BC برابر است با $\hat{B}-\hat{C}$.



۲۳۳. شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی مثلث را R و r می‌نامیم. ثابت کنید که δ ، انحراف انعکاسی این دو دایره در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\operatorname{sh} \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}}$$

۵.۳.۲. پاره خط

۱.۵.۳.۲. رابطه بین پاره خطها

۲۳۴. نقطه برخورد ارتفاعهای مثلث ABC را H و بر روی HA ، HB و HC سه نقطه A' ، B' و C' را به قسمی تعیین می‌کنیم که:

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$$

ثابت کنید که H از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

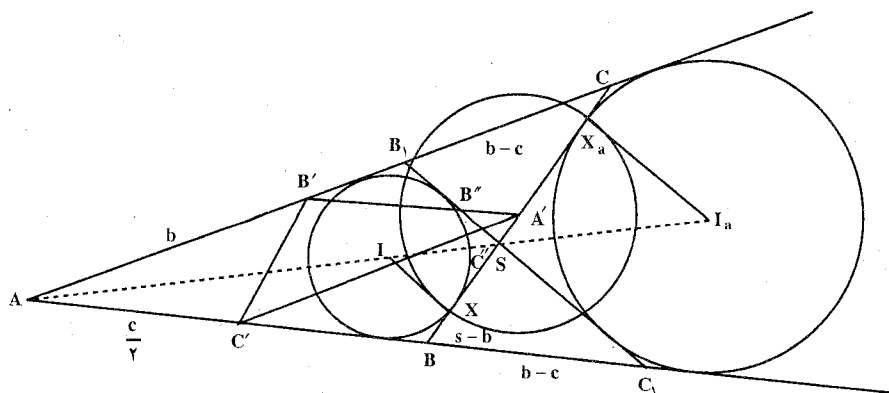
۶.۳.۲. رابطه‌های متری

۲۳۵. در مثلث ABC ، رابطه $AB + AC = 2AM$ (M وسط ضلع BC است) برقرار است. اگر منعکس این مثلث نسبت به قطب انعکاس A و با قوت انعکاس $k \neq 0$ را پیدا کنیم، رابطه بالا به چه صورت درمی‌آید؟

۷.۳.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۲۳۶. منعکسهای دو نقطه A و B را نسبت به قطب انعکاس C ، A' و B' می‌نامیم. ثابت کنید، منعکس نقطه I مرکز دایره محاطی مثلث ABC نقطه I' مرکز دایره محاطی خارجی مثلث $CA'B'$ مماس به ضلع $A'B'$ است.

۲۳۷. با توجه به شکل، اگر D پای ارتفاع نظیر رأس A از مثلث ABC باشد، ثابت کنید که نسبت به دایره ω نقطه‌های S و D منعکسهای یکدیگرند.



۲۳۸. نشان دهید محور لوموان و دایره بروکار نسبت به دایره محیطی مثلث منعکس یکدیگرند.

۸.۳.۲. رسم شکلها

۲۳۹. مثلث ABC داده شده است. منعکس این مثلث نسبت به محل برخورد میانه‌های آن و با قوت انعکاس $k > 0$ را رسم کنید. شکل حاصل چیست؟

۹.۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۴۰. اگر A' ، A'' و B' ، B'' و C' ، C'' پای نیمسازهای زاویه‌های A ، B و C از مثلث ABC باشند، ثابت کنید دایره‌های به قطرهای $A'A''$ ، $B'B''$ و $C'C''$ دو نقطه مشترک دارند و دو به دو یکدیگر را تحت زاویه 120° قطع می‌کنند (دایره‌های آپولونیوس).

۱۰.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۴۱. مرکز دایره محیطی مثلث ABC را O می‌نامیم. A' ، B' و C' قرینه‌های رأسهای مثلث را نسبت به O ، A'' ، B'' و C'' قرینه‌های رأسها را نسبت به عمود منصفهای

ضلعهای مثلث به دست آورید. ثابت کنید :

اولاً. دایره‌های محیطی مثلث $OA'A''$ ، $OB'B''$ و $OC'C''$ نقطه مشترک دیگری مانند I دارند.

ثانیاً. اگر رأس A بر دایره محیطی مثلث ABC تغییر نماید و B و C ثابت بمانند، مطلوب است مکان هندسی نقطه I.

۲۴۲. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی الساقین ABC ($AB = AC$) اگر D نقطه‌ای از قاعده BC باشد، رابطه زیر محقق است :

$$AB^2 = AD^2 + BD \cdot DC$$

و اگر $AB^2 = 4AD^2 + BC^2$ باشد، زاویه AD و BC برابر 45° می‌باشد. به طور کلی اگر رابطه $AB^2 = 4AD^2 + kBC^2$ صادق باشد، (k عددی مثبت یا منفی) امکان صحت آن را بحث کنید. در صورت امکان زاویه AD را با قاعده BC مشخص سازید. اگر در مثلث متساوی الساقین ABC رأسهای A و B (طرفین یک ساق) ثابت بمانند، مطلوب است مکان هندسی نقطه D از قاعده BC به قسمی که اولاً $BD \cdot BC$ ثابت بماند و ثانیاً همان مکان به فرض این که $BD \cdot DC$ ثابت بماند.

۲۴۳. از رأسهای A، B و C یک مثلث مفروض بترتیب خطهای D_A ، D_B و D_C را طوری رسم می‌کنیم که سه زاویه (BC, D_A) ، (CA, D_B) و (AB, D_C) با $k\pi$ تقریب برابر α باشند. فرض می‌کنیم $C'B'A'$ مثلث حاصل از این خطها و $A'B'C'$ مثلث نظیر $\alpha = 0$ باشد.

۱. مکان نقطه‌های A' ، B' و C' را وقتی که α تغییر می‌کند، به دست آورید. ثابت کنید که $A'B'C'$ با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه مساوی $2 \cos \alpha$ می‌باشد.

۲. ثابت کنید، برای یک مقدار معین α با یک تشابه می‌توان از مثلث $A'B'C'$ به مثلث $A'B'C'$ رسید که مرکز آن (یا نقطه مضاعف) و در عین حال محل تلاقی ارتفاعهای H مثلث ABC و نیز مرکز دایره $A'B'C'$ است.

۳. ثابت کنید خطهای اصل بین وسطهای ضلعهای $A'B'C'$ به ازای جمیع مقادیر α از نقطه‌های ثابت می‌گذرند.

۴. ثابت کنید، از مثلث ABC به $A'B'C'$ با یک تجانس و از $A'B'C'$ به $A'B'C'$ با تشابهی که در قسمت ۲ ذکر شد، می‌توان رسید. ثابت کنید که برای یک مقدار مفروض α مثلث $A'B'C'$ را از ABC با تشابهی که نقطه مضاعف S آن را تعیین خواهد کرد، می‌توان به دست آورد. مطلوب است مکان S وقتی α تغییر کند.

۵. فرض می‌کنیم A'' ، B'' و C'' منعکسهای A' ، B' و C' در انعکاس به قطب H و قوت HA'^2 باشند. مطلوب است پوش ضلعهای مثلث $A''B''C''$.

۲۴۴. نقطه P در سطح مثلث ABC مفروض است. خطهای PA ، PB و PC را رسم می‌کنیم سپس خطهای PA' ، PB' و PC' را چنان رسم می‌کنیم که هر یک قرینهٔ نظیر خود نسبت به نیمساز زاویهٔ رأس مشترک باشند. ثابت کنید که خطهای اخیر در نقطه‌ای مانند P' متقاطع می‌باشند که آن را اصطلاحاً منعکس متحدالزوا یا P نسبت به مثلث ABC می‌نامند.

ثابت کنید که دایرهٔ محیطی مثلث پدر نقطهٔ P نسبت به مثلث ABC همان دایرهٔ محیطی مثلث پدر نقطهٔ P نسبت به ABC می‌باشد. اگر نقطهٔ P بر دایرهٔ محیطی مثلث واقع باشد، نقطهٔ P' کجا خواهد بود؟

۲۴۵. الف. ثابت کنید که منعکس دایرهٔ محیطی (O) از مثلث ABC نسبت به دایرهٔ محاطی داخلی (I)، به عنوان دایرهٔ انعکاس، دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث XYZ است. X ، Y و Z نقطه‌های تماس دایرهٔ (I) با ضلعهای مثلث ABC هستند.

ب. با استفاده از انعکاس رابطهٔ اوپلر، $d^2 = R^2 - 2Rr$ را ثابت کنید.

ج. عبارتهای مشابه مربوط به دایره‌های محاطی خارجی را بیان و آنها را با استفاده از انعکاس ثابت کنید.

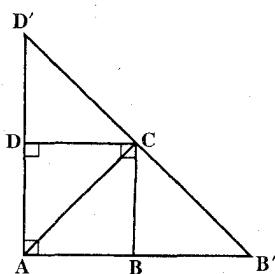
۴.۲. انعکاس در چندضلعی

۱.۴.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۴۶. مربع $ABCD$ به ضلع a داده شده است. قطر AC را رسم کرده و خطی در C بر AC عمود رسم می‌کنیم تا امتداد ضلعهای AB و AD را در نقطه‌های B' و D' قطع کند.

در چه انعکاسی نقطه‌های B' ، C و D' منعکسهای

رأسهای B ، C و D می‌باشند.



۲.۴.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

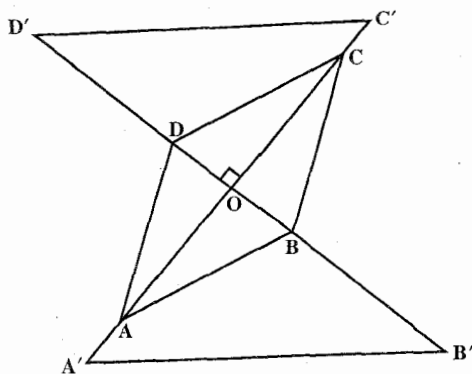
۱.۲.۴.۲. نقطه‌ها همخطند

۲۴۷. چهارضلعی محاطی ABCD داده شده است. منعکسهای نقطه‌های C, B, A و D را نسبت به قطب انعکاس A و با قوت انعکاس k ($k > 0$, $k > AC^2$) به دست می‌آوریم، بترتیب D' و C' , B' می‌نامیم. ثابت کنید، این سه نقطه همخطند.

۳.۴.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۴.۲. خطها موازی‌اند

۲۴۸. نقطه برخورد قطرهای لوزی ABCD را O می‌نامیم. منعکسهای رأس A, B, C و D نسبت به قطب انعکاس O و قوت انعکاس k ($k > OC^2$) را بترتیب A' , B' , C' و D' می‌نامیم. ثابت کنید که $A'B' \parallel C'D'$ است.

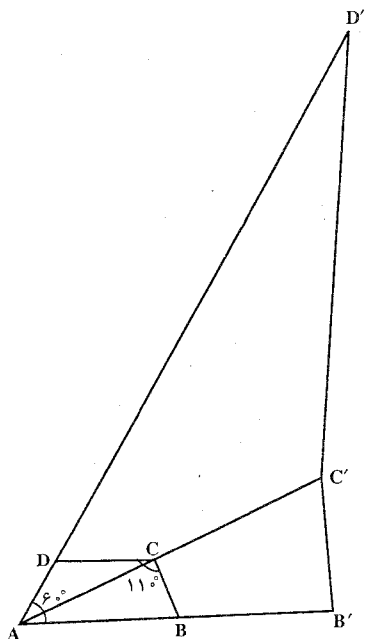


۴.۴.۲. زاویه

۱.۴.۴.۲. اندازه زاویه

۲۴۹. در دوزنقه $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $\hat{A} = 60^\circ$ و $\hat{C} = 110^\circ$ است. منعکس رأسهای B,

C و D را نسبت به قطب انعکاس A و با
 قوت انعکاس k ($k > 0, k > AC^2$)
 به دست می آوریم. اندازه زاویه محدب
 $B'C'D'$ را تعیین کنید.



۵.۴.۲. پاره خط

۱.۵.۴.۲. رابطه بین پاره خطها

۲۵۰. چهارضلعی ABCD محاط

در دایره O داده شده

است. نقطه برخورد دو

قطر آن را P می نامیم و در

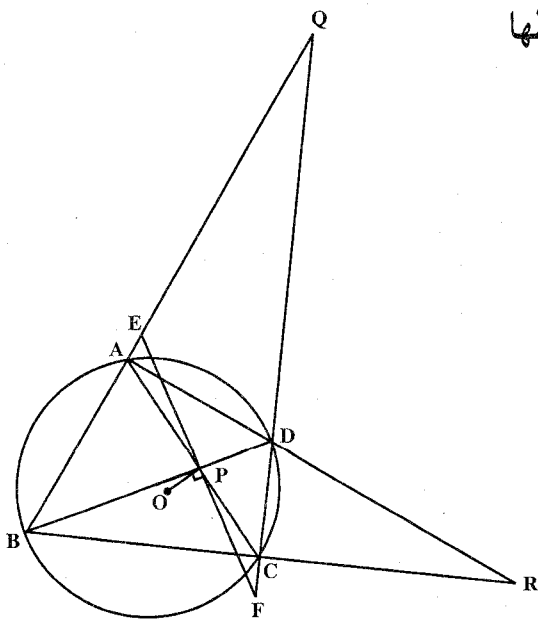
این نقطه خطی بر OP

عمود رسم می کنیم تا

خطهای AC و BD را در

E و F قطع کند. ثابت

کنید که $PE = PF$ است.



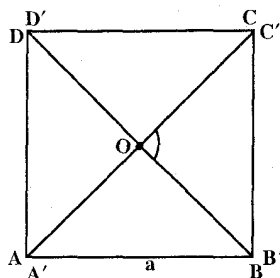
۶.۴.۲. رابطه‌های متری

۲۵۱. چهارضلعی ABCD مفروض است. اگر دایره‌های محیطی دو مثلث ABC و ADC بر هم عمود باشند، دایره‌های محیطی مثلثهای ABD و CBD بر هم عمود خواهند بود و مجموع مربعات حاصلضربهای ضلعهای روبه رو، مساوی است با مربع حاصلضرب دو قطر.

۲۵۲. با استفاده از انعکاس، اثبات بسیار ساده قضیه: بین فاصله‌های چهار نقطه A, B, C و D از یکدیگر رابطه $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ برقرار است؛ تساوی وقتی برقرار است که $AC \parallel BD$ را بیان کنید.

۷.۴.۲. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند

۲۵۳. مربع ABCD به ضلع a داده شده است. محل برخورد قطرهای آن را O می‌نامیم. ثابت کنید، منعکسهای رأسهای A, B, C و D نسبت به قطب انعکاس O و قوت انعکاس $\frac{a^2}{2}$ بر خود این نقطه‌ها منطبقند.



۸.۴.۲. رسم شکلهای

۲۵۴. در یک متوازی‌الاضلاع یک لوزی به مساحت $2k^2$ محاط کنید.

۲۵۵. نقطه K را در درون مربع ABCD انتخاب کنید. از رأسهای A، B، C و D بترتیب، بر خطهای راست BK، CK، DK و AK عمودهایی رسم کنید. ثابت کنید، این خطهای راست عمود، از یک نقطه می گذرند.

۹.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۵۶. ثابت کنید که اگر در یک چهارضلعی، حاصلضرب دو قطر، مساوی با مجموع حاصلضربهای ضلعهای متقابل باشد، چهارضلعی محاطی است (عکس قضیه بطلمیوس).

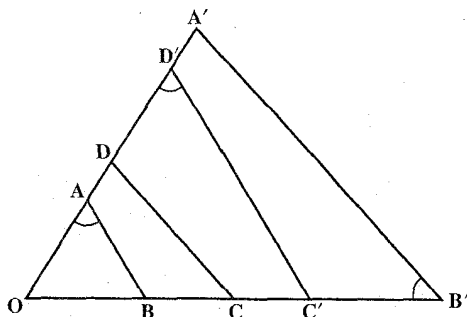
فرض: $BD \cdot AC = BC \cdot AD + AB \cdot DC$

حکم: ABCD چهارضلعی محاطی است.

۱۰.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۵۷. چهارضلعی محاطی ABCD داده شده است. نقطه برخورد ضلعهای AD و BC را O می‌نامیم و منعکسهای نقطه‌های A، B، C و D را نسبت به قطب انعکاس O و قوت انعکاس بترتیب A' ، B' ، C' و D' می‌نامیم. ثابت کنید:

۱. نقطه‌های A' ، D' ، O و A' ، D' ، O همچنین B' ، C' ، B و O هم‌خطند.



۲. $CD \parallel A'B'$ و $AB \parallel C'D'$ است.

۳. چهارضلعی $A'B'C'D'$ محاطی است.

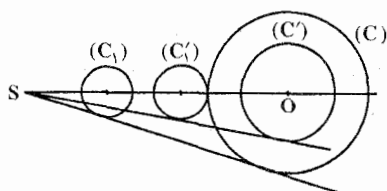
۵.۲. انعکاس در دایره

۱.۵.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۵۸. انعکاسی بیابید که سه دایره مفروض با مرکزهای ناهمخط را به سه دایره که مرکزهایشان روی خط مفروضی باشند، تبدیل کند.

۲۵۹. قطب انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که دو دایره (C) و (C') به دو دایره متساوی تبدیل شوند.

۲۶۰. قطب انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که دو دایره C و C' به دو دایره متحدالمرکز تبدیل شوند.



۲۶۱. قطب انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که دو دایره متحدالمرکز به دو دایره مساوی تبدیل شوند.

۲۶۲. انعکاسی بیابید که سه دایره مفروض را به خودشان منعکس کند.

۲۶۳. مرکز انعکاس و قوت انعکاس را چنان بیابید که سه دایره مفروض به سه دایره متساوی تبدیل شوند.

۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۶۴. ثابت کنید که در چیستان اشتینر، نقطه‌های تماس دایره‌های متوالی بر دایره نیمساز دو

دایره مفروض واقعند (در واقع دایره نیمساز، یا دایره‌های نیمساز، دو دایره دلخواه α

و β را می‌توان مکان هندسی نقطه P دانست که این نقطه P نقطه تماس دو دایره‌ای

است که هر کدام از آنها بر دایره‌های α و β نیز مماسند).

۲.۲.۵.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی اند

۲۶۵. قطبهای محور اصلی دو دایره نسبت به هر یک از آنها، خط واصل بین دو مرکز تجانس دو دایره را به توافق تقسیم می‌کنند.

۳.۲.۵.۲. نقطه‌ها غیرمتناظرند

۲۶۶. از نقطه I واقع بر محور اصلی دو دایره، دو مماس بر دو دایره، رسم می‌کنیم. ثابت کنید، نقطه‌های تماس، نقطه‌های غیرمتناظر می‌باشند.

۳.۵.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۵.۲. خطها بر هم عمودند

۲۶۷. یکی از ضلعهای یک مثلث مزودج نسبت به یک دایره، خط بینهایت است. دو ضلع دیگر این مثلث چگونه‌اند؟

۴.۵.۲. زاویه

۱.۴.۵.۲. اندازه زاویه

۲۶۸. خطی به فاصله p از مرکز دایره به شعاع b واقع است. هرگاه $p < b$ باشد، خط با دایره، یک زاویه δ می‌سازد که ثابت کنید $\cos \delta = \pm \frac{p}{b}$ ؛ اگر $p > b$ باشد. ثابت کنید که

انحراف انعکاسی بین خط و دایره از فرمول $ch \delta = \frac{p}{b}$ به دست می‌آید.

۲۶۹. ثابت کنید که انحراف انعکاسی بین دایره‌های سدی (Soddy) در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$ch \frac{\delta}{2} = 2$$

۲۷۰. ثابت کنید که معادله $\delta = 2 \text{Lg}(\sec \frac{\pi}{\delta} + \tan \frac{\pi}{n})$ را می‌توان چنین نوشت:

$$\delta = 2 \text{Lg} \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n})$$

۲۷۱. دایره‌های به معادله‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 - 2ax + d^2 = 0, \quad a > d > 0$$

$$x^2 + y^2 - 2bx + d^2 = 0, \quad b > d > 0$$

و فرض می‌کنیم $\theta\alpha = \frac{d}{a}$ و $\theta\beta = \frac{d}{b}$. ثابت کنید که انحراف انعکاسی این دایره‌ها برابر است با: $|\alpha - \beta|$.

۲۷۲. اگر دایره متغیر (γ) همواره بر دو دایره مفروض (C) و (C') به یک طریق مماس باشد، ثابت کنید همواره دایره ثابت (C'') را که متعلق به دستگاه دایره‌های (C) و (C') است، به یک زاویه قطع می‌کند.

۲.۵.۵. پاره خط

۲.۵.۵.۱. رابطه بین پاره خطها

۲۷۳. دایره O به قطر AB و خط Δ عمود بر این قطر مفروض است. دایره دیگری به مرکز A دایره O را در C و خط Δ را در D' قطع می‌کند. خط AC دایره Δ را در C' و خط AD' دایره O را در D قطع می‌کند. ثابت کنید: $CC' = DD'$.

۲.۵.۶. رابطه‌های متری

۲۷۴. نسبت به دایره انعکاس ω به مرکز O و به شعاع k دایره a به دایره a' تبدیل شده است. بین قوت‌های O نسبت به دایره‌های a و a' چه رابطه‌ای برقرار است؟

۲۷۵. دایره انعکاس ω و نقطه متغیر P را واقع بر آن و نقطه دلخواه A را در خارج آن در نظر بگیرید، ثابت کنید که نسبت $\frac{PA}{PA'}$ مقدار ثابت است. برعکس، اگر دو نقطه B و C بر

AA' واقع باشند که یکی از آنها بین A و A' و دیگری در خارج AA' باشد و نسبت‌های فاصله‌های آنها از A و A' با هم برابر و مخالف با یک باشند، ثابت کنید که دایره به قطر BC مکان هندسی نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌های آنها از A و A' با آن نسبتها برابر است (این مکان هندسی را دایره آپولونیوس می‌نامند).

۲۷۶. برای این که خط مستقیم AB بر دایره (C) مماس باشد. لازم و کافی است که یکی از سه مقدار AB ، $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ مساوی مجموع دو مقدار دیگر گردد (α و β قوت‌های نقطه‌های A و B نسبت به دایره (C) می‌باشند).

۲۷۷. برای این که دو دایره (Γ) و (Γ') برهم مماس شوند، لازم و کافی است یکی از سه مقدار $BC\sqrt{\alpha}$ ، $CA\sqrt{\beta}$ و $AB\sqrt{\gamma}$ مساوی مجموع دو مقدار دیگر باشد، A ، B و C سه نقطه غیر مشخص از دایره‌اند، به قسمی که هریک از آنها در خارج دایره دیگر اختیار شود و α ، β و γ قوت‌های این نقطه‌ها نسبت به دایره دیگر می‌باشند.

۲۷۸. در انعکاس به مرکز O و به قوت k نقطه‌های A و A' و دایره‌های (C) و (C') منعکس یکدیگرند. اگر α و α' بترتیب قوت‌های نقطه‌های A و A' نسبت به دو دایره (C) و (C') و ω قوت نقطه O نسبت به دایره (C) باشد، ثابت کنید:

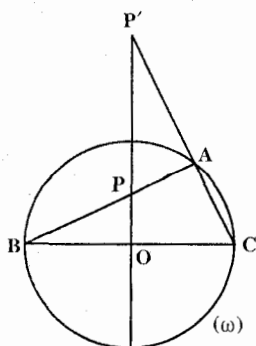
$$\alpha' = \overline{OA'}^2 \times \frac{\alpha}{\omega}$$

۲۷۹. می‌دانیم که دو دایره متخارج دارای چهار مماس مشترک می‌باشند. اگر δ انحراف انعکاسی این دو دایره باشد، ثابت کنید که نسبت بین طول‌های بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مماس مشترک برابر است با $\frac{\delta}{\gamma} \text{th}$.

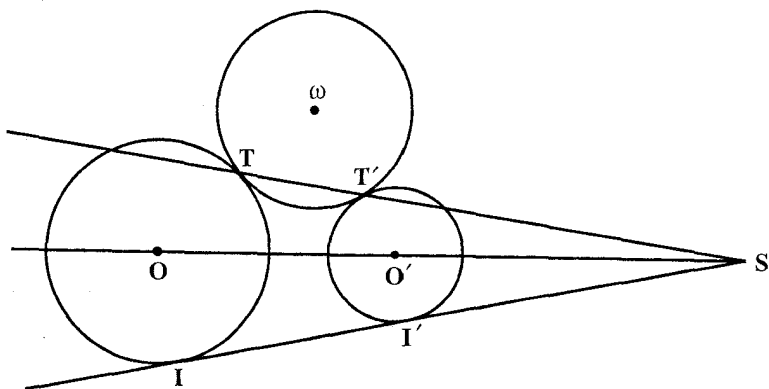
۲۸۰. دو دایره نسبت به هم مماس داخلی‌اند. ثابت کنید که شعاع دایره نیمساز آنها برابر است با واسطهٔ توافقی شعاع‌های آن دو دایره.

۲.۵.۷. ثابت کنید شکل‌ها تبدیل یافتهٔ یکدیگرند

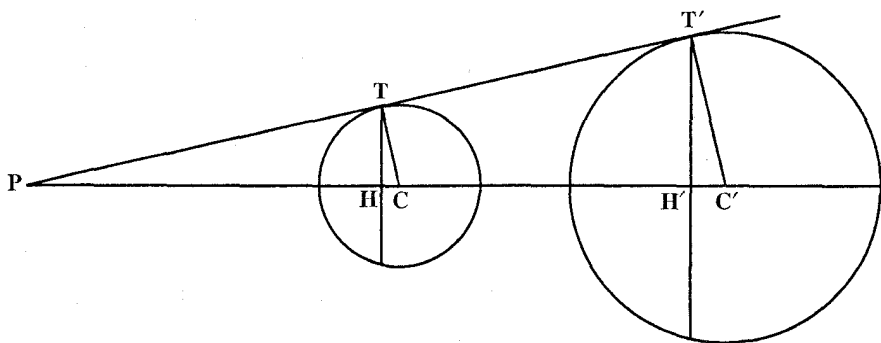
۲۸۱. بر دایرهٔ انعکاس ω نقطهٔ A و قطر BC از آن را در نظر می‌گیریم. قطر عمود بر BC با خط‌های AB و AC در P و P' برخورد می‌کند. ثابت کنید که P' منعکس P است.



۲۸۲. اگر دایره‌ای بر دو دایرة مفروض مماس باشد، نقطه‌های تماس متناظرند (یعنی خط واصل بین نقطه‌های تماس از قطب انعکاس دو دایره می‌گذرد).



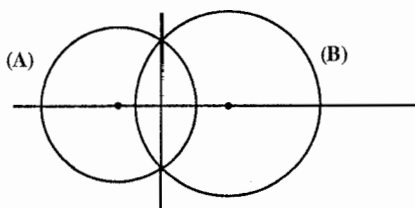
۲۸۳. پای قطبی قطب انعکاس دو دایره نسبت به یکی از آنها، منعکس مرکز دایرة دیگری است.



۲۸۴. نشان دهید دایرة تشابه و محور اصلی دو دایره نسبت به دایرة پاد متشابه آن دو دایره، منعکس یکدیگرند.

۲۸۵. دایرة انعکاس ω به مرکز O و دایرة α گذرنده بر O مفروض است. ثابت کنید که خط منعکس دایرة α عبارت است از محور اصلی دو دایرة ω و α .

۲۸۶. اگر دایره (B) از مرکز دایره (A) بگذرد، نشان دهید که محور اصلی (A) و (B)، منعکس (B)، در انعکاس با دایره انعکاس (A) است.



۲۸۷. اگر دو دایره نسبت به مرکز دلخواهی منعکس شوند، خط‌المركزین آنها به چه شکلی منعکس می‌شود؟

۲۸۸. ثابت کنید که منعکس محور اصلی دو دایره متساوی غیرمشخص، دایره نیمساز آنها است.

۲۸۹. دو دسته دایره مماس عمود بر هم را در نظر بگیرید. هرگاه نقطه مشترک همه این دایره‌ها مرکز دایره انعکاس انتخاب شود و دایره‌ها نسبت به این دایره انعکاس تبدیل گردند، نتیجه حاصل چه خواهد بود؟

۲۹۰. منعکس یک دسته دایره، یک دسته دایره و یا استثنائاً یک دسته خط است.

۲۹۱. منعکس دایره‌ای خارج دایره انعکاس (O,K) و هم‌مرکز با آن چه شکلی است؟

۲۹۲. هرگاه دو دایره عمود بر دایره انعکاس یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، این دو نقطه، نقطه‌های منعکسند.

۲.۵.۸. رسم شکلهای

۲۹۳. دایره‌های (O) و (O') و نقطه‌های A و A' بترتیب بر آنها مفروضند. نقطه S واقع بر

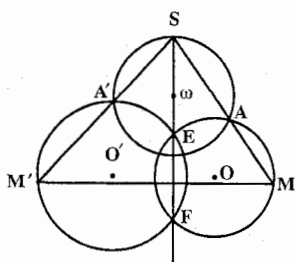
محور اصلی دو دایره را به A و A' وصل کرده،

امتداد می‌دهیم تا دایره‌های (O) و (O') را بترتیب

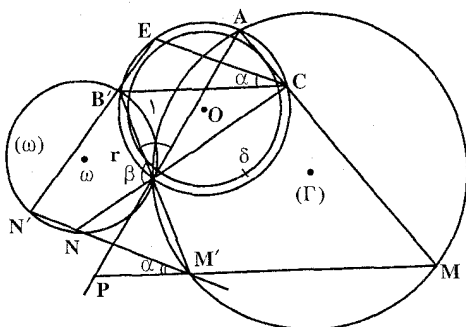
در نقطه‌های دیگر M و M' قطع کند. نقطه S را بر

محور اصلی به نحوی انتخاب کنید که MM' بر

محور اصلی دو دایره عمود باشد.



۲۹۴. در دایرة مفروض مثلثی محاط کنید که ضلعهایش بر سه نقطه معین M ، N و P بگذرد.



۲۹۵. منعکس دایرة (C) را با قطب انعکاس P و قوت انعکاس a رسم کنید.

۲۹۶. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطه A و B بگذرد و بر دایرة مفروض (C) مماس باشد.

۲۹۷. دایره‌ای رسم کنید که بر نقطه مفروض M بگذرد و بر دو دایرة مفروض (C) و (D) مماس شود.

۲۹۸. دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرة مفروض (C) ، (C_1) و (C_2) مماس باشد.

۲۹۹. دایره‌ای رسم کنید که از نقطه A بگذرد و به خط Δ مماس شود و بر دایرة معلوم (C) عمود شود.

۳۰۰. دو دایرة غیر متقاطع داده شده است. دایرة نیمساز آنها را رسم کنید.

۳۰۱. اولاً سه دایرة متساوی رسم کنید که برهم مماس باشند. ثانیاً سه دایرة دیگر با همان ویژگی را چنان رسم کنید که هر کدام از آنها بر دو دایره از مجموعه اول نیز مماس باشند. انحرافهای انعکاسی بین این شش دایره را تعیین کنید.

۳۰۲. ثابت کنید که بر دو نقطه واقع در داخل یک دایره بیش از دو دایره نمی‌توان رسم کرد که بر دایرة مفروض مماس باشند.

۳۰۳. دو دایره بر روی یک کره مفروضند. به وسیله انعکاس آنها را به دو دایرة متحدالمرکز واقع در یک صفحه تبدیل کنید.

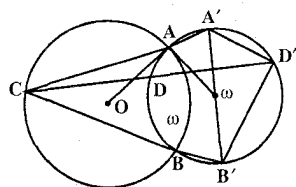
۲.۵.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰۴. مماس متغیری بر دایره‌ای به مرکز A ، دایرة دیگری به مرکز B را در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. ثابت کنید که دایرة BCD بر یک دایرة ثابت مماس است.

۳۰۵. دایره نه نقطه هر مثلث بر دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی مثلث مماس است. (فویرباخ)

۳۰۶. دایره دلخواه a ، نقطه P واقع بر a و نقطه O غیر واقع بر a داده شده است. ثابت کنید که فقط یک دایره وجود دارد که بر O بگذرد و بر a در P مماس باشد.

۳۰۷. ثابت کنید دایره‌های (γ) عمود بر دایره (C) و مماس بر دایره (C') مماس بر یک دایره دیگر نیز می‌باشند.



۳۰۸. دو دایره عمود برهم (O) و (ω) که در نقطه‌های A و B متقاطعند، مفروضند. نقطه‌های C و D را بترتیب بر دایره‌های (O) و (ω) انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، دایره‌های ACD و BCD برهم عمودند.

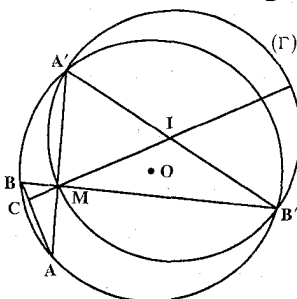
۳۰۹. سه نقطه جدا از هم به فاصله‌های a, b و c از یکدیگر واقعند (ممکن است بر یک خط واقع باشند یا این که مثلثی را تشکیل دهند). به مرکزهای این سه نقطه سه دایره دوه‌دو

برهم مماس می‌توان رسم کرد که شعاعهای آنها $s - a, s - b, s - c$ می‌باشد که s نصف مجموع $a + b + c$ است. ثابت کنید که دو دایره مماس بر این هر سه دایره وجود دارد که باهم نقطه مشترک ندارند. این دو دایره را دایره‌های سدی (Soddy) می‌نامند.

۳۱۰. دایره (O) و نقطه‌های ثابت A و B بر آن مفروض است. مطلوب است مکان هندسی نقطه P قطب انعکاس، به طوری که اگر A' و B' بترتیب، منعکسهای A و B و (O') منعکس دایره (O) باشد. خط $A'B'$ قطری از دایره (O') باشد.

۳۱۱. دو نقطه P_1' و P_2' واقع در دو سر قطری متغیر از کره α را در نظر می‌گیریم و تصویرهای جسم نمایی آنها را روی صفحه α با P_1 و P_2 نشان می‌دهیم. نوع تبدیلی را بیابید که به وسیله آن بتوان در صفحه α از P_1 به P_2 رسید.

۲.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی



۳۱۲. از نقطه M در داخل دایره‌ای دو وتر AA' و BB' را عمود برهم رسم کنید و عمود MC را بر AB فرود آورید.

الف. ثابت کنید که MC از I وسط $A'B'$ می‌گذرد.

ب. ثابت کنید $MC \cdot MI$ مقداری ثابت است.

۳۱۳. دایرة به مرکز O و نقطه ثابت P مفروض است. AOB قطر متغیری از دایره است. PA و PB دایره را در نقطه‌های دیگر A' و B' قطع می‌کنند. ثابت کنید :

۱. دایرة (PAB) از نقطه ثابت دیگری غیر از P می‌گذرد.
۲. دایرة (PA'C') نیز از نقطه ثابت دیگری غیر از P می‌گذرد.
۳. خط A'B' از نقطه ثابتی می‌گذرد.

۳۱۴. نقطه A در سطح دایرة O ثابت است. وترهای BC به طول ثابت a بر روی دایرة O می‌لغزند. خطهای AB و AC به‌طور مرتب دایره را در نقطه‌های B' و C' قطع می‌کنند. ثابت کنید که :

۱. دایرة محیطی مثلث AB'C' بر دایرة ثابتی مماس است. اگر BC به قطر بدل شود، این دایره‌ها بر نقطه ثابتی می‌گذرند.
۲. مکان هندسی مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای AB'C' را تعیین کنید.
۳. مکان هندسی مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABC را تعیین کنید.

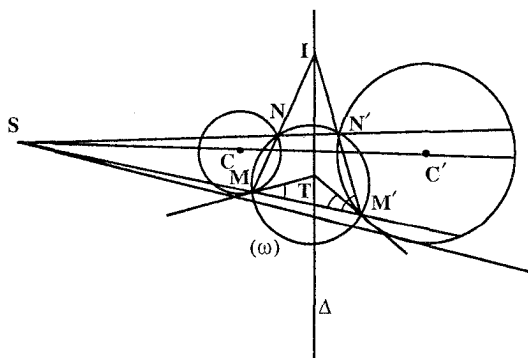
هندسه دوائر، دکتر محسن هشترودى

۳۱۵. در یک صفحه، دایرة مفروض (C) به مرکز O و به شعاع R را در نظر می‌گیریم :

۱. M یک نقطه غیر مشخص از صفحه و (D) خط گذرنده بر M در این صفحه می‌باشد. دایره‌های α و β گذرنده بر M و مماس بر (D) و (C) را رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم A و B، نقطه‌های تماس این دایره‌ها با (C) باشد (با استفاده از انعکاس به قطب M). ثابت کنید دایرة (ABM) بر خط (D) و دایرة (C) عمود است.
۲. فرض می‌کنیم M' نقطه متقاطع M روی دایرة (ABM) باشد. ثابت کنید مکان M' وقتی که (D) حول نقطه M که ثابت فرض می‌شود، دوران کند خط (m) می‌باشد. در همین شرایط مکان هندسی فصل مشترک مماسهای در A و B بر دایرة (C) را به دست آورید.

۳. فرض می‌کنیم (D) یک خط ثابت و فاصله آن از O یعنی $HO = \frac{R}{p}$ و M یک نقطه از خط (D) با فاصله $HM = x$ از H باشد. مطلوب است برحسب R و x شعاع دایره‌های (α) و (β) و تعیین تغییرات نسبت شعاعهای این دایره‌ها وقتی که M خط D را می‌پیماید. مکان مرکزهای دایره‌های (α) و (β) را به دست آورید.

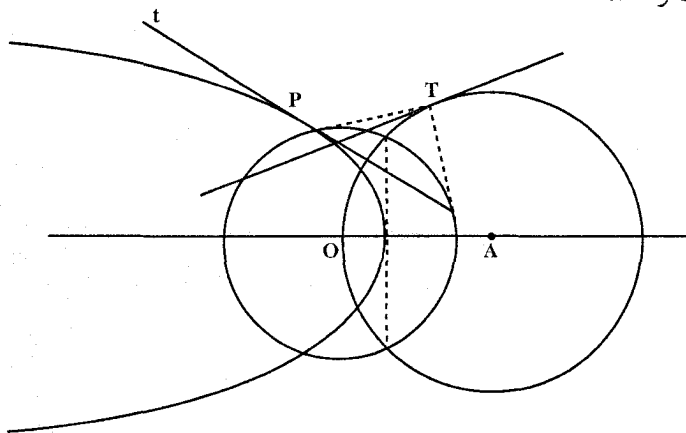
۳۱۶. اگر M و N دو نقطه از دایرة (C) و M' و N' نقطه‌های متناظر آنها از دایرة (C') در انعکاس به قطب (O) باشند، ثابت کنید :



۱. نقطه تقاطع وترهای MN و $M'N'$ روی محور اصلی دو دایره است.
۲. نقطه تقاطع مماسهای بر دو دایره در دو نقطه متناظر بر محور اصلی دو دایره واقع است.
۳۱۷. دایره‌های (O) و (O') که در نقطه‌های A و B متقاطعند، مفروضند. نقطه دلخواه M واقع بر دایره (O) را به A و B وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایره (O') را در A' و B' قطع کند.
۱. ثابت کنید MO بر $A'B'$ عمود است.
۲. پوش $A'B'$ را تعیین کنید.

۶.۲. انعکاس در مقطعهای مخروطی

۳۱۸. ثابت کنید که تصویرهای قائم کانون سهمی بر مماسهای رسم شده بر آن، روی یک خط راست واقعند.



بخش ۳

• تبدیلهای آفین و تصویری

۱.۳. تعریف و قضیه

۲.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در: نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۲.۲.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۳. نقطه‌ها همخطند

۲.۲.۲.۳. تعیین نقطه‌های برخورد

۳.۲.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۲.۳. خطها موازی‌اند

۴.۲.۳. زاویه

۱.۴.۲.۳. اندازه زاویه

۵.۲.۳. پاره خط

۱.۵.۲.۳. اندازه پاره خط

۶.۲.۳. رابطه‌های متریک

۷.۲.۳. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۲.۳. رسم شکلهای

۹.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۲.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مثلث

- ۱.۳.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
- ۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
- ۱.۲.۳.۳. نقطه‌ها همخطند
- ۳.۳.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...
- ۱.۳.۳.۳. خطها هم‌رسند
- ۴.۳.۳. زاویه
- ۱.۴.۳.۳. اندازه زاویه
- ۵.۳.۳. پاره خط
- ۱.۵.۳.۳. اندازه پاره خط
- ۶.۳.۳. رابطه‌های متری
- ۷.۳.۳. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند
- ۸.۳.۳. رسم شکلهای
- ۹.۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
- ۱۰.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

۴.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در چندضلعیها

- ۱.۴.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...
- ۲.۴.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...
- ۱.۲.۴.۳. نقطه‌ها همخطند
- ۳.۴.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...
- ۱.۳.۴.۳. خطها هم‌رسند
- ۴.۴.۳. زاویه
- ۱.۴.۴.۳. اندازه زاویه
- ۵.۴.۳. پاره خط
- ۱.۵.۴.۳. رابطه بین پاره خطها
- ۶.۴.۳. رابطه‌های متری
- ۷.۴.۳. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۴.۳ رسم شکلها

۹.۴.۳ سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۴.۳ مسأله‌های ترکیبی

۵.۳ تبدیلهای آفین و تصویری در دایره

۱.۵.۳ مرکز تصویر، محور تصویر

۲.۵.۳ نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۳ نقطه‌ها همخطند

۲.۲.۵.۳ نقطه‌ها بر هم منطبقند

۳.۵.۳ خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۵.۳ خطها موازی‌اند

۴.۵.۳ زاویه

۱.۴.۵.۳ اندازه زاویه

۵.۵.۳ پاره خط

۱.۵.۵.۳ رابطه بین پاره خطها

۶.۵.۳ رابطه‌های متری

۷.۵.۳ ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۵.۳ رسم شکلها

۹.۵.۳ سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰.۵.۳ مسأله‌های ترکیبی

۶.۳ تبدیلهای آفین و تصویری در مقطعهای مخروطی

۱.۶.۳ مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۲.۶.۳ نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۶.۳ نقطه‌ها همدایره‌اند

۳.۶.۳ خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۶.۳ خطها موازی‌اند

۴.۶.۳ زاویه

۱.۴.۶.۳ اندازه زاویه

۵.۶.۳. پاره خط

۱.۵.۶.۳. اندازه پاره خط

۶.۶.۳. رابطه های مترى

۷.۶.۳. ثابت كنید شكلها تبدیل یافته یکدیگرند

۸.۶.۳. رسم شكلها

بخش ۳. تبدیلهای آفین و تصویری

۱.۳. تعریف و قضیه

تبدیلهای آفین و تصویری که در این کتاب مورد بررسی قرار می‌گیرند، عبارتند از:

۱. تصویر قائم روی خط و صفحه
 ۲. تصویر موازی یک صفحه بر یک صفحه. تبدیلهای آفین صفحه
 ۳. تصویر مرکزی یک صفحه بر یک صفحه. تبدیل تصویری یک صفحه
 ۴. تصویر مرکزی که یک دایره را به دایره بدل می‌کند. تصویر گنجگاشتی
 ۵. تبدیل تصویر یک خط و یک دایره. ترسیم به کمک ستاره
- در این قسمت تعریفها و قضیه‌های مربوط به این تبدیلهای را می‌آوریم.

هندسه تصویری

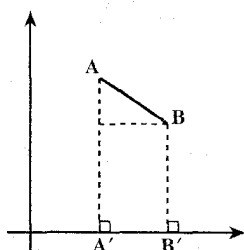
(از دیدگاه جیمز. ار. اسمارت. نویسنده کتاب هندسه‌های جدید)

هندسه تصویری یکی از هندسه‌های جدیدی است که در اوایل قرن نوزدهم معرفی شده است. هندسه اقلیدسی، به این مفهوم که گروه حرکت‌های اقلیدسی، زیرگروه گروه تبدیلات تصویری‌اند، حالت خاصی از هندسه تصویری است.

هندسه تصویری شامل مفاهیم ریاضی بسیاری است، که در هندسه‌های قبلی با آنها مواجه نشده‌ایم، و کاربردهای عملی‌ای بیش از حد انتظار دارد.

در هندسه تحلیلی معمولی، از تصویر یک قطعه خط بر یک محور استفاده می‌شود، و چنان که در شکل (الف) به تصویر آمده، AB بر محور x ها با وارد کردن عمودهای AA' و BB' بر آن تصویر شده است، و گرچه AB و $A'B'$ معمولاً مساوی نیستند، بین نقطه‌های آنها به وسیله تصویر ذکر شده، تناظری یک به یک به وجود آمده است.

کاربرد آشنای دیگری از کلمه تصویر (Projection)، در رابطه با پروژکتور تصویر متحرک است. در این مورد، چنان که در شکل (ب. ۱) مطرح شده، تصویر فیلم بر پرده مصور می‌شود. باید آشکار باشد که تصویرهای فیلم و پرده، از آن‌جا که شکل، هنگامی که اندازه به طور یکنواخت تغییر می‌کند، بدون تغییر می‌ماند، مشابه یکدیگرند. اما، در شکل (ب. ۲) تصویر پرده به علت این که فیلم و پرده موازی نیستند، تغییر شکل داده است. در این حالت، دیگر

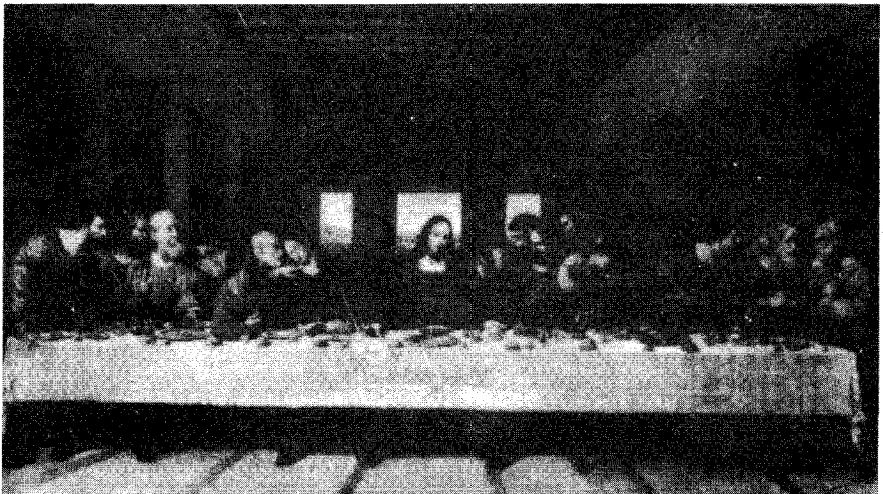
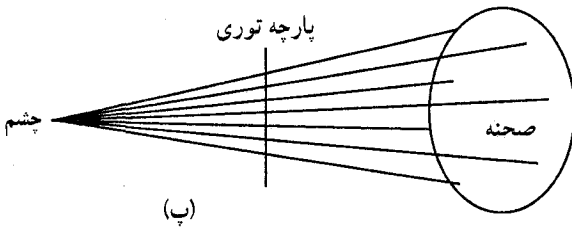
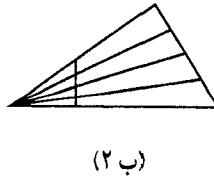
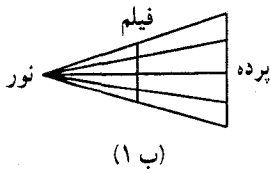


(الف)

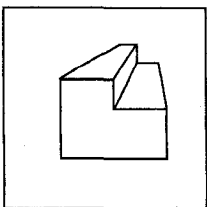
شکلها متشابه نیستند، و آشکار نیست که کدام یک از خواص آنها بی تغییر باقی می ماند. حتی نسبتهای فاصله ها نیز دیگر بدون تغییر نیستند.

شکل (ب) نیز می تواند رابطه

بین تصویر و مفهوم پرسپکتیو را چنان که در هنر نقاشی به کار می رود، مطرح کند. بسیاری از نقاشان معروف، بخصوص طی دوره رنسانس، کوشیدند که از مفاهیم ریاضی، برای کمک به خلق، توهم عمق (Illusion of Depth) در نقاشی استفاده کنند.

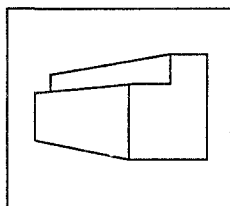


(ت)



(ث ۱)

یکی از تدبیرهای به کار رفته در این مورد، چنان که در شکل (پ) به تصویر آمده، تصویر جای اشیای موجود در نقاشی به این صورت که توسط نقطه تقاطع پارچه ای توری و خط از چشم به شیء مشخص



(ت ۲)

شده باشند، بود.

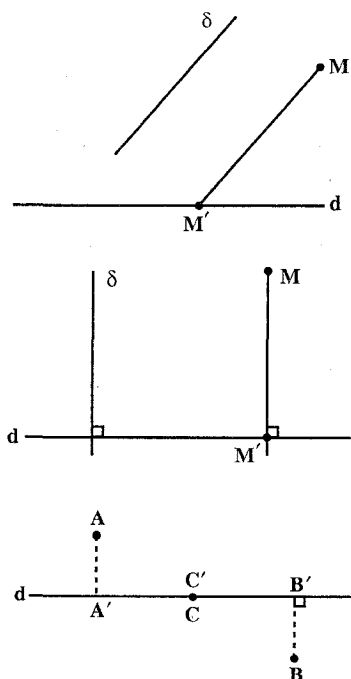
دومین استفاده از هندسه در به دست دادن توهم عمق در نقاشی، پرسپکتیو خطی (Linear Perspective) نام دارد. این مفهوم شامل این اصل که خطهای موازی چون توسط ناظر دریافت شوند، همرس به نظر می‌رسند، است؛ به عنوان مثال ریلهای راه‌آهن، ملاقی در خط افق به چشم می‌خورند. نقاشان این معنی را با همرس قرار

دادن خطهای متوازی (در صحنه واقعی) در یک یا بیشتر از یک نقطه محو (Vanishing point) به کار می‌برند. یکی از مثالهای مشهور نقاشی با نقطه محو، آخرین شام (The last supper) اثر لئوناردو داوینچی، نشان داده شده در شکل (ت) است.

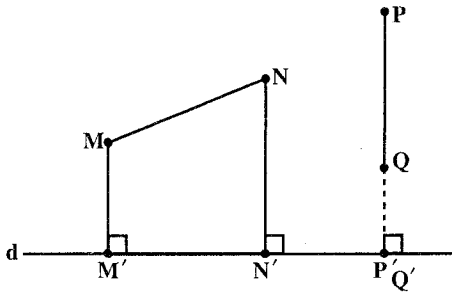
شکلهای (ت ۱) و (ت ۲)، طرحهایی که در آنها نقطه محو در مرکز نیست، را نشان می‌دهد. بیننده باید بتواند در هر حالت این نقطه را مشخص کند.

۱. تصویر قائم روی خط و صفحه

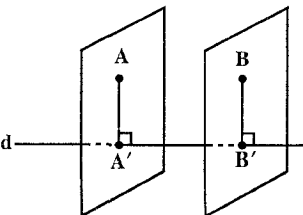
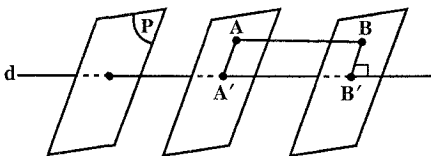
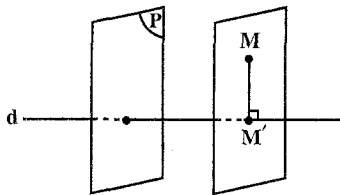
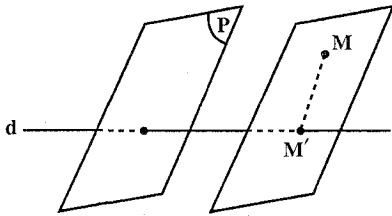
تصویر روی خط به موازات امتداد معین



خط ثابت d و امتداد δ غیر موازی با d را در نظر می‌گیریم. تبدیل T را چنان تعریف می‌کنیم که هر نقطه M را به نقطه برخورد خط d با خطی که از M موازی امتداد δ رسم شده است، تبدیل کند. اگر این نقطه را M' بنامیم، M' را تصویر نقطه M روی خط d به موازات امتداد δ می‌نامند. اگر امتداد δ بر خط d عمود باشد، M' ، تصویر قائم نقطه M روی خط d نامیده می‌شود. تبدیل T را تصویر به موازات امتداد معین (یا تصویر قائم) بر خط d می‌نامیم. بعد از این فرض می‌کنیم که امتداد δ بر خط d عمود باشد، بنابراین منظور از تصویر روی خط، تصویر قائم است. شکل، تبدیل یافته‌های نقطه‌های A ، B و C را که بترتیب با A' ، B' و C' نمایش داده شده‌اند، نشان می‌دهد. بسادگی دیده می‌شود که اگر پاره خط MN بر خط



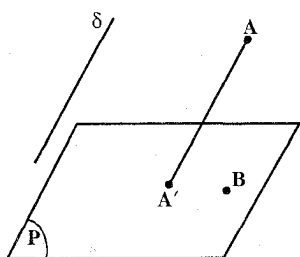
d عمود نباشد، تصویر MN بر خط d (یعنی تبدیل یافته پاره خط MN) همان پاره خط $M'N'$ است که M' تصویر M و N' تصویر N می باشد. چنانچه خط PQ بر d عمود باشد، تصویر PQ بر d یک نقطه خواهد شد (شکل).



تصویر روی خط به موازات یک صفحه خط d و صفحه P غیر موازی با d را در نظر می گیریم. از نقطه M صفحه ای موازی صفحه P رسم می کنیم تا خط d را در نقطه M' قطع کند. M' را تصویر نقطه M روی خط d به موازات صفحه P می نامیم؛ اگر صفحه P بر خط d عمود باشد، تصویر قائم نامیده می شود.

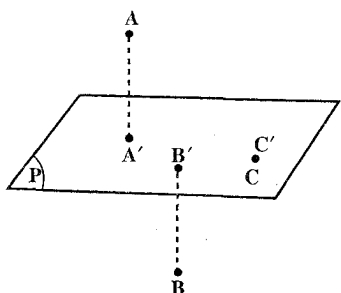
برای پیدا کردن تصویر پاره خط AB بر خط d، به موازات صفحه P، از A و B دو صفحه موازی صفحه P رسم می کنیم تا خط d را در نقطه های A' و B' قطع کنند. پاره خط $A'B'$ تصویر پاره خط AB به موازات صفحه P روی خط d است. برای تعیین تصویر قائم پاره خط AB بر خط d از A و B دو صفحه بر خط d عمود می کنیم. A' و B' نقطه های برخورد این دو صفحه با خط d، تصویرهای قائم دو نقطه A و B بر خط d می باشند. بدیهی است AB و d می توانند متنافر باشند.

تصویر روی صفحه به موازات امتداد معین



صفحه P و امتداد δ غیر موازی با صفحه P را در نظر می گیریم. از نقطه A خطی موازی امتداد δ رسم می کنیم تا صفحه P را در نقطه A' قطع کند. A' را تصویر نقطه A روی صفحه P به موازات امتداد δ می نامند. اگر نقطه روی صفحه باشد، تصویرش بر خودش منطبق است، مانند نقطه B در شکل.

تصویر قائم روی صفحه



صفحه ثابت P را در نظر می گیریم، تبدیل T را در فضای سه بعدی چنان تعریف می کنیم که هر نقطه دلخواه M از فضا را به نقطه برخورد صفحه P با خطی که از M می گذرد و بر P عمود است، تبدیل کند. این تبدیل را تصویر بر صفحه (یا دقیقتر بگوییم، تصویر قائم بر صفحه) می نامیم. در شکل تبدیل یافته های نقطه های A ، B و C برترتیب با A' ، B' و C' نمایش داده شده اند.

۳۱۹. قضیه. اگر خط δ بر صفحه P عمود نباشد، تصویر δ بر P یک خط راست است.
۳۲۰. قضیه. اگر دو خط باهم موازی باشند، ولی بر صفحه P عمود نباشند، تصویرهای آنها بر صفحه P باهم موازی یا بر هم منطبقند.
۳۲۱. قضیه. تصویرهای دو پاره خط متوازی که بر صفحه تصویر عمود نیستند، با آن پاره خطها متناسبند.

تصویر زاویه قائمه بر صفحه

تصویر هر زاویه بر هر صفحه موازی با صفحه آن زاویه، با خود زاویه مساوی است (چرا؟). و در سایر حالتها، ممکن است کوچکتر یا بزرگتر از آن باشد.

تصویر (قائم) زاویه قائمه بر یک صفحه در حالت خاصی ممکن است زاویه قائمه باشد. در این بخش حالتی را که تصویر زاویه قائمه بر صفحه ناموازی با صفحه آن، زاویه قائمه است بررسی می کنیم.

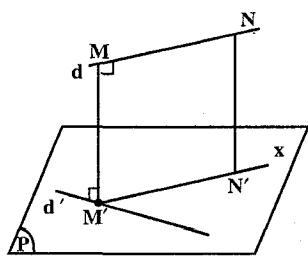
۳۲۲. قضیه. تصویر زاویه قائمه بر صفحه‌ای که با یک ضلع آن موازی و بر ضلع دیگر آن عمود نباشد، یک زاویه قائمه است.

۳۲۳. هرگاه تصویرهای دو خط بر یک صفحه عمود برهم باشند و یکی از آنها دو خط با صفحه تصویر موازی باشد، آن دو خط بر یکدیگر عمودند.

۳۲۴. قضیه. هرگاه تصویر زاویه قائمه‌ای بر یک صفحه زاویه قائمه باشد، دست کم یکی از ضلعهای آن زاویه با صفحه تصویر موازی است.

۳۲۵. عمود مشترک دو خط متنافر. تعریف. عمود مشترک دو خط متنافر پاره خطی است که بر هر دو خط عمود باشد و دوسر آن بر دو خط مزبور واقع باشند.

برای مشخص کردن عمود مشترک دو خط متنافر به طریق زیر عمل می‌شود:



اگر d و d' را دو خط متنافر و پاره خط MM' را عمود مشترک آن دو فرض کنیم (شکل) و از نقطه M' خط $M'x$ را موازی d در نظر بگیریم، دو خط d' و $M'x$ صفحه‌ای مانند P مشخص می‌کنند. $M'x$ تصویر خط d بر این صفحه است (چرا؟)؛ بنابراین تصویر هر نقطه N از خط d بر

صفحه P روی خط $M'x$ واقع است. از این جا نتیجه می‌شود که اگر بر خط d' صفحه P را موازی خط d مرور دهیم و نقطه N' تصویر نقطه غیر مشخص N از خط d را بر صفحه P تعیین کنیم، و از نقطه N' خطی موازی d رسم کنیم، این خط با d' در نقطه M' تلاقی می‌کند و عمودی که از نقطه M' بر صفحه P اخراج شود، خط d را در نقطه M قطع می‌کند و MM' عمود مشترک دو خط داده شده است.

طول پاره خط MM' (عمود مشترک دو خط متنافر d و d') را که کوتاهترین پاره خط متکی بر d و d' است، فاصله دو خط متنافر d و d' می‌نامند.

۲. تصویر موازی یک صفحه بر یک صفحه

تبدیل‌های آفین صفحه

گیریم π و π' دو صفحه متمایز (موازی یا متقاطع) و خط a امتدادی غیر موازی با این دو صفحه باشند. منظور از تصویر موازی π بر π' در امتداد a ، نگاشتی است از π بر π' که به هر نقطه P از π ، یک نقطه P' از π' را به گونه‌ای مربوط کند که خط PP' به موازات

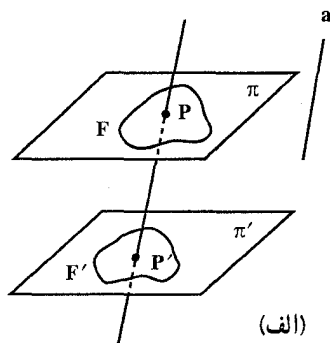
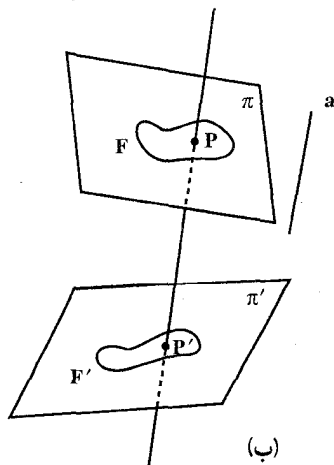
a باشد. (شکلهای (الف) و (ب)) این نگاشت هر شکل F از صفحه π را به شکلی مانند F' در π' بدل می کند. نگاره (سایه یا تصویر) یک پنجره بر کف اتاق بر اثر تابش نور خورشید (شکل (ب)) می تواند به عنوان نتیجه یک تصویر موازی انگاشته شود.

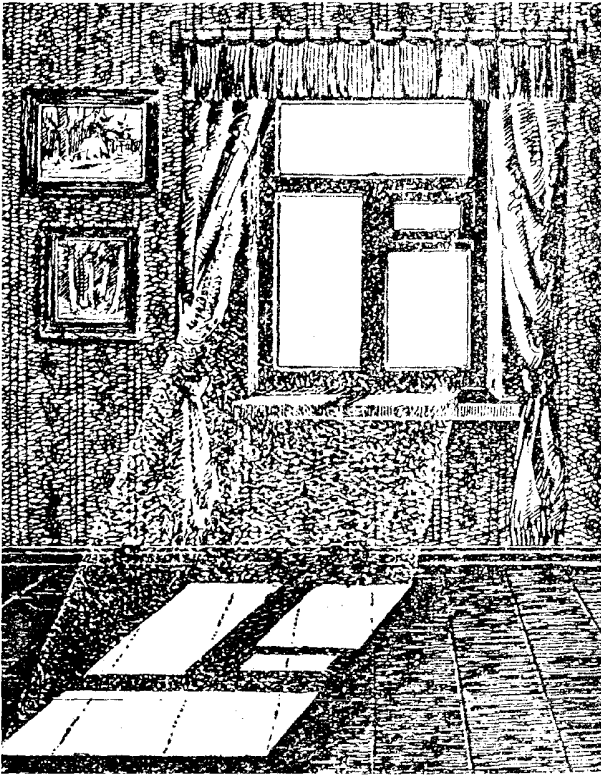
هرگاه صفحه های π و π' موازی باشند، تصویر موازی، یک شکل واقع در صفحه π را، به شکلی قابل انطباق با آن در π' بدل می کند (در این حال تصویر موازی به یک انتقال در امتداد خط a در فضا بدل می شود؛ (شکل (الف))) اگر صفحات π و π' موازی نباشند، تصویر موازی، شکل اصلی شکلها را، ببقواره می کند (شکل ب)؛ (توجه خواننده را به ببقوارگی سایه های اجسام به هنگام طلوع و غروب خورشید جلب می کنیم).

اغلب می توان با انتخاب تصویر موازی مناسب و در نظر گرفتن نگاره (تصویر) پیکربندیها بر اثر آن، حل مسأله های هندسی را ساده کرد. این بخش به این روش حل مسأله ها تخصیص داده شده است. ولی، ابتدا باید ویژگیهای بنیادی تصویر موازی را بررسی کنیم.

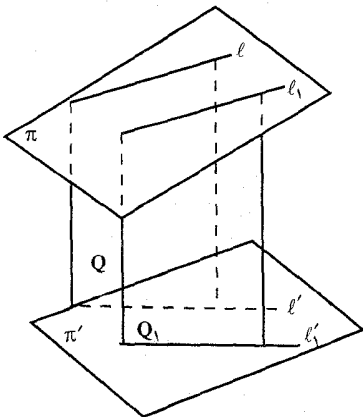
(الف) در تصویر موازی، خطهای صفحه π بر خطهای صفحه π' نگاشته می شوند. زیرا خطهای موازی با a که از نقطه های یک خط l از صفحه π رسم شوند، یک صفحه Q (گذرنده بر l و موازی با a) تشکیل می دهند. در نتیجه نگاره l بر اثر تصویر موازی، خط l' فصل مشترک صفحه Q با π خواهد بود (شکل ت). بعکس، هر خط در π' ، نگاره خطی از صفحه π است.

(ب) در تصویر موازی، خطهای موازی، به خطهای موازی بدل می شوند. زیرا هرگاه l و l_1 دو خط موازی واقع در صفحه π باشند، صفحه های Q و Q_1 موازی با a و گذرنده بر l و l_1 موازی اند. در نتیجه l' و l'_1 فصل مشترکهای Q و Q_1 با π' ، موازی می شوند (شکل ت).

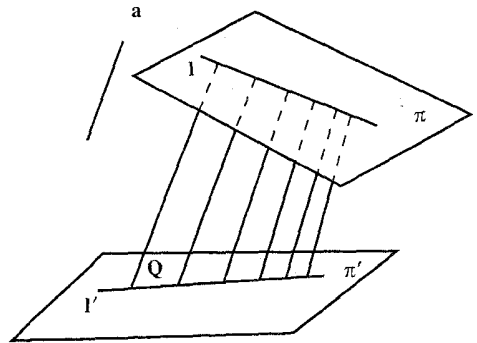




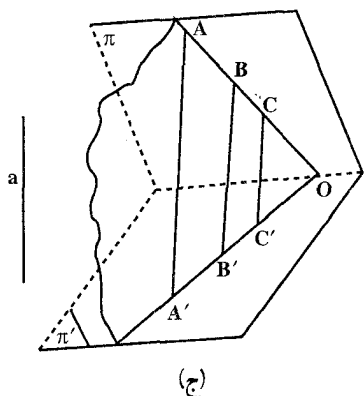
(ب)



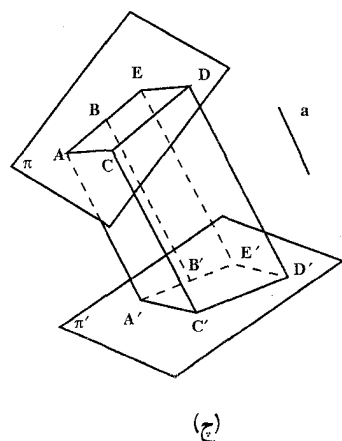
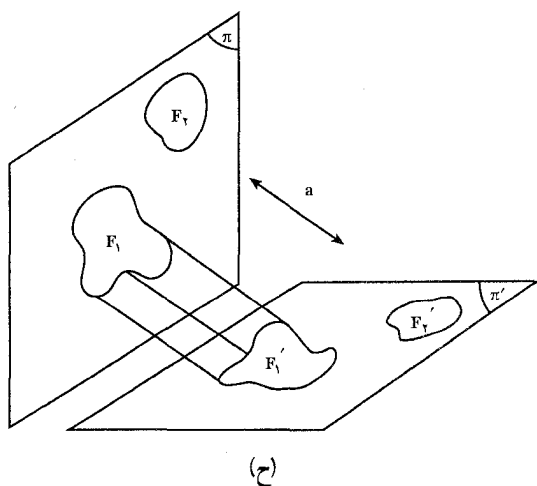
(ث)



(ج)



(ج) در تصویر موازی، نسبت طولهای دو پاره خط همخط، محفوظ می ماند. این نتیجه بلا فصل این قضیه است که: خطهای موازی، از ضلعهای یک زاویه، پاره خطهای متناسب جدا می کنند (شکل ج)؛ که $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$. در تصویر موازی، نسبت طولهای دو پاره خط واقع بر دو خط موازی نیز محفوظ می ماند؛ زیرا فرض می کنیم AB و CD دو



پاره خط در صفحه π باشند، به طوری که $AB \parallel CD$ ، و فرض می کنیم E نقطه ای باشد بر AB، چنان که $ED \parallel AC$ (شکل ج). یک تصویر موازی متوازی الاضلاع ACDE را به متوازی الاضلاع $A'C'D'E'$ بدل می کند (زیرا پاره خط AB به پاره خط $A'B'$ ، و خطهای موازی به خطهای موازی بدل می شوند). لذا (با توجه به این که در تصویر موازی نسبت طولهای دو پاره خط همخط، محفوظ می ماند) می بینیم که:

$$\frac{CD}{AB} = \frac{AE}{AB} = \frac{A'E'}{A'B'} = \frac{C'D'}{A'B'}$$

(د) در تصویر موازی، نسبت بین مساحتهای دو شکل مسطح محفوظ می ماند. برای اثبات این حکم، در صفحه π شبکه ای از مربعهای قابل انطباق باهم رسم می کنیم. ویژگیهای (ب) و (ج) ایجاب می کنند که تصویر موازی، این شبکه از مربعها را به شبکه ای از متوازی الاضلاعهای

قابل انطباق باهم، واقع در π' بدل کند (شکل ح).

گیریم F_1 و F_2 دو شکل در π و F'_1 و F'_2 نگاره‌های آنها در π' بر اثر یک تصویر موازی باشند. اگر مربعهای شبکه به قدر کافی ریز باشند، تفاوت نسبت تعداد مربعهای داخل F_1 به تعداد مربعهای داخل F_2 با نسبت $\frac{S_1}{S_2}$ ی مساحت‌های شکل‌های F_1 و F_2 از هر عدد دلخواهی کوچکتر است و نیز تفاوت نسبت تعداد متوازی‌الاضلاعهای داخل F'_1 به تعداد متوازی‌الاضلاعهای داخل F'_2 با نسبت $\frac{S'_1}{S'_2}$ ی مساحت‌های F'_1 و F'_2 از هر عدد دلخواهی کوچکتر است. چون تعداد مربعهای F_1 با تعداد متوازی‌الاضلاعهای F'_1 برابر است و تعداد مربعهای S_2 با تعداد متوازی‌الاضلاعهای F'_2 ، در نتیجه $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S'_1}{S'_2}$ و حکم ثابت می‌شود.

اکنون به اثبات قضیه بنیادی تصویرهای موازی می‌پردازیم.

۳۲۶. قضیه ۱. گیریم A, B و C سه نقطه ناهمخط در یک صفحه π باشند و M, N و P ، سه نقطه ناهمخط در یک صفحه π' . صفحه‌های π و π' را می‌توان در فضا چنان قرار داد که بر اثر تصویری موازی از π بر π' مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$ متشابه با مثلث MNP بدل شود.

نگاشت موازی صفحه بر خودش

تاکنون همواره فرض کرده‌ایم که دو صفحه π و π' متمایزند. به همین دلیل است که در این بخش از نگاشتهای یک صفحه π بر یک صفحه π' صحبت کردیم، نه از تبدیلهای یک صفحه بر روی خودش (که مثالهایی از طولیایها و تشابه‌ها هستند).

حال تبدیلی از صفحه π بر خودش را در نظر می‌گیریم که از حرکت π در فضا و نگاشت آن بر اثر تصویری موازی بر وضعیت اول خود نتیجه می‌شود. این تبدیل را یک نگاشت موازی صفحه بر خودش می‌نامیم. هر طولیایی، حالت خاصی از این تبدیل صفحه است. یک تصویر موازی صفحه بر خودش یک طولیایی است به شرطی که وضع جدید صفحه در فضا با وضع اولیه‌اش موازی باشد.

ویژگی (الف) از تصویر موازی ایجاب می‌کند که بر اثر تصویر موازی یک صفحه بر خودش خط به خط بدل شود. یک تبدیل یک‌به‌یک از صفحه بر خودش که خط را به خط بدل کند، یک تبدیل آفین نام دارد. طولیایها و تشابه‌های یک صفحه، ساده‌ترین مثال

برای تبدیل آفین هستند. تصویر موازی یک صفحه بر خودش، تبدیل آفینی کلیتر از طولیایها و تشابه‌ها است؛ زیرا نیاز به حفظ نسبت طولهای پاره‌خطها ندارد و از این رو، در حالت کلی ریخت یک شکل را دگرگون می‌کند. از این جا نتیجه می‌شود که هر تبدیل آفین از یک صفحه اساساً یک تصویر موازی از آن صفحه است بر خودش.

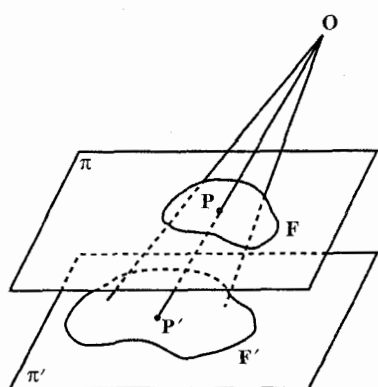
۳۲۷. قضیه ۲. هر تبدیل آفین از یک صفحه می‌تواند بر اثر یک تصویر موازی از صفحه بر خودش و متعاقب آن یک تشابه تحقق یابد.

این قضیه نشان می‌دهد که مطالعه ویژگیهای تبدیل آفین با مطالعه ویژگیهای مشترک بین تصویر موازی یک صفحه بر خودش و تشابه‌های مترادف است؛ به‌ویژه این امر ایجاب می‌کند که تبدیلهای آفین یک صفحه ویژگیهای (ب)، (ج) و (د) را داشته باشند، زیرا اینها ویژگیهایی هستند که بین تصویرهای موازی یک صفحه بر خودش و تشابه‌ها مشترکند، و نیز قضیه ۲ ماهیت حاصلضرب دو یا چند تصویر موازی صفحه بر خودش را روشن می‌سازد؛ یعنی نشان می‌دهد که چنین حاصلضربی مجدداً یک تصویر موازی صفحه بر خودش و احتمالاً متعاقب آن یک تشابه است (زیرا چنین حاصلضربی، روشن است که یک تبدیل آفین از صفحه است).

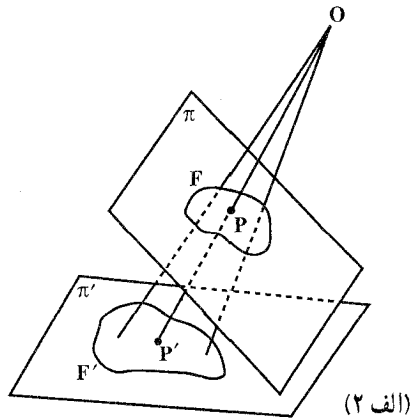
۳۲۸. قضیه ۳. یک تبدیل آفین منحصر به فرد از صفحه وجود دارد که ۳ نقطه ناهمخط A ، B و C را به سه نقطه ناهمخط A' ، B' و C' بدل می‌کند.

۳. تصویر مرکزی یک صفحه بر یک صفحه

تبدیل تصویری یک صفحه

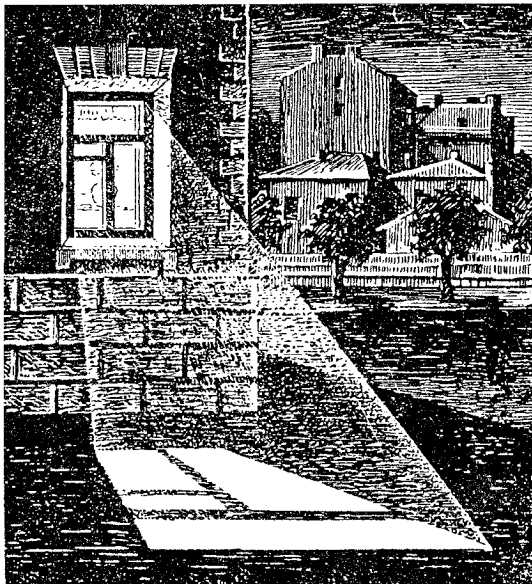


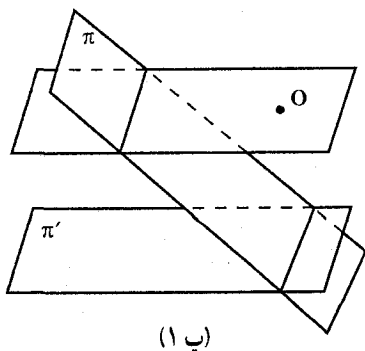
فرض می‌کنیم π و π' دو صفحه در فضا باشند. یک نقطه O که بر هیچ یک از این دو صفحه نباشد، انتخاب و از این نقطه، صفحه π را بر صفحه π' تصویر می‌کنیم، یعنی به هر نقطه P در π ، نقطه P' واقع بر π' را چنان مربوط می‌کنیم که P' بر OP واقع باشد. (شکل‌های الف و ب).



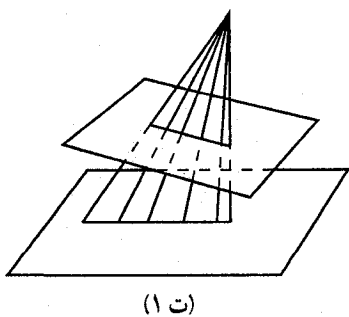
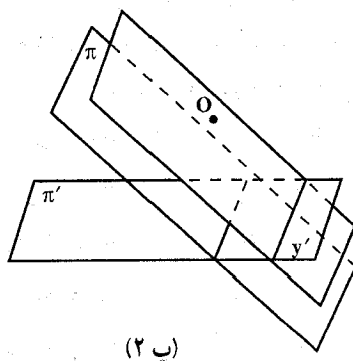
نگاشتی که چنین تعریف کردیم، تصویر مرکزی (π بر π') به مرکز O نامیده می‌شود. بر اثر تصویر مرکزی، نگاره یک شکل F از π ، شکل F' از π' است (مثلاً، سایه‌ای را مجسم کنید که در شب از چارچوب پنجره یک اتاق بسیار روشن بر خیابان افتاده است (شکل ب)).

اگر صفحه‌های π و π' موازی باشند، یک تصویر مرکزی از π بر π' هر شکل F از π را به شکل مشابهش F' در π' بدل می‌کند (در این حالت یک تجانس به مرکز O پدید می‌آورد شکل (الف ۱)). در نتیجه قبل از همه سر و کار ما با حالتی است که π و π' موازی نباشند (شکل الف ۲).

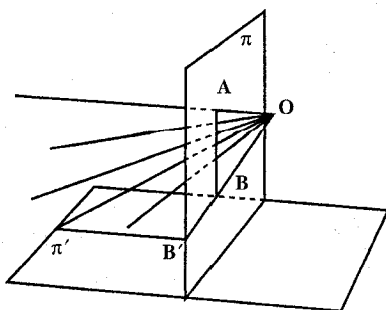


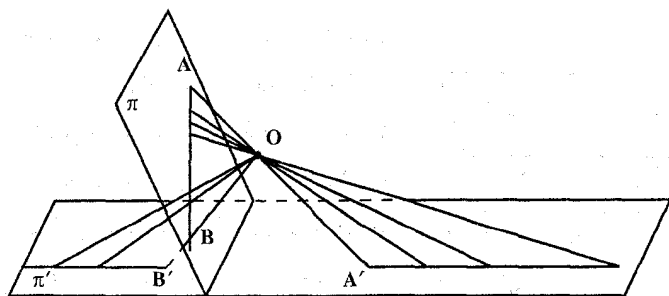


ملاحظه می‌کنیم که در حالت اخیر در π خطی وجود دارد که نقطه‌های آن نگاره‌ای در π' ندارند، و آن خط، x فصل مشترک π با صفحه‌ای است که بر O می‌گذرد و با π' موازی است (شکل پ ۱)؛ و نیز در π' خطی وجود دارد که نقطه‌های آن پیشنگاشتی در صفحه π ندارند، و آن، خط y' ، فصل مشترک π' با صفحه‌ای است که بر O می‌گذرد و با π موازی است (شکل پ ۲).



بنابراین در تصویر مرکزی یک صفحه π بر یک صفحه π' ، دو خط استثنایی (یکی در π و دیگری در π') وجود دارند که آنها را خطهای خاص صفحه‌های π و π' می‌نامیم (روشن است که x با z' موازی و هر دو با فصل مشترک صفحه‌های π و π' موازیند). در تصویر مرکزی، خیلی بیشتر از تصویر موازی، ریخت شکلهای تغییر می‌کند.

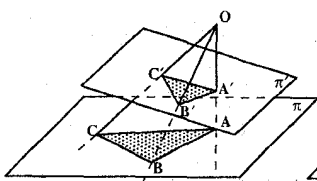




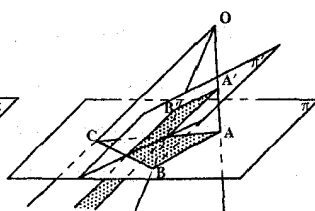
(ت ۳)

نگارهٔ یک پاره خط بر اثر تصویر مرکزی، ممکن است یک پاره خط یا دو نیمخط (شکل ت)، و نگاره‌های یک مثلث، ممکن است یکی از شکلهای در شکل (ت ۵-۱) باشد. اغلب ممکن است یک نمودار پیچیده را به وسیلهٔ یک تصویر مرکزی مناسب ساده کرد و بدین ترتیب حل بعضی مسأله‌های مربوط به آن نمودار را آسانتر نمود. در این گونه موارد از ویژگیهای تصویر مرکزی به شرح زیر استفاده خواهیم کرد:

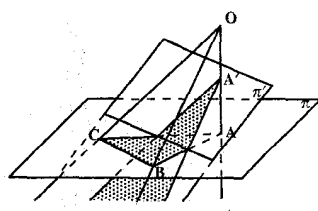
الف) در تصویر مرکزی خطهای صفحهٔ π به خطهای صفحهٔ π' بدل می‌شوند (به استثنای خط خاص x در صفحهٔ π که نقطه‌هایش، چنان که قبلاً اشاره شد، به هیچ یک از نقطه‌های π' بدل نمی‌شوند). زیرا، خطهای وصل شده بین نقطهٔ O و نقطه‌های خط l از صفحهٔ π ، یک



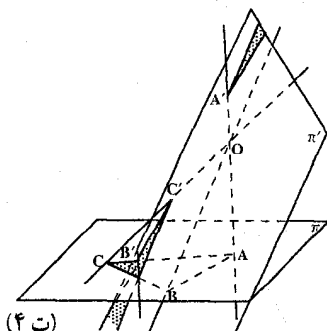
(ت ۱)



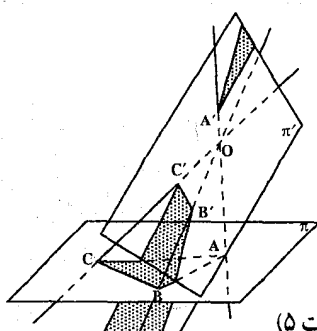
(ت ۲)



(ت ۳)

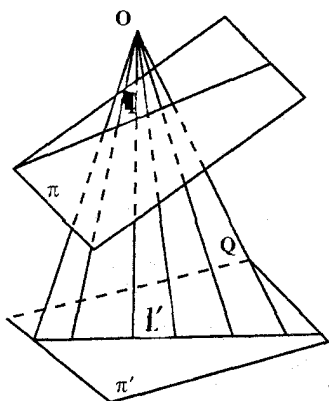


(ت ۴)

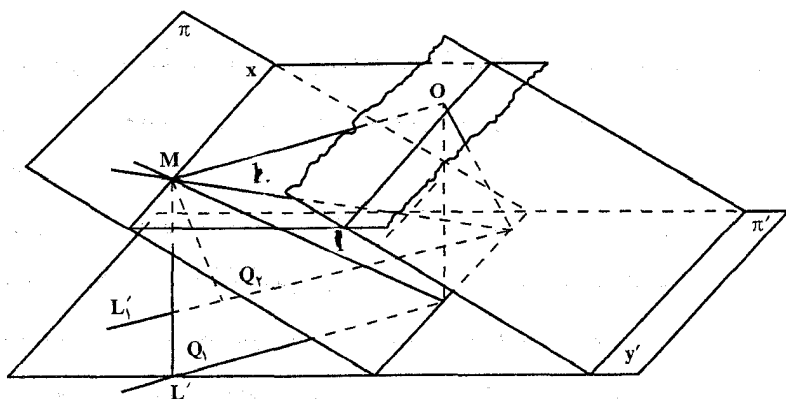


(ت ۵)

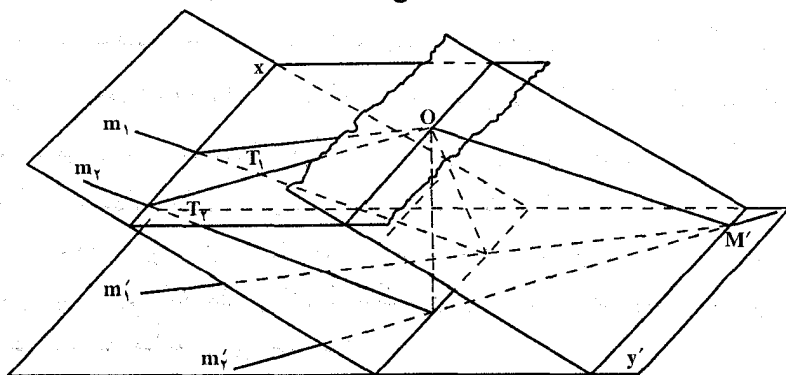
صفحه Q پدید می‌آورند. تصویر به مرکز O ، خط l را به خط l' فصل مشترک Q و π' بدل می‌کند (شکل ج).
 بعکس، هر خط l' از صفحه π' (به استثنای خط خاص y') نگاره یک خط l از صفحه π است.



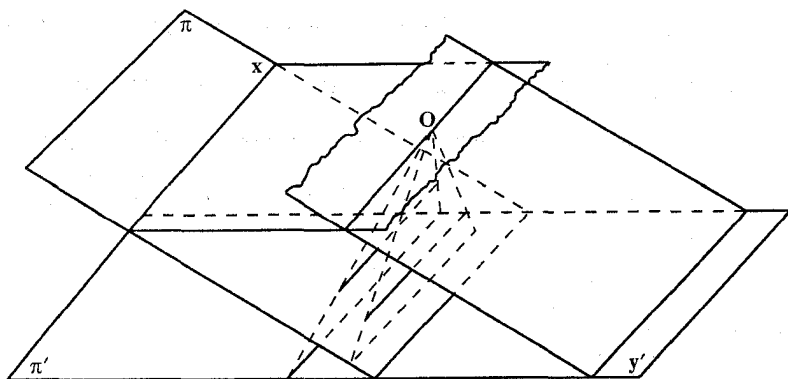
(ج)



(ج ۱)



(ج ۲)



(ج ۳)

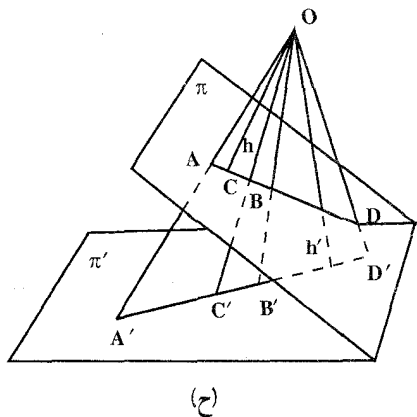
(ب) گیریم که خطهای l_1 و l_2 از صفحه π یکدیگر را در یک نقطه M روی خط خاص x ببرند. در این حالت نگاره آنها بر اثر یک تصویر مرکزی، دو خط موازی l'_1 و l'_2 از π' خواهد شد.

زیرا در این حال صفحه‌های Q_1 و Q_2 که از نقطه O و خطهای l_1 و l_2 تشکیل می‌شوند، یکدیگر را در OM که موازی π' است، می‌برند. از آنجا نتیجه می‌شود که l'_1 و l'_2 نگاره‌های l_1 و l_2 ، خطهایی موازی در صفحه π' هستند (شکل چ ۱).

در تصویر مرکزی، دو خط موازی m_1 و m_2 از π به دو خط متقاطع m'_1 و m'_2 از π' بدل می‌شوند که نقطه تلاقی آنها M' ، بر خط خاص y' واقع است. این نکته از این واقعیت نتیجه می‌شود که صفحه‌های T_1 و T_2 که بترتیب از O و خطهای m_1 و m_2 تشکیل می‌شوند، یکدیگر را در خط OM' قطع می‌کنند که با π موازی است و π' را در یک نقطه M' واقع بر خط خاص y' تلاقی می‌کند (شکل چ ۲). استثنا بر این قاعده خطهای موازی با x هستند؛ این خطها بر خطهای موازی با y' نگاشته می‌شوند (شکل چ ۳).

با استفاده از ویژگیهای (الف) و (ب) از تصویر مرکزی، می‌توانیم یک عده قضیه‌های جالب را اثبات کنیم. (ملاحظه می‌کنیم که حکمهای برخی از این قضیه‌ها متضمن برخی اشتباهات است که بعداً به آنها پرداخته خواهد شد.)

ویژگیهای (الف) و (ب) تصویر مرکزی تا حدی با ویژگیهای (الف) و (ب) تصویر



موازی مشابه‌اند. حال سعی می‌کنیم یک مشابهت جزئی برای ویژگی (ج) به آنها پیدا کنیم. اثر تصویر مرکزی را بر طول یک پاره خط در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم AB پاره خطی در صفحه π و $A'B'$ نگاره آن بر یک صفحه π' بر اثر یک تصویر مرکزی به مرکز O باشد (شکل ح). یادآور می‌شویم که نسبت مساحت‌های دو مثلثی که یک زاویه مشترک دارند، مساوی است با نسبت حاصلضربهای ضلعهای این دو

زاویه (این مطلب، مثلاً از فرمول معروف $S = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C}$ ، برای مساحت مثلث ABC نتیجه می‌شود).؛ بنابراین اگر فاصله‌های نقطه O را از ضلعهای AB و $A'B'$ به ترتیب به h و h' نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\text{مساحت } \triangle OA'B'}{\text{مساحت } \triangle OAB} = \frac{h' \cdot A'B'}{h \cdot AB} = \frac{OA' \cdot OB'}{OA \cdot OB}$$

$$A'B' = AB \cdot \frac{OA' \cdot OB'}{OA \cdot OB} \cdot \frac{h}{h'}$$

حال اگر A, B و C سه نقطه بر یک خط l از π ، و A', B', C' نگاره‌های آنها بر اثر تصویر بر π' باشند، آن‌گاه، از استدلال فوق چنین برمی‌آید که:

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC \left[\frac{OA' \cdot OC'}{OA \cdot OC} \right] (h/h')}{BC \left[\frac{OB' \cdot OC'}{OB \cdot OC} \right] (h/h')} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{OA'/OA}{OB'/OB}$$

این رابطه نشان می‌دهد که در این جا برخلاف تصویر موازی، نسبت‌های $A'C'/B'C'$ و AC/BC در حالت کلی نامساوی‌اند. ولی اگر نسبت دو نسبت حاصل از تقسیم پاره خط AB به وسیله دو نقطه D و C را (شکل ح) تشکیل دهیم، آن‌گاه روشن است که:

$$\frac{A'C'}{B'C'} \bigg/ \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{OA'/OA}{OB'/OB} \bigg/ \frac{AD}{BD} \cdot \frac{OA'/OA}{OB'/OB} = \frac{AC}{BC} \bigg/ \frac{AD}{BD}$$

عبارت $\frac{AC}{BC} \bigg/ \frac{AD}{BD}$ نسبت ناهمساز چهار نقطه A, B, C و D نامیده می‌شود.

خلاصه کنیم :

(ج) در تصویر مرکزی نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D واقع بر یک خط محفوظ می ماند. نسبت ناهمساز چهار نقطه (همخط)، نسبت دو نسبت ساده AC/BC و AD/BD است. از آن جا که نسبت های ساده می توانند مثبت یا منفی باشند، طبیعی است که یک علامت مثبت یا منفی به نسبت ناهمساز چهار نقطه همخط تخصیص دهیم. روشن است که نسبت ناهمساز $(AC/BC/AD/BD)$ برای چهار نقطه A و B ؛ C و D مثبت است، اگر C و D هر دو در داخل یا هر دو در خارج پاره خط AB باشند (زیرا در این صورت نسبت های ساده AC/BC و AD/BD دارای یک علامتند)، و منفی است، اگر یکی از نقطه های C و D در داخل AB و دیگری در خارج آن واقع باشد (زیرا در این صورت نسبت های ساده AC/BC و AD/BD علامت های مختلف دارند). به عبارت دیگر، می توانیم بگوییم که نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D منفی است اگر جفتهای A و B ؛ C و D جداساز یکدیگر باشند (شکل خ ۱)، و مثبت است اگر این جفتهای جداساز یکدیگر نباشند (شکل خ ۲).

از این جا نتیجه می شود که تصویر مرکزی علامت نسبت ناهمساز را حفظ می کند، یعنی ویژگی (ج) معتبر است، حتی اگر علامت نسبت ناهمساز را در نظر بگیریم.

برای اثبات این حکم، ملاحظه می کنیم که اگر جفتهای نقطه های A ، B ؛ C ، D جداساز یکدیگر باشند (یا نباشند)، آن گاه

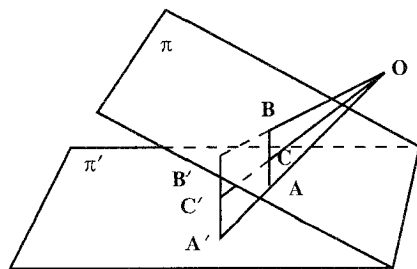
جفتهای خط های OA ، OB و OC ، OD جداساز یکدیگر هستند (یا نیستند)؛ اما در این صورت جفتهای نقطه های A' ، B' و C' ، D' نگاره های A ، B و C ، D بر اثر تصویر به مرکز O ، جداساز یکدیگر هستند (نیستند).

همچنین یادآور می شویم که تصویر موازی سه نقطه همخط A ، B و C ، نه تنها اندازه نسبت ساده AC/BC ، بلکه علامت آن را نیز حفظ می کند.

متذکر می شویم که هرگاه AB با خط خاص صفحه π (یعنی با فصل مشترک π و π') موازی باشد (شکل د)، آن گاه واضح است که $AB \parallel A'B'$ و $OA'/OA = OB'/OB$ ؛ لذا

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$$

در این مورد دستور (۱) خواهد داد :

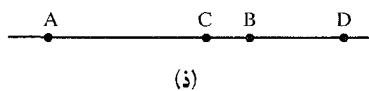


(د)

به عبارت دیگر، در تصویر مرکزی، نسبت ساده دو پاره خط از یک خط موازی با خط خاص صفحه، محفوظ می ماند.

در تصویر مرکزی، ویژگی (ج) نسبتاً پیچیده است، در گفتار مقدماتی ما نقش مهمی بازی خواهد کرد و در کتابهای پیشرفته ای که با تصویر مرکزی سر و کار دارند، نقش قاطعی ایفا می کند.

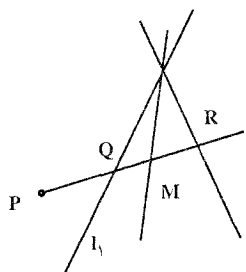
نسبت AC/BC را در نظر می گیریم که در آن نقطه ای است که پاره خط AB را تقسیم می کند. حالتی که C وسط AB باشد، یعنی وقتی AC و BC طولهای مساوی و جهتهای مختلف داشته باشند، به قسمی که $AC/BC = -1$ مورد علاقه خاص ماست؛ همچنین وقتی برای چهار نقطه A و B ؛ C و D نسبت ناهمساز $(AC/BC)/(AD/BD)$ را در نظر می گیریم، حالت $(AC/BC)/(AD/BD) = -1$ را مجزا می کنیم. در این حالت یکی از دو نقطه C و D داخل پاره خط AB و دیگری بیرون آن است، همچنین نسبتهای AC/BC و AD/BD از لحاظ قدر مطلق مساوی اند (شکل ذ). برای تشخیص این وضعیت می گوئیم، نقطه های C و D پاره های AB را به نسبت همساز (= نسبت توافقی) تقسیم می کنند (یا، نقطه های C و D مزدوجهای همساز نقطه های A و B هستند).



(ذ)

در پیش دیدیم که مسأله های متضمن تصویرهای موازی، مرکزهای پاره خطها به نحو بارزی مجسم می شوند. (برهان قضیه ۳، که در آنها خطهای وصل

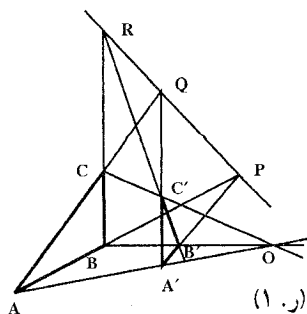
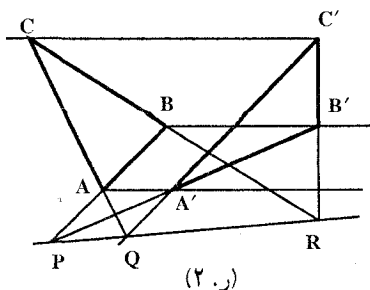
شده بین وسطهای ضلعهای مقابل برخی متوازی الاضلاعها و غیره نقش اساسی بازی می کردند). همچنین در مسأله هایی که تصویرهای موازی را دربر دارند، اغلب جفتهای نقطه هایی پیدا می شوند که برخی پاره خطها را به نسبت همساز تقسیم می کنند. بدین ترتیب مثلاً قطبی یک نقطه P نسبت به یک جفت خط l_1 و l_2 ، می تواند به عنوان مکان نقطه هایی مانند M تعریف شود که

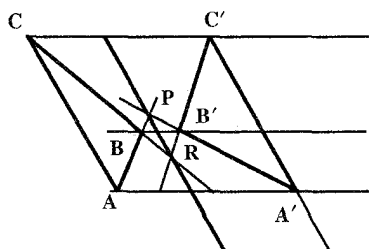


نقطه های P و M پاره خطی را که PM دو خط l_1 و l_2 را قطع می کند و دو سرش بر l_1 و l_2 هستند، به توافق تقسیم می کنند. و یا این قضیه که :

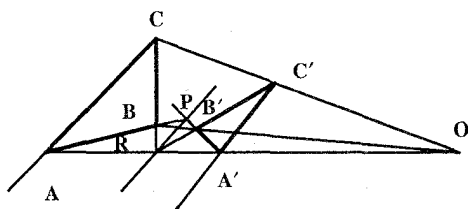
هر دو قطر یک چهارضلعی کامل، قطر سوم را به نسبت توافقی تقسیم می کنند. کلیه این حکمها بلافاصله از روی ویژگی (ج) مربوط به تصویر مرکزی اثبات می شوند.

اکنون برخی از بی دقتیهای گفتار خود را اصلاح می کنیم. یادآوری می کنیم که وقتی یک صفحه π بر یک صفحه π' تصویر می شود، هریک از دو صفحه خط خاصی پیدا می کند؛ نقطه های خط خاص صفحه π نگاره ای در π' ندارند و نقطه های خط خاص صفحه π' نگاره های هیچ نقطه ای از π نیستند. به همین دلیل صورت گزاره هایی که متضمن تصویرهای مرکزی هستند، همواره حالتی خاص را باید دربرگیرند. بی دقتیهایی که هم اکنون متذکر شدیم، ناشی از این واقعیت بود که تاکنون، علی الاصول چنین حالتی خاص را نادیده می گرفتیم. از این رو، مثلاً، حکم قضیه دزارگ، دقیق بگویم نادرست است؛ زیرا این امکان را که یک تصویر مرکزی ممکن است خطهای متقارب (مثل AA_1 ، BB_1 و CC_1 یا AB_1 و A_1B و PQ ...) را یا به خطهای همرس و یا به خطهای موازی بدل کند، در نظر نمی گیرد. یک بیان دقیق قضیه دزارگ بدین صورت است: اگر دو مثلث همصفحه چنان باشند که خطهای وصل شده به رأسهای متناظر همرس یا موازی باشند، آن گاه یا نقطه های برخورد ضلعهای متناظر مثلثها همخطند (شکلهای (ر. ۱) و (ر. ۲))، یا یک جفت از ضلعهای متناظر با خط وصل شده به نقطه های برخورد دو جفت ضلع دیگر موازی هستند. (شکل (ر. ۳) و (ر. ۴))، بالاخره یا این که ضلعهای متناظر دو مثلث موازی اند (شکل (ر. ۵) و (ر. ۶)) و بعکس. ملاحظه می کنیم که وقتی صورت قضیه دقیق بیان شود، ظرافتش را از دست می دهد و درک آن دشوار می شود. این گفته برای بسیاری از قضیه های دیگر نیز صحیح است.

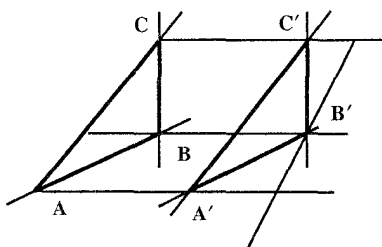




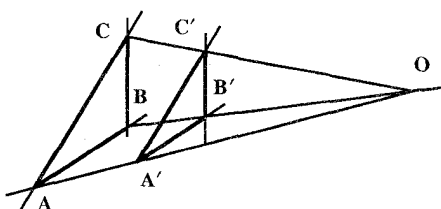
(۴. ر.)



(۳. ر.)



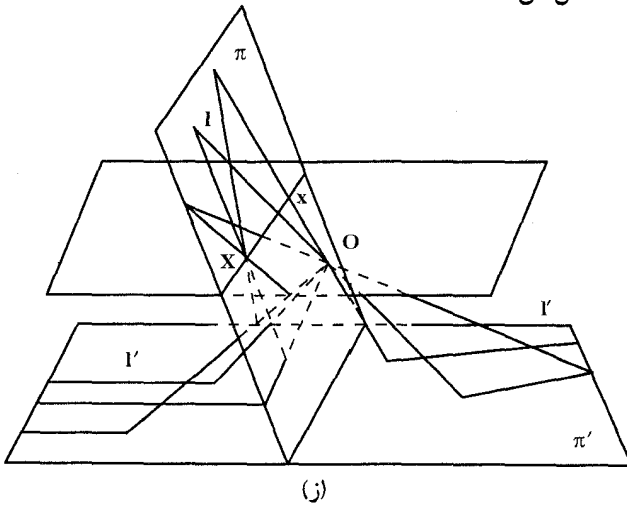
(۶. ر.)



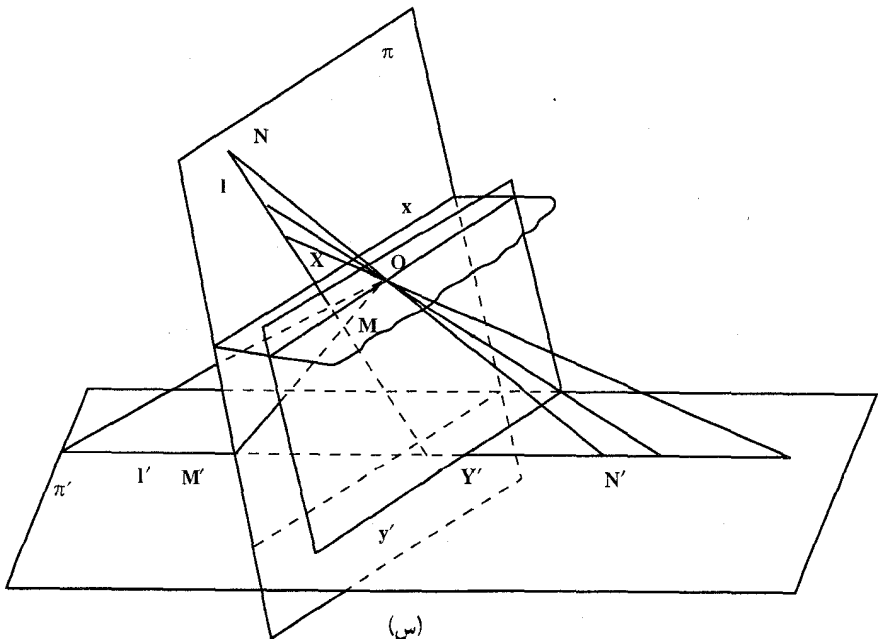
(۵. ر.)

برای از بین برداشتن پیچیدگیهای ناشی از ماهیت استثنای خطهای خاص، باید بگویم که خط خاص x در صفحه π بر «خط بینهایت» صفحه π' تصویر شده است. و «خط بینهایت» صفحه π بر خط خاص y' از π' تصویر می‌شود. تأکید می‌کنیم که این اصطلاح موضوعی است قراردادی؛ عبارت «خط x بر خط بینهایت تصویر می‌شود»، با عبارت «خط x بر چیزی تصویر نمی‌شود» هم ارز است. ما از هر نقطه خاص X از خط خاص x صحبت خواهیم کرد که به یک «نقطه بینهایت» از صفحه π' تصویر شده است. ما از رده خطهای موازی حاصل از تصویر رده خطهای گذرنده از X (شکل ز)، به عنوان رده خطهایی که «در یک نقطه بینهایت برخورد می‌کنند» صحبت خواهیم کرد. (این واقعیت که به هر نقطه بینهایت یک رده از خطهای موازی مربوط می‌شود «که از آن نقطه می‌گذرند»، به ما امکان می‌دهد که نقطه‌های بینهایت را با امتدادهای صفحه مشخص کنیم. مثلاً عبارت: «خطی که نقطه داده شده A را به نقطه داده شده B واقع در بینهایت وصل می‌کند»، به معنی خطی است که از A در امتداد متناظر به نقطه بینهایت B رسم می‌شود و همین‌طور برای نقطه‌های دیگر). لذا هر خط l یک نقطه در بینهایت دارد (برخلاف آنچه که احساس می‌کنیم، چنین برمی‌آید که تخصیص یک نقطه تکی در بینهایت به یک خط امری است بجا)، که «نقطه تلاقی» l با هر خط موازی با آن است. کلیه نقطه‌های واقع در بینهایت خطهای یک صفحه، «خط بینهایت» آن صفحه را تشکیل می‌دهند.

حال به توجیه این اصطلاح می پردازیم. هرگاه یک نقطه M بر خط l به نقطه X ، محل برخورد l و x ، نزدیک شود، تصویرش بر خط l' از صفحه π' [در یک امتداد، بسته به امتدادی که M در آن به X نزدیک می شود (شکل س)] بینهایت دور می شود. همچنین اگر M در یکی از دو جهت بر l بینهایت دور شود، تصویرش به نقطه Y' ، محل برخورد l' و y' نزدیک می شود (شکل س).



(ز)



(س)

وارد کردن نقطه‌های بینهایت ما را ملزم می‌سازد که تعریف نسبت ناهمساز چهار نقطه همخط را تکمیل کنیم. اشاره می‌کنیم که اگر D نقطه بینهایت خط AB باشد، مساوی قرار دادن نسبت AD/BD با یک، طبیعی خواهد بود. (زیرا نسبت AM/BM وقتی نقطه M به نقطه بینهایت D نزدیک شود، یعنی وقتی M در یکی از دو جهت بر AB بینهایت دور شود، به حد یک نزدیک می‌شود). لذا اگر D نقطه‌ای در بینهایت باشد، نسبت ناهمساز $(AD/BD)/(AC/BC)$ با نسبت ساده AC/BC یکی خواهد شد. به آسانی دیده می‌شود که ویژگی (ج) مربوط به تصویر مرکزی، حتی اگر یکی از نقطه‌های A, B, C و D یا تصویرش، نقطه‌ای در بینهایت باشد، باز صادق خواهد بود.

وارد کردن خط و نقطه‌های بینهایت به ما امکان می‌دهد که یک عده از گزاردهای خاص را، که همه به طریق مشابهی قابل اثبات هستند، در یک گزاره واحد بگنجانیم. علت آن این است که تا آن‌جا که به تصویرهای مرکزی مربوط است، نقطه‌های فرضی در بینهایت با نقطه‌های واقعی موقعیتی یکسان دارند. نقطه‌های یک نوع را می‌توان به نقطه‌های نوع دیگر بدل کرد. مثلاً حالت‌های ویژه قضیه دزارگ که قبلاً برشمردیم همه در حکم اصلی آن گنجانده شده‌اند. (قضیه دزارگ). ثابت کنید که هرگاه دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ در صفحه چنان باشند که خط‌های AA_1, BB_1, CC_1 هم‌رس باشند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد خط‌های AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، و BC و B_1C_1 هم‌خطند. بعکس اگر نقطه‌های برخورد خط‌های AB و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، و BC و B_1C_1 هم‌خط باشند، آن‌گاه خط‌های AA_1, BB_1, CC_1 هم‌رسند، به شرطی که نقطه تقاطع خط‌های AA_1, BB_1, CC_1 و همچنین نقطه‌های تقاطع ضلع‌های متناظر مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ نقطه‌های معمولی یا نقطه‌های بینهایت تعبیر شوند. صفحه‌ای که بدین ترتیب با افزودن نقطه‌های فرضی و خط فرضی در بینهایت تکمیل شده است، صفحه تصویری نام دارد.

می‌خواهیم به یک تفاوت اصلی بین دو استفاده‌ای که از نقطه‌های بینهایت کرده‌ایم اشاره کنیم:

۱. اصطلاح مناسبی برای بیان برخی حقایق مربوط به تصویرهای مرکزی ایجاد کنیم.

۲. صفحه تصویری را ایجاد کنیم.

مفهوم صفحه تصویری گامی است فراتر از اصطلاح تنها. گامی است در راه تجرید ریاضی که به یک مفهوم جدید ریاضی منجر می‌شود: صفحه‌ای که علاوه بر نقطه‌های معمولی هندسه دبیرستانی، دارای نقطه‌های اضافی دیگر، یعنی نقطه‌های بینهایت است. (در این صفحه

نقطه‌های بینهایت با نقطه‌های دیگر هم‌ترازند؛ زیرا تصویر مرکزی می‌تواند نقطه‌های یک نوع را به نوع دیگر بدل کند). باید تأکید کنیم که یک صفحه تصویری همان اعتبار صفحه «اقلیدسی» معمولی (یا «صفحه انعکاسی» مذکور در فصل ۶) را دارد. روی هم رفته، مفهوم صفحه اقلیدسی یا خطهایی که می‌توانند تا بینهایت ادامه داده شوند، تجریدی است ریاضی، بی‌آن که همتایی در واقعیت فیزیکی داشته باشد، و توصیف مناسب آن به وسیله مجموعه‌ای از اصل موضوعها که هندسه مسطحه اقلیدسی را می‌سازند، انجام گرفته است. تعبیرهای متفاوت از مفهوم «صفحه»، به انتخابهای متفاوت اصل موضوعها منجر می‌شود. مثلاً اصل موضوع زیر، که در صفحه اقلیدسی معتبر نیست، در صفحه تصویری صادق است: «هر دو خط (متمایز) یکدیگر را در یک نقطه منحصر می‌برند.» (درواقع، دو خط موازی به تعبیر اقلیدسی در یک نقطه واقع در بینهایت در صفحه تصویری یکدیگر را می‌برند، و یک خط معمولی و خط واقع در بینهایت، یکدیگر را در نقطه بینهایت خط معمولی). هریک از راههای متفاوت پذیرفتنی، نزدیک شدن به مفهوم صفحه با یک انتخاب خاص اصل موضوعها مشخص می‌شود. بسته به نوع مسأله‌هایی که حل آنها را مطرح می‌کنیم، ممکن است تعبیر اصطلاح «صفحه» را به یکی از راهها مناسب بدانیم. یک مورد مناسب، مطالعه انعکاسهایی است که ما در آنجا از «نقطه‌های بینهایت» به طریقی متفاوت با طریق معمول در صفحه تصویری، استفاده می‌کنیم. «صفحه» حاصل با هر دو صفحه اقلیدسی و تصویری، متفاوت است، ولی «برتر» یا «پایینتر» از یکی از آنها نیست.

بجاست اشاره کنیم که وارد کردن نقطه‌ها و خطهای «بینهایت دور» ممکن است در حل مسأله‌هایی که تصویرهای مرکزی در آنها دخالتی ندارند، مفید باشد. مثلاً بسهولت می‌توانیم انتقال را تجانس‌ی بگیریم که مرکزش نقطه بینهایت دور در امتداد محور انتقال و نسبت آن ۱ باشد. [برای دیدن این نکته، یک رشته تجانس در نظر می‌گیریم که یک شکل F را به شکلهای F_1 و F_2 و F_3 و ... و نقطه‌ای مانند A از F را به نقطه A' بدل می‌کند؛ در این حال وقتی O_i ($i=1,2,3,\dots$)، مرکزهای این تجانسها، در امتداد AA' بینهایت دور می‌شوند، نسبتهای

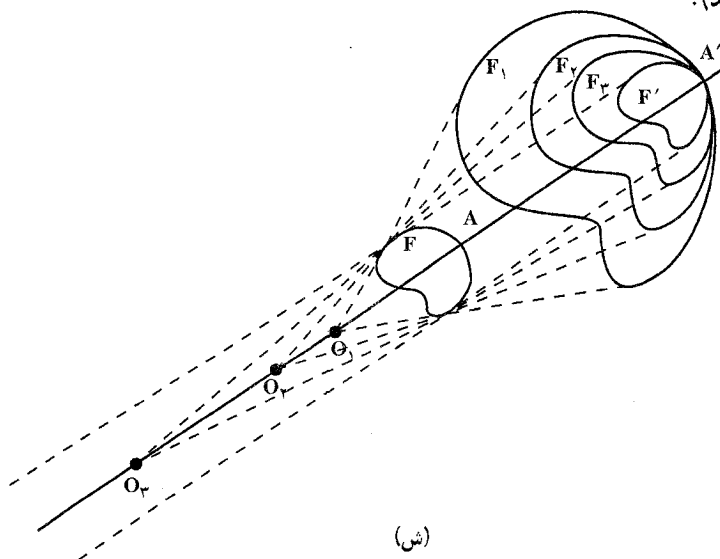
به مقدار ۱، و شکلهای F_i به یک شکل F' نزدیک می‌شوند که از

$$\frac{O_i A'}{O_i A} \quad (i=1,2,3,\dots)$$

شکل F بر اثر انتقال با بردار AA' حاصل شده است (شکل ش). در نتیجه این شناسایی، دیگر لازم نیست حالت‌های خاصی را که در عده‌ای از قضیه‌های متضمن شکلهای مجانس پیدا می‌شوند، جدا کنیم. مثلاً، بگوییم که هر دو دایره به دو طریق، مجانس یکدیگرند، حاصلضرب دو تجانس باز یک تجانس است (با مرکزی در فاصله متناهی یا نامتناهی). قضیه در باب سه

مرکز تجانس نیز حالا می‌تواند به صورت خلاصه زیر بیان شود :

سه مرکز تجانس سه جفت شکل متجانس، همخطند. این قضیه شامل حالتی است که یکی از مرکزها نقطه‌ای در بینهایت است (دو شکل از سه شکل قابل انطباقند)، شامل حالتی است که هر سه مرکز (تجانس) نقطه‌هایی واقع در بینهایتند و محور (تجانس) خطی در بینهایت است (هر سه شکل دو به دو قابل انطباقند) و سرانجام، شامل حالتی است که هر سه مرکز بر هم منطبقند. اگر دیدگاه فعلی خود را حفظ کنیم، سه دایره همواره شش مرکز تجانس دارند که در مجموعه‌های سه‌تایی بر چهار محور تجانس قرار دارند (برای حالت‌های خاصی که این قضیه را می‌پوشانند).



اکنون می‌توانیم به تقارن لغزه‌ای (یا لغزه) به صورت حالت یک تقارن تجانسی (یا تجانس) بنگریم، و لذا حالتی که F بر اثر یک تقارن لغزه‌ای بر F' نگاشته می‌شود، مستلزم ملاحظات جداگانه نیست. بعضی وقتها هم مناسب است که انتقال را دورانی تلقی کنیم که مرکزش در بینهایت باشد و امتدادش عمود بر امتداد انتقال در مسأله، در این صورت همه قضیه‌های حاصلضربهای مستقیم حرکت‌های (یعنی دوران و انتقال) زیر پوشش یک قضیه تنها درمی‌آیند. حال قضیه مهم زیر را اثبات می‌کنیم :

۳۲۹. قضیه ۱. گیریم A, B, C و D چهار نقطه در یک صفحه π چنان باشند که هیچ سه‌تایی از آنها همخط نباشند و M, N, P و Q چهار نقطه در صفحه π' چنان که هیچ سه‌تایی از آنها همخط نباشند. π و π' را می‌توان طوری قرار داد که یک تصویر مرکزی (یا

موازی) از π به π' وجود داشته باشد که چهارضلعی ABCD را به چهارضلعی $A'B'C'D'$ که مشابه با MNPQ است، بدل کند (صحیحتر بگوییم، رأسهای چهارضلعی ABCD را می توان بر رأسهای چهارضلعی $A'B'C'D'$ متشابه با MNPQ نگاشت).

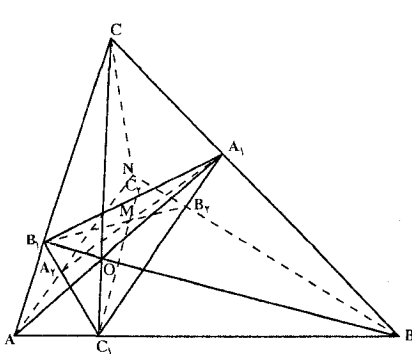
۴. تصویر مرکزی صفحه بر خودش

تاکنون فقط نگاشتهایی از یک صفحه π بر صفحه دیگر π' را مورد مطالعه قرار داده ایم. حال تبدیلی را که π را بر خودش بدل کند در نظر می گیریم که به شرح زیر تعریف می شود:

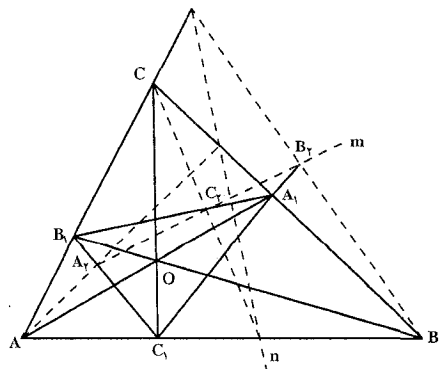
صفحه π را در فضا به طریق دلخواهی حرکت می دهیم، و سپس آن را بر وضع اولیه اش از مرکز O تصویر می کنیم. این تبدیل را تصویر مرکزی صفحه π بر خودش می نامیم. یک مورد این تبدیل، تشابه است. تصویر مرکزی یک صفحه بر خودش یک تشابه است اگر، وضع جدید صفحه درست پیش از تصویر با وضعیت اصلیش موازی باشد.

ویژگیهای تصویر مرکزی ایجاب می کنند که تصویر مرکزی صفحه π بر خودش، خط را به خط بدل کند، به استثنای خط خاص، که به خط بینهایت بدل می شود. هر خط از این قسمت صفحه π که شامل خط خاص نباشد، به یک خط بدل می شود.

تبدیلی از صفحه که خطهای گذرنده بر قسمت معینی از صفحه را به خط بدل کند، تبدیلی تصویری نامند (یک تبدیل تصویری می تواند به صورت تبدیل یک به یک از صفحه تصویری π بر روی خودش تعریف شود که خط را به خط تبدیل می کند. این تعریف با تعریف یک تبدیل آفین متفاوت است، از این لحاظ که در این جا π معرف یک صفحه تصویری است، نه یک



(ط ۱)



(ط ۲)

صفحه معمولی). هر تبدیل آفین یک تبدیل تصویری است، ولی عکس آن درست نیست؛ مثلاً تصویر مرکزی صفحه بر روی خودش یک تبدیل تصویری است، ولی در حالت کلی، آفین نیست.

قضیه بنیادی زیر ماهیت تبدیل تصویری صفحه را روشن می‌سازد.

۳۳۰. گیریم A, B و C سه نقطه ناهمخط در یک صفحه π باشند و M, N و P سه نقطه ناهمخط در یک صفحه π' . ثابت کنید صفحه‌های π و π' را می‌توان در فضا چنان قرار داد که بر اثر تصویری موازی از π بر π' ، مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$ متشابه با مثلث MNP بدل شود.

۳۳۱. هر تبدیل تصویری صفحه می‌تواند با یک تصویر مرکزی (یا موازی) صفحه بر خودش و به دنبال آن، یک تشابه تحقق یابد.

۵. تصویر مرکزی که یک دایره را به دایره بدل می‌کند

تصویر گنجنگاستی

در هندسه مقدماتی خواص شکل‌هایی مورد مطالعه قرار می‌گیرند که از خط‌ها و دایره‌ها درست شده‌اند. تصویر مرکزی، خط‌ها را حفظ می‌کند ولی در حالت کلی دایره‌ها را حفظ نمی‌کند. این مطلب ممکن است این احساس را پدید آورد که کاربرد تصویر مرکزی به رده نسبتاً کوچکی از مسأله‌ها، که شامل دایره‌ها نیستند، محدود می‌شود. این احساس درست نیست؛ در واقع در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم که تصویرهای مرکزی چگونه می‌توانند برای حل مسأله‌های متضمن دایره‌ها نیز به کار روند. بدین منظور دو قضیه زیر را ثابت می‌کنیم:

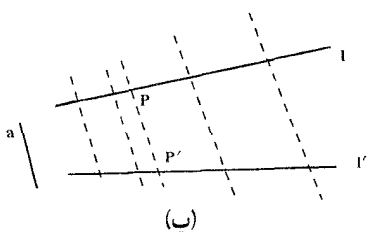
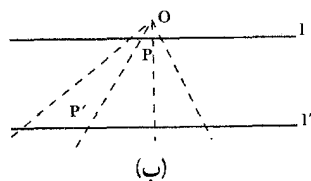
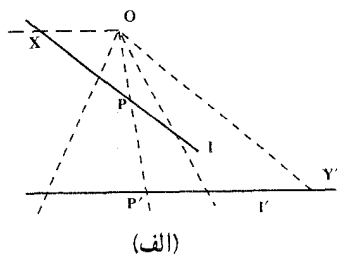
۳۳۲. قضیه ۱. گیریم S دایره‌ای در صفحه π و Q نقطه‌ای در داخل S باشد. در این صورت یک تصویر مرکزی از π بر یک صفحه π' چنان موجود است که S را به یک دایره S' در π' بدل می‌کند و Q را به Q' مرکز S' .

قضیه ۲. گیریم S دایره‌ای در صفحه π و l خطی در π باشد که با S متقاطع نیست. در این صورت یک تصویر مرکزی از π بر یک صفحه مناسب π' موجود است، چنان که S را به یک دایره S' در π' بدل می‌کند و l را به یک خط بینهایت π' .

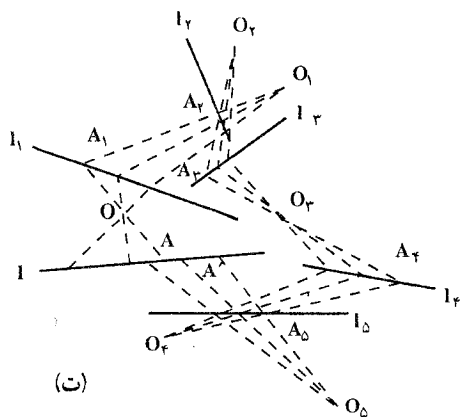
۶. تبدیل تصویری یک خط و یک دایره

ترسیم به کمک ستاره

در یک صفحه دو خط متمایز l و l' و یک نقطه O ناواقع بر آن دو خط را در نظر می گیریم. l را از نقطه O بر l' تصویر می کنیم، یعنی به هر نقطه P واقع بر l یک نقطه P' محل تلاقی OP با l' را مربوط می کنیم (شکل (الف)). ملاحظه می کنیم که اگر l با l' موازی نباشد، نقطه X ، محل برخورد l با خطی که از O به موازات l' رسم می شود، بر هیچ نقطه l' تصویر نمی شود. برای این که نقطه X را با نقطه های دیگر همپایه قرار دهیم، می گوئیم که این نقطه بر نقطه بینهایت l' تصویر شده است. به همین روش نقطه Y' ، محل برخورد l' با خطی که از O به موازات l رسم می شود، نگاره نقطه بی نهایت l بر اثر این تصویر گوئیم. اگر خطهای l و l' موازی باشند (شکل (ب))، گوئیم که این تصویر نقطه بینهایت l را به نقطه بینهایت l' بدل می کند. عین همین اصطلاح، هرگاه تصویر از l بر l' یک تصویر موازی باشد (شکل (پ)) نیز به کار برده می شود. تصویر مرکزی (یا



موازی) تبدیلی از یک خط بر خودش نیست، بلکه نگاشتی است از یک خط بر خط دیگر. حال یک خط l را از یک نقطه O بر یک خط l_1 تصویر می کنیم، سپس l_1 را از یک نقطه O_1 بر خط l_2 ، بعد l_2 را از یک نقطه O_2 بر یک خط l_3 ، و این عمل را همین گونه ادامه می دهیم تا بالاخره خط l_n را از نقطه O_n بر l برمی گردانیم (شکل (ت)). این رشته تصویرها، یک نقطه A از l را به یک نقطه A_1 از l_1 ، و سپس به یک نقطه A_2 از l_2 ، و بعد به یک نقطه A_3 از l_3 ، و ... و سرانجام به یک نقطه A' از خط اولی l بدل می کند. بدین ترتیب این رشته از تصویرهای مرکزی، معرف تبدیلی است از l بر روی خودش که نقطه A را به نقطه A' بدل می کند. این چنین تبدیل از



یک خط را یک تبدیل تصویری می‌نامیم و نیز در این رشته تصویرها وقتی یک یا چند تصویر، به جای تصویر مرکزی، تصویر موازی باشند، باز هم آن را تبدیل تصویری خواهیم گفت (همین که مفهوم نقطه بینهایت یک صفحه را وارد کردیم، می‌توانیم تصویر موازی یک خط بر روی یک خط را یک تصویر مرکزی به مرکز واقع در بینهایت بینگاریم).

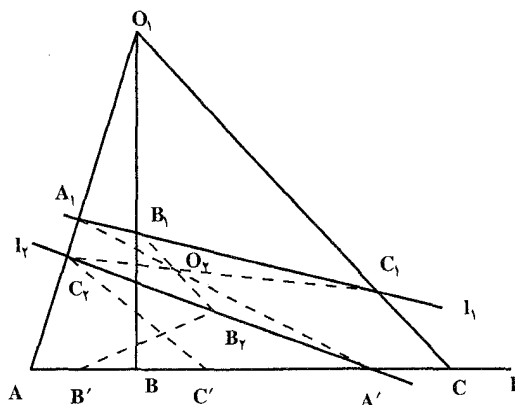
ویژگی زیر یک ویژگی بنیادی تبدیلهای تصویری است: تبدیل تصویری یک خط، نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند. زیرا تصویر مرکزی یک خط بر خط دیگر نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند (ویژگی (ج) از تصویر مرکزی). همچنین تصویر موازی یک خط بر یک خط، نسبت ناهمساز چهار نقطه (حتی نسبت ساده $\frac{AC}{BC}$ از سه نقطه A، B و C) را حفظ می‌کند. از این جا نتیجه می‌شود که تبدیل تصویری یک خط (که بر اثر یک رشته تصویرها حاصل می‌شود) چهار نقطه را به چهار نقطه با همان نسبت ناهمساز بدل می‌کند. این ویژگی بنیادی ایجاب می‌کند که تبدیل تصویری یک خط با نگاره‌های سه نقطه‌اش کاملاً معین شود. زیرا اگر نگاره‌های سه نقطه A، B و C از خطی بر اثر یک تبدیل تصویری، سه نقطه معلوم A'، B' و C' باشند، آن گاه نگاره هر نقطه M از این خط نقطه‌ای است مانند M' به طوری که:

$$\frac{AC}{BC} \bigg/ \frac{AM}{BM} = \frac{A'C'}{B'C'} \bigg/ \frac{A'M'}{B'M'} \quad (۱)$$

که این رابطه موضع نقطه M' را به گونهٔ منحصری مشخص می‌کند.

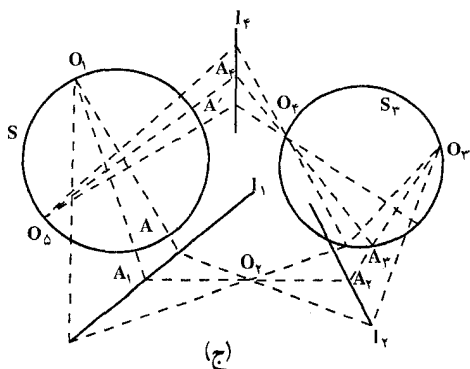
از سوی دیگر یک تبدیل تصویری از خط وجود دارد که سه نقطه A، B و C را بر سه نقطه قبلاً مشخص شده A'، B و C' ببرد. برای تحقق بخشیدن به چنین تبدیلی، اول این خط را بر یک خط اختیاری l_1 تصویر می‌کنیم به طوری که نقطه‌های A، B و C به نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 واقع بر l_1 بدل شوند؛ سپس خط l_1 را بر یک خط l_2 که خط l_1 را در A' می‌برد، تصویر می‌کنیم به طوری که A_1 به A' و نقطه‌های B_1 و C_1 به نقطه‌های B_2 و C_2 واقع بر l_2 بدل شوند. بالاخره l_2 را با استفاده از O، نقطه برخورد خطهای B_2B_1 و

C_1C_2 ، به عنوان مرکز تصویر (شکل (ث)) بر خط l تصویر می‌کنیم. مطابق معمول، O ممکن است نقطه‌ای در فاصله متناهی یا نقطه‌ای در بینهایت باشد.



(ب)

حال به آسانی می‌توان نشان داد که هر تبدیلی از یک خط که نسبت ناهمساز چهار نقطهٔ واقع بر آن را حفظ کند، تبدیلی است تصویری (یعنی می‌تواند به وسیلهٔ یک رشته از تصویرها تحقق یابد). زیرا تبدیلی از یک خط را در نظر بگیرید که نسبت ناهمساز هر چهار نقطه‌ای را حفظ کند و فرض کنید که سه نقطهٔ A ، B و C را به نقطه‌های A' ، B' و C' بدل کند. می‌دانیم که یک تبدیل تصویری وجود دارد که A ، B و C را به A' ، B' و C' بدل می‌کند. ولی اگر دو تبدیل از یک خط، که هر دو حافظ نسبت ناهمساز چهار نقطه هستند، در یک مجموعهٔ سه نقطه‌ای از یک خط تطابق داشته باشند، آن گاه هر دو یک نقطهٔ چهارم M را به یک نقطهٔ M' بدل می‌کنند (که وضعیتش از فرمول (۱) صفحهٔ قبل مشخص می‌شود)، یعنی هر دو تبدیل یکی هستند.

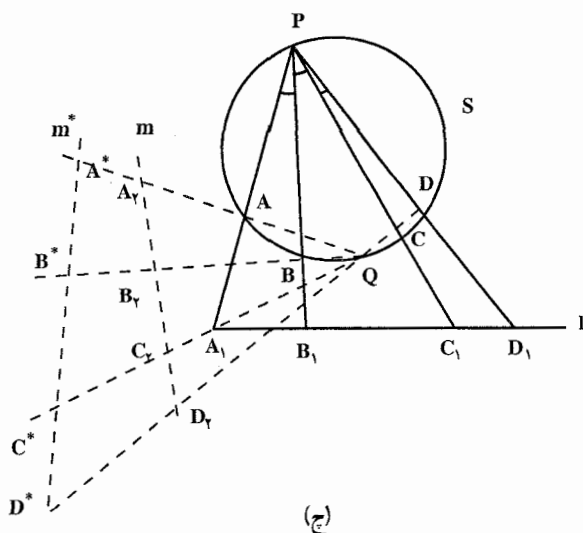


حال یک رشته از تصویرها را که شامل خطها و دایره‌ها باشند در نظر می‌گیریم. به‌طور مثال یک دایره S را، از یک نقطه O_1 واقع بر S ، بر یک خط l_1 تصویر می‌کنیم؛ سپس l_1 را از یک نقطه O_2 بر یک خط l_2 ، بعد l_2 را از یک نقطه O_3 واقع بر یک دایره S_3 بر آن

دایره تصویر می‌کنیم؛ بعد S_3 از یک نقطه دیگر O_4 واقع بر S_3 بر یک خط l_4 ؛ و سرانجام l_4 را از یک نقطه O_5 از S بر دایره S (شکل (ج)) تصویر می‌کنیم. نخستین تصویر، یک نقطه A از S را به یک نقطه A_1 از l_1 بدل خواهد کرد، تصویر دوم A_1 را به یک نقطه A_2 از l_2 ، تصویر سوم A_2 را به یک نقطه A_3 از S_3 ، تصویر چهارم A_3 را به یک نقطه A_4 از l_4 ، و بالاخره آخرین تصویر نقطه A_4 را به یک نقطه A' از S بدل می‌کند.

بدین ترتیب این رشته تصویرها یک تبدیل از دایره S بر خودش را مشخص می‌کند که A را به A' بدل می‌کند. تبدیلی از یک دایره را که بتواند با یک رشته تصویرها از نوع ذکر شده در بالا تحقق یابد، یک تبدیل تصویری (روی دایره داده شده) می‌نامیم.

منظور از نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D واقع بر یک دایره S ، نسبت ناهمساز نگاره‌های این چهار نقطه، A_1 و B_1 ؛ C_1 و D_1 است که بر اثر تصویر از یک نقطه P از S بر یک خط l به دست آمده‌اند (شکل (ج)). به آسانی می‌توان نشان داد که نسبت ناهمساز

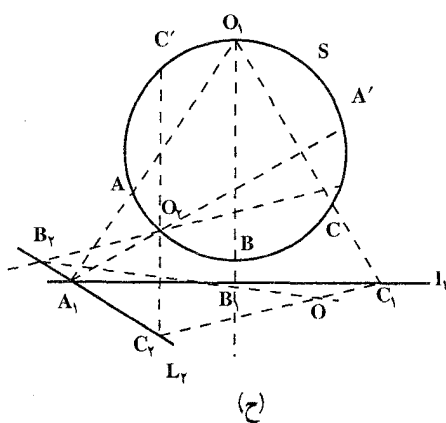


(ج)

چهار نقطه واقع بر یک دایره S ، مستقل از انتخاب نقطه P بر S و مستقل از خط l است؛ یعنی مقدار آن به وسیله چهار نقطه A, B, C, D کاملاً معین می‌شود؛ زیرا فرض می‌کنیم A_1, B_1, C_1 و D_1 نگاره‌های نقطه‌های A, B, C, D بر اثر یک تصویر از نقطه P بر خط l باشند و A_2, B_2, C_2 و D_2 نگاره‌های همان نقطه‌ها بر اثر یک تصویر از نقطه Q از S بر خطی مانند m (شکل (ج)). به موجب یک ویژگی کاملاً معروف مربوط به زاویه‌های محاطی، زاویه‌هایی که خطهای PA, PB, PC, PD با هم می‌سازند برابر l' (مکمل) زاویه‌هایی هستند که خطهای

QA, QB, QC و QD با هم می سازند. حال بر خطهای QA, QB, QC و QD پاره خطهای $QA^* = PA_1$, $QB^* = PB_1$, $QC^* = PC_1$ و $QD^* = PD_1$ را جدا می کنیم. شکلهای $QA^*B^*C^*D^*$ و $PA_1B_1C_1D_1$ قابل انطباقند (می توان با یک حرکت آنها را بر هم منطبق کرد: Q را به P منتقل می کنیم و نیمخطهای QA^* و QB^* را بر امتداد نیمخطهای PA_1 و PB_1 قرار می دهیم). این عمل ایجاب می کند که نقطه های A^* , B^* , C^* و D^* بر یک خط m^* واقع باشند، و نسبت ناهمساز چهارنقطه A^* و B^* ; C^* و D^* با نسبت ناهمساز چهار نقطه A_1 و B_1 ; C_1 و D_1 یکی باشد. از سوی دیگر A^* , B^* , C^* و D^* نگاره های A_2 , B_2 , C_2 و D_2 بر اثر تصویر خط m ، به مرکز Q، بر روی خط m^* هستند. بنابراین نسبتهای ناهمساز A^* و B^* ; C^* و D^* ، و A_2 و B_2 ; C_2 و D_2 مساوی اند، و از آنجا تساوی نسبتهای ناهمساز A_2 و B_2 ; C_2 و D_2 ، با A_1 و B_1 ; C_1 و D_1 نتیجه می شود.

چون تصویر یک خط بر روی یک دایره (یا یک دایره بر روی یک خط) نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند، ملاحظه می‌کنیم که تبدیل تصویری بر روی یک دایره نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ می‌کند. چنان که در مورد تبدیل تصویری یک خط دیدیم، حال می‌توانیم بگوییم که یک تبدیل تصویری بر روی یک دایره با نگاره‌های سه نقطه‌اش کاملاً معین می‌شود. بالاخره به آسانی می‌توان نشان داد که هر تبدیل از یک دایره که نسبت ناهمساز چهار نقطه را حفظ کند، یک تبدیل تصویری است (یعنی می‌تواند با یک رشته از تصویرها عملی شود). برای این منظور کافی است نشان دهیم که یک تبدیل تصویری وجود دارد که سه نقطهٔ



داده شده A ، B و C از دایره S را به سه نقطه قبلاً مشخص شده A' ، B' و C' از آن دایره بدل کند. برای تحقق بخشیدن به چنین تبدیلی، S را از یک نقطه O_1 بر روی یک خط I_1 ، تصویر می‌کنیم و نگاره‌های نقطه‌های A ، B و C را به A_1 ، B_1 و C_1 نشان می‌دهیم؛ از نقطه O_2 ، محل تلاقی مجدد خط گذرنده بر A' و A_1 با S ، S را بر یک خط I_2 گذرنده بر A_1 تصویر می‌کنیم و نگاره‌های A' ، B' و C' را به A_2 ، B_2 و C_2

و C_1 نشان می‌دهیم. بالاخره I_1 را بر I_2 چنان تصویر می‌کنیم که A_1 ، B_1 و C_1 به نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 بدل شوند (شکل (ح))؛ مرکز این تصویر را به O نشان می‌دهیم. روشن است

که رشته تصویرهای S بر روی l_1 از O_1 ؛ l_1 بر روی l_2 از O_2 ، و l_2 بر روی S از O_2 ، نقطه‌های A ، B و C را به نقطه‌های A' ، B' و C' بدل می‌کند، همان‌گونه که می‌خواستیم.

۳۳۳. قضیه. ثابت کنید که تصویر جسم نمایی زاویه‌ها را محفوظ می‌دارد.

۳۳۴. قضیه دزارگ. ثابت کنید که هر گاه دو مثلث ABC و $A_1B_1C_1$ در صفحه چنان باشند

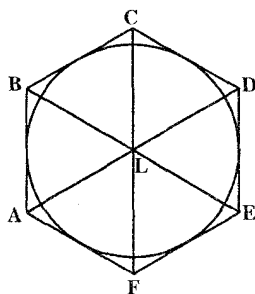
که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم‌رس باشند، آن‌گاه نقطه‌های برخورد خطهای AB

و A_1B_1 ، AC و A_1C_1 ، BC و B_1C_1 ، هم‌خطند. را که به هندسه تصویری برگردانیم،

به چه صورت بیان خواهد شد؟

۳۳۵. قضیه بریانشن. ثابت کنید که سه قطر واصل به رأسهای مقابل یک شش ضلعی محیط

بر یک دایره هم‌رسند (شکل (الف)).



(الف)

برخی حکمها مربوط به پنج ضلعیها، چهار ضلعیها و سه ضلعیهای محیطی و محاطی، حالتی خاص قضیه‌های بریانشن و پاسکال هستند. از این‌رو، به‌طور مثال فرض می‌کنیم که رأس F از شش ضلعی محاطی $ABCDEF$ بر دایره محیطی آن حرکت کند و به نقطه E نزدیک شود. در این صورت ضلع EF به سمت مماس بر دایره در E میل می‌کند و در حالت حد قضیه زیر به‌دست می‌آید:

نقطه تلاقی ضلع BC از

پنج ضلعی $ABCDE$ محاط

در یک دایره و مماس بر

دایره در E ، با نقطه‌های

تلاقی ضلعهای AB و DE ،

CD و AE (شکل (ب)).

هم‌خطند. همچنین اگر

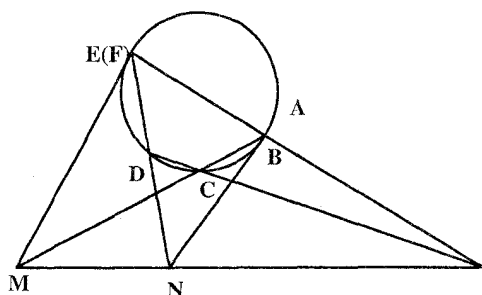
فرض کنیم که در

شش ضلعی محاطی

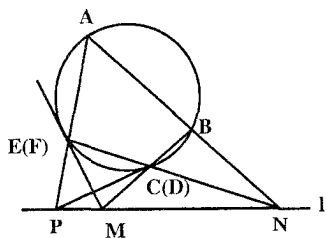
$ABCDEF$ رأس F بر E منطبق باشد و رأس D بر C ، قضیه زیر به‌دست می‌آید:

نقطه تلاقی ضلعهای AB و CE از چهار ضلعی محاطی $ABCE$ با نقطه‌ای که BC

مماس بر دایره در E را می‌برد، و نقطه‌ای که AE مماس بر دایره در C را می‌برد، سه



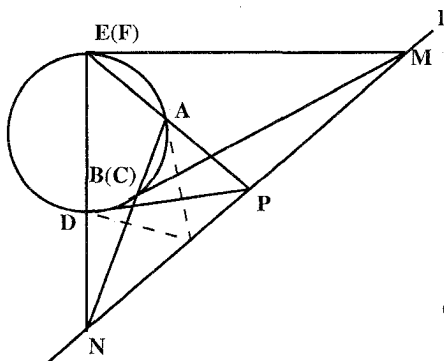
(ب)



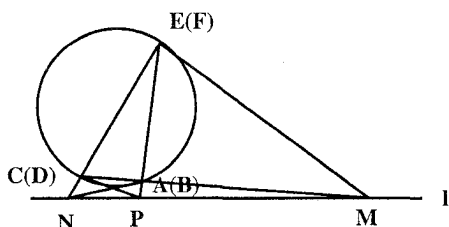
(پ)

نقطه همخند (شکل (پ)). اگر در شش ضلعی انطباق رأسهای F و E، C و B، را فرض کنیم، بلافاصله می بینیم که نقطه تلاقی مماسهای بر دایره در رأسهای E و B از یک چهارضلعی محاطی ABDE با نقطه های برخورد ضلعهای مقابل بر یک خط واقعند. روشن است که نقطه تلاقی مماسهای رسم شده بر دایره در نقطه های A و D

نیز بر همان خط قرار دارد (شکل (ت)). بالاخره فرض منطبق بودن رأسهای A و B، C و D، و E و F، از یک شش ضلعی نتیجه می دهد که: نقطه های تلاقی ضلعهای مثلث ACE با مماسهای رسم شده بر دایره محیطی آن در رأسهای مقابل، همخند (شکل (ث)). می توانستیم همه این قضیه ها را حالت های خاص قضیه پاسکال تلقی کنیم، که در آنها طولهای یک یا چند ضلع صفر شده اند و همه آنها را به روش قضیه پاسکال ثابت کنیم (و در برخی موارد برهان بسیار ساده است).

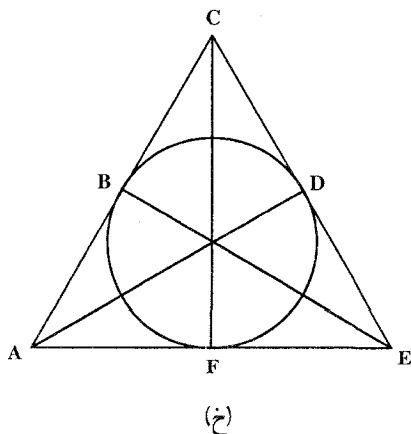
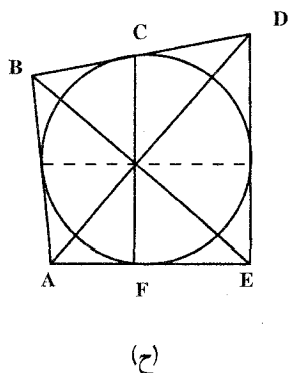
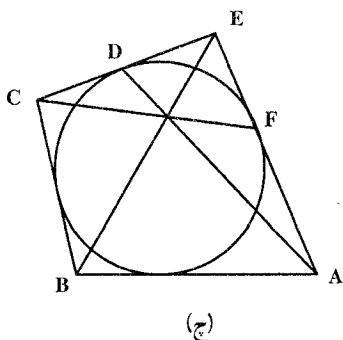
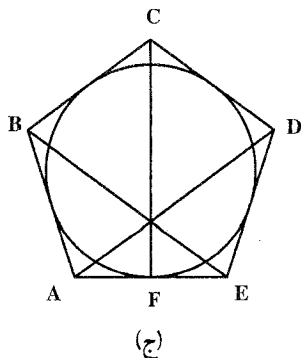


(ت)



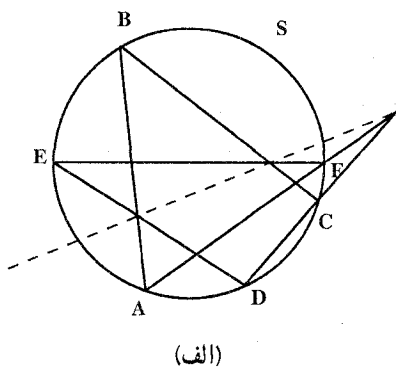
(ث)

به همین طریق ممکن است تعدادی قضیه تازه از قضیه بریانشن استخراج کنیم. بدین منظور کافی است که فقط فرض کنیم شش ضلعی محیطی یک یا چند زاویه 180° دارد. شکلهای ج - خ حکمهای چندی را به ذهن القا می کنند که بیان آنها را به عهده خواننده می گذاریم.



۳۳۶. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یک خط، قضیه پاپوس را ثابت کنید.

۳۳۷. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری بر روی یک دایره، قضیه پاسکال را ثابت کنید: اگر A, B, C, D, E, F شش نقطه بر یک دایره باشند، نقطه‌های برخورد AB و DE ، BC و EF ، و CD و FA همخطند (شکل الف)).

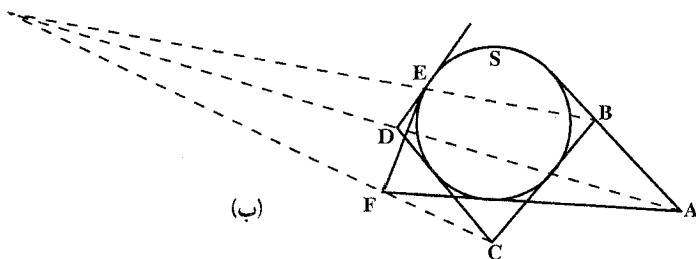


اشاره می‌کنیم که این قضیه قویتر از مسأله‌ای است که در آن شش ضلعی $ABCDEF$ محاط در یک دایره، محدب

فرض شده بود؛ در حالی که در این قضیه، شش ضلعی $ABCDEF$ ممکن است خود، متقاطع باشد.

به ازای هر شش ضلعی که در مسأله (نشان دهید که سه نقطه تقاطع ضلعهای مقابل یک شش ضلعی محاط در دایره همخطند (قضیه پاسکال)) در نظر گرفتیم، 60° شش ضلعی با همان رأسهای این مسأله وجود دارند که به 60° جایگشت ممکن رأسها مربوط می شوند و در نتیجه به 60° نقطه واقع بر یک دایره، 60° «خط پاسکال» مربوط می شوند.

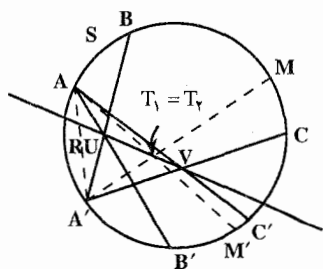
ملاحظه می کنیم که چون قضیه بریانشن می تواند از قضیه پاسکال استخراج شود، این قضیه ایجاب می کند که قضیه بریانشن به علت خود - متقاطع بودن شش ضلعی (شکل (ب)) صادق باشد.



(ب)

نکته ۱. 60° شش ضلعی وجود دارد که رأسهای آنها 60° نقطه مفروضی باشند. زیرا، با شروع از هر یک از رأسها می توانیم رأس دوم را به 5° طریق، رأس سوم را به 4° طریق، رأس چهارم را به 3° طریق، رأس پنجم را به 2° طریق انتخاب کنیم و رأس آخر به طریق منحصری تعیین می شود. عدد حاصل $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ است که به موجب این واقعیت که هر شش ضلعی دو بار (به دلیل دو نحوه ممکن عبور آنها) در نظر گرفته شده، این تعداد بایستی نصف شود.

نکته ۲. مجموعه 60° خط حاصل به روش ذکر شده، ویژگیهای بسیار جالبی دارد که مورد مطالعه هندسه دانان اخیر قرار گرفته است. بدین ترتیب که به طور مثال، این 60° خط در 45° نقطه در گروههای 4° تایی یکدیگر را می برند (هر خط پاسکال سه نقطه از این نقطه ها را بر خود دارد) و در 80° نقطه در گروههای سه تایی (هر خط پاسکال چهار نقطه از این نقطه ها را بر خود دارد). این 80° نقطه اخیر، علاوه بر خطهای پاسکال، در 20° خط جدید که به نوبه خود در گروههای 4° تایی در 15° نقطه جدید یکدیگر را می برند و هکذا. همه این نتیجه ها را می توان به نحو نسبتاً ساده ای از قضیه های دزارگ، پاسکال و بریانشن، استخراج کرد. ولی اثبات آنها ما را از زمینه اصلی خیلی دور می سازد.



۳۳۸. نکته مهم. تعیین نقطه‌های ثابت یک تبدیل تصویری در یک دایره، یعنی پیدا کردن نقطه‌هایی که بر اثر تبدیل مفروض به خود بدل می‌شوند، غالباً لازم می‌آید. فرض می‌کنیم که تبدیل تصویری با این شرط مشخص شده باشد که سه نقطه A, B و C واقع بر S را به سه نقطه معلوم A', B' و C' واقع بر S بدل کند. می‌توانیم فرض کنیم که نقطه‌های

A, B و C بر A', B' و C' منطبق نباشند، چون در غیر این صورت تبدیل تصویری یک همانی خواهد شد و همه نقطه‌های دایره، نقطه‌های ثابت خواهند شد (زیرا یک تبدیل تصویری در یک دایره منحصرأً به وسیله نگاره‌های سه نقطه مشخص می‌شود. تبدیلی که سه نقطه را ثابت نگه دارد، لزوماً باید یک همانی باشد).؛ بنابراین، فرض می‌کنیم، به‌طور مثال، A با A' یکی نباشد، سپس فرض می‌کنیم M نقطه‌ای از دایره S باشد و M' نگاره آن بر اثر تبدیل تصویری (شکل).

می‌خواهیم نشان دهیم که خطهای AM' و $A'M$ روی خطی یکدیگر را می‌برند که بر U ، نقطه برخورد AB' و $A'B$ ، و بر V نقطه برخورد AC' و $A'C$ می‌گذرد. فرض می‌کنیم که چنین نباشد، و نقطه‌های برخورد AM' ، $A'M$ و AA' با UV را به ترتیب T_1 ، T_2 و R می‌گیریم. از تصویر S بر روی UV ابتدا از A' و سپس از A ، ملاحظه می‌کنیم که نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و M روی S مساوی نسبت ناهمساز چهار نقطه R و U ؛ V و T_1 روی UV است، و نسبت ناهمساز چهار نقطه A' و B' ؛ C' و M' روی S مساوی نسبت ناهمساز چهار نقطه R و U ؛ V و T_2 روی UV است. اما به موجب وجود یک تبدیل تصویری که A, B, C و M را به A', B', C' و M' بدل می‌کند، نسبت ناهمساز این دو چهارتایی از نقطه‌ها بایستی مساوی باشند. این مطلب تساوی نسبت ناهمساز R و U ؛ V و T_1 ، با نسبت ناهمساز R و U ؛ V و T_2 و در نتیجه یکی بودن T_1 و T_2 را ایجاب می‌کند. همان که ادعا شده بود... اکنون می‌بینیم که برای به‌دست آوردن نقطه M' ، نگاره یک نقطه مفروض M ، اثر تبدیل تصویری باید A را به T ، نقطه برخورد AM' با UV ، (در این جا U نقطه برخورد AB' و $A'B$ است و V نقطه برخورد AC' و $A'C$) وصل کنیم. در این حال M' نقطه برخورد خط AT با S خواهد شد. این ترسیم ایجاب می‌کند که نقطه‌های ثابت یک تبدیل تصویری در یک دایره، نقطه‌های برخورد خط UV با S باشند. از آن جا نتیجه می‌شود

که این تبدیل دارای دو نقطه ثابت یا دارای یک نقطه ثابت است و یا هیچ نقطه ثابت ندارد برحسب این که UV با دایرة S را در دو نقطه ببرد (حالتی که در شکل اختیار شده است) یا بر آن مماس باشد و یا کاملاً در خارج آن قرار گیرد.

ملاحظه می کنیم که تعیین نقطه ثابت یک تبدیل تصویری در یک دایرة S که سه نقطه A، B و C را به سه نقطه A'، B' و C' بدل می کند، می تواند به وسیله یک ستاره تنها انجام گیرد.

۳۳۹. صفحه π و امتداد D متقاطع با π و شکل مسطح F واقع در خارج π داده شده است.

تصویر در امتداد D شکل F روی π یک مربع است. شکل F به طور حتم:

الف. یک مربع است.

ب. مربع نیست.

ج. یک مستطیل است.

د. متوازی الاضلاع است.

هـ. لوزی است.

المیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۳۴۰. فرض می کنیم S یک دایره و AB و CD دو وتر آن باشند. بر S نقطه ای مانند X چنان

تعیین کنید که خطهای AX و BX بر وتر CD:

الف. پاره خطی را به طول a مشخص سازند؛

ب. پاره خطی را مشخص سازند که وسطش نقطه مفروض E بر CD باشد.

۳۴۱. ثابت کنید که در تصویر جسم نمایی هر دایره عظیمه از کره α' به یک دایره (یا یک خط)

از صفحه α تبدیل می شود که با دایره معینی در دو نقطه واقع در دو سر یک قطر متقاطع می باشند.

۲.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در: نقطه، خط، زاویه

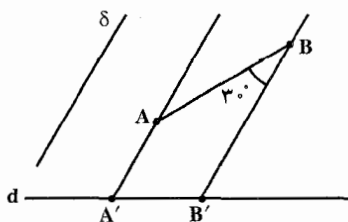
۱.۲.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۳۴۲. تصویر پاره خط AB به طول $۱۲\sqrt{2}$ سانتیمتر

در امتداد δ روی خط d، پاره خط A'B'

به طول ۱۲ سانتیمتر است. اگر $\angle ABB' = 30^\circ$

باشد، امتداد δ را مشخص سازید.



۲.۲.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره،...

۱.۲.۲.۳. نقطه‌ها همخطند

۳۴۳. در صفحه‌ای چهار خط چنان داده شده‌اند که هیچ دو تا از آنها با هم موازی و یا هیچ سه تا از آنها هم‌رس نیستند. ثابت کنید که در چهار مثلث حاصل از این خطها، نقطه‌های برخورد ارتفاعها همخطند.

۲.۲.۲.۳. تعیین نقطه‌های برخورد

۳۴۴. نقطه‌های برخورد خط مفروض l و یک دایره S را پیدا کنید، در صورتی که مرکز A و شعاع BC از آن معلوم باشد.

۳.۲.۳. خطهای: هم‌رس، موازی،...

۱.۳.۲.۳. خطها موازی‌اند

۳۴۵. تصویر مرکزی به مرکز O و دو صفحه π و π' را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم l_1 و l_2 دو خط از صفحه π ، یکدیگر را در یک نقطه M روی خط خاص x از صفحه π قطع کنند. در این صورت تصویرهای آنها روی صفحه π' بر اثر تصویر مرکزی به مرکز O ، دو خط متوازی‌اند.

۴.۲.۳. زاویه

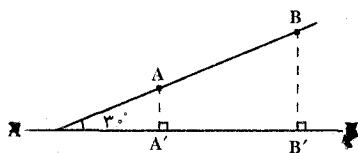
۱.۴.۲.۳. اندازه زاویه

۳۴۶. دو خط d و d' در صفحه π با هم زاویه 30° ساخته‌اند. این دو خط را روی صفحه π' موازی صفحه π ، به موازات امتداد داده شده δ (غیر موازی با π و π') تصویر می‌کنیم. اندازه زاویه بین تصویرهای این دو خط را تعیین کنید.

۵.۲.۳. پاره‌خط

۱.۵.۲.۳. اندازه پاره‌خط

۳۴۷. پاره‌خط AB به طول ۵ سانتیمتر داده شده است و می‌دانیم که امتداد آن با خط xy زاویه



۳۰° می سازد. مطلوب است اندازه تصویر AB بر xy.

۳۴۸. ثابت کنید عمود مشترک دو خط متنافر، کوتاهترین پاره خطی است که دو سر آن بر دو خط مزبور واقع است.

۳۴۹. ثابت کنید عمود مشترک دو خط متنافر منحصر به یک پاره خط است.

۶.۲.۳. رابطه های متری

۳۵۰. تصویرهای سه نقطه همخط A، B و C را روی خط راست Δ بترتیب A' ، B' و C'

می نامیم. ثابت کنید که $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{AC}$ است.

۷.۲.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۳۵۱. برای آن که تصویر نیمساز یک زاویه، نیمساز تصویر آن زاویه باشد، لازم و کافی است که نیمساز زاویه مزبور و یا نیمساز خارجی این زاویه، با صفحه تصویر موازی باشد.

۸.۲.۳. رسم شکلها

۳۵۲. دو خط l_1 و l_2 و یک نقطه A بر l_1 و یک نقطه B بر l_2 و یک نقطه P ناواقع بر l_1 و l_2 داده شده اند. از P خطی رسم کنید که l_1 و l_2 را در نقطه های X و Y ببرد، به طوری که:

الف. $\frac{AX}{BY} = \frac{m}{n}$ برابر با نسبت معلوم باشد.

ب. $AX \cdot BY = k^2$ ، که k داده شده است.

۳۵۳. دو خط l_1 و l_2 و دو نقطه A و B ناواقع بر آنها داده شده اند. نقطه ای مانند X بر l_1 چنان پیدا کنید که پاره خطی که بر l_2 به وسیله خطهای AX و BX مشخص می شوند:

الف. دارای طول مفروض a باشد.

ب. نقطه مفروض E واقع بر l_2 وسط آن باشد.

۹.۲.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۵۴. الف. وتر مثلث قائم الزاویه ای طوری می لغزد که دو سرش همواره بر دو خط عمود بر هم حرکت می کند. مکان هندسی رأس قائمه آن را بیابید.

ب. بزرگترین ضلع مثلث متساوی الساقینی به زاویه رأس 120° چنان می لغزد که دو سرش همواره بر ضلعهای یک زاویه 60° قرار دارند. پیدا کنید مکان هندسی رأسی را که زاویه اش از همه بزرگتر است.

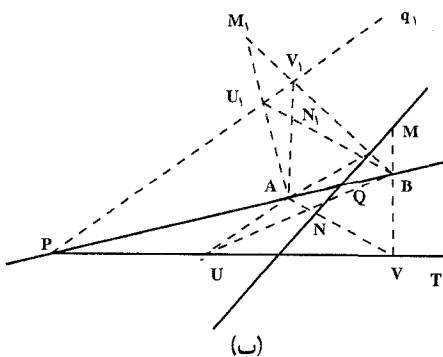
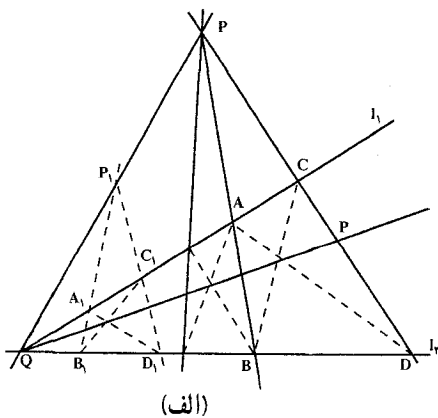
۳.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳۵۵. الف. در یک صفحه، دو خط l_1 و l_2 و یک نقطه P ناواقع بر هیچ یک از آنها داده شده‌اند. از P دو خط می‌گذرانیم که یکی از آنها l_1 و l_2 را در نقطه‌های A و B ببرد و دیگری آنها را در نقطه‌های C و D (شکل الف)). نشان دهید که:

(i) مکان هندسی نقطه برخورد AD و BC (به ازای کلیه جفت خط‌هایی که از P می‌گذرند) یک خط p است.

(ii) به ازای l_1 ناموازی با l_2 ، خط p از نقطه Q ، محل برخورد l_1 و l_2 می‌گذرد.

(iii) p تغییر نمی‌کند، هرگاه به جای P یک نقطه P_1 از خط PQ را قرار دهیم.



ب. خط q و دو نقطه A و B ناواقع بر q در یک صفحه داده شده‌اند. فرض می‌کنیم U و V دو نقطه بر q ، M نقطه برخورد خطهای UA و VB ، و N نقطه برخورد خطهای UB و VA باشد (شکل (ب)). به ازای هر انتخاب نقطه‌های U و V بر q ، یک خط MN پدید می‌آید.

نشان دهید که همه این خطها در یک نقطه Q واقع بر خط AB متقاطعند؛ همچنین نشان دهید که هرگاه به جای q یک خط q_1 قرار دهیم که بر P ، نقطه تلاقی q و AB بگذرد، نقطه Q عوض نمی‌شود.

۳۵۶. الف. فرض می‌کنیم l یک خط و P نقطه‌ای ناواقع بر آن باشد. بر l پاره‌خطی مانند XY پیدا کنید که از P به زاویه معین α دیده شود.

ب. گیریم l_1 و l_2 دو خط باشند، و P و Q دو نقطه ناواقع بر این خطها. بر l_1 نقطه‌ای مانند X و بر l_2 نقطه‌ای مانند Y چنان تعیین کنید که پاره‌خط XY از نقطه P به زاویه مفروض α ، و از Q به زاویه مفروض β دیده شود.

۳.۳. تبدیلیهای آفین و تصویری در مثلث

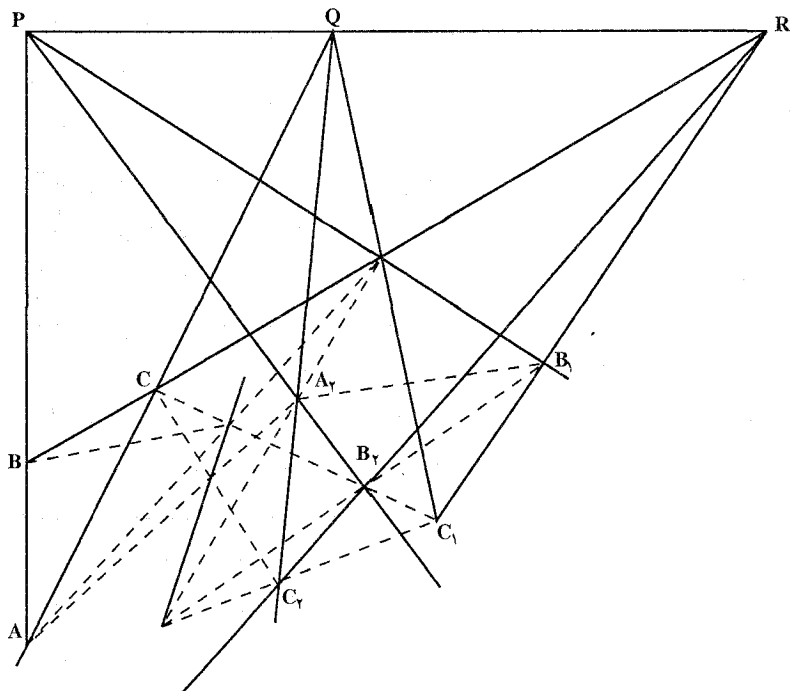
۱.۳.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۳۵۷. در چه نوع تصویری، تصویر مثلث ABC روی صفحه π یک پاره‌خط است؟

۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۳. نقطه‌ها همخطند

۳۵۸. سه مثلث ABC ، $A_1B_1C_1$ و $A_2B_2C_2$ داده شده‌اند به قسمی که خطهای AB ، A_1B_1 و A_2B_2 در یک نقطه P ، و خطهای AC ، A_1C_1 و A_2C_2 در یک نقطه Q ، و خطهای BC ، B_1C_1 و B_2C_2 در یک نقطه R یکدیگر را می‌برند و P ، Q و R ، همخطند. به موجب قضیه دزارگ، در هر یک از سه تاییهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 ؛ AA_2 ، BB_2 و CC_2 ؛ A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 ، خطها در یک نقطه همدیگر را می‌برند. ثابت کنید که این سه نقطه همخطند (شکل).



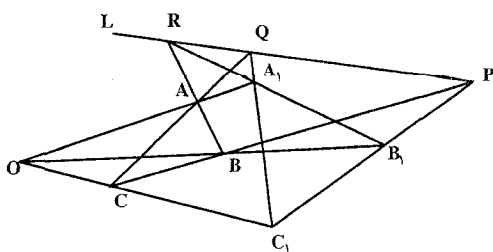
۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۳.۳ خطها همرسند

۳۵۹. قضیه سوارا را ثابت کنید: اگر نقطه‌های M و N بر ترتیب بر ضلعهای AB، BC و CA از مثلث ABC (ولی نه بر امتدادشان) واقع باشند، و اگر:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

آن گاه خطهای AN، BP و CM همرسند.



۳۶۰. قضیه دزارگ. ثابت کنید که

هرگاه دو مثلث ABC و

$A_1B_1C_1$ در صفحه چنان باشند

که خطهای AA_1 ، BB_1 و

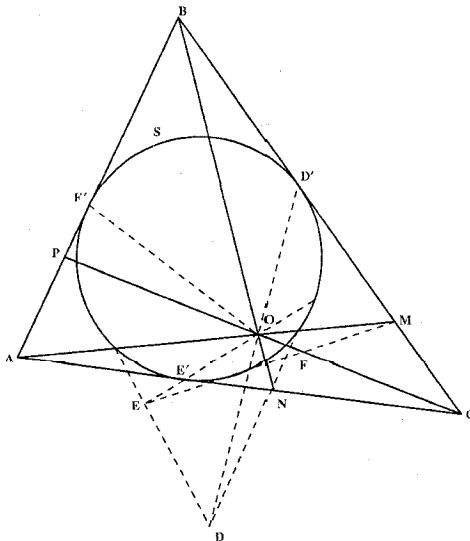
CC_1 همرس باشند، آن گاه

نقطه‌های برخورد خطهای AB

و AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم‌رسند. خطهای AB و AA_1B_1 ، AC و AA_1C_1 ، BC و B_1C_1 ، همخط باشند، آن‌گاه خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم‌رسند.

مثلثهایی که در مفروضات قضیه دزارگ صدق می‌کنند، مثلثهای منظری نامیده می‌شوند. نقطه هم‌رسی خطهای واصل به رأسهای متناظر آنها، O ، مرکز تصویر منظری و خطی که شامل نقطه‌های برخورد جفتهای ضلعهای متناظر آنها باشد، محور تصویر منظری نام دارد. ملاحظه می‌کنیم که قضیه دزارگ مبین یک ویژگی مشترک خطها و نقطه‌های یک صفحه است که الزاماً به یک جفت مثلث بستگی ندارند. تکیه‌ای که بر برخی عناصری شکل شده است به خاطر سپردن قضیه را آسانتر می‌سازد ولی تقارن آن را از نظر می‌پوشاند؛ زیرا این واقعیت را که همه خطها و نقطه‌های قضیه دزارگ هم‌سنگ هستند، از نظر پنهان می‌سازد. از این‌رو، به‌طور مثال در شکل، خط OCC_1 ممکن است به‌عنوان محور تصویر منظری (برای مثلثهای PBB_1 و QAA_1) در نظر گرفته شود، و نقطه B به‌عنوان مرکز تصویر منظری (برای مثلثهای PRB_1 و CAO).

۳۶۱. مثلث ABC و نقطه Q داده شده‌اند. گیریم M ، N و P محل برخورد خطهای BQ ، CQ با ضلعهای BC ، CA و AB باشند (شکل). هرگاه S دایره محاطی داخلی مثلث ABC و E' ، D' و F' نقطه‌های تماس آن با ضلعهای BC ، CA و AB باشند و مماسهای رسم شده از M ، N و P بر S مثلث DEF را پدید آورند، نشان دهید که سه خط واصل بین رأسهای متناظر در دو مثلث DEF و $D'E'F'$ در Q هم‌رسند.



۳۶۲. ثابت کنید که سه میانهٔ مثلث هم‌رسند (یعنی هر سه در یک نقطه همدیگر را می‌برند).

۴.۳.۳. زاویه

۱.۴.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۳۶۳. اندازهٔ مساحت مثلث $A'B'C'$ ، تصویر قائم مثلث ABC روی صفحهٔ P ، مساوی $12\sqrt{3}$ سانتیمتر مربع است. اگر مساحت مثلث ABC مساوی ۲۴ سانتیمتر مربع باشد، زاویهٔ بین صفحهٔ تصویر و صفحهٔ مثلث ABC را تعیین کنید.

۵.۳.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۳۶۴. ضلع BC از مثلث ABC روی صفحهٔ P واقع است. زاویهٔ بین صفحهٔ این مثلث و صفحهٔ P مساوی 30° است. اگر A' تصویر رأس A روی صفحهٔ P باشد، اندازهٔ ارتفاع رأس A' از مثلث $A'BC$ را بیابید. در صورتی که اندازهٔ ارتفاع AH از مثلث ABC مساوی $12\sqrt{3}$ سانتیمتر باشد.

۶.۳.۳. رابطه‌های متری

۳۶۵. الف. قضیهٔ منلائوس را ثابت کنید: سه نقطهٔ M ، N و P بترتیب واقع بر ضلعهای AB ، BC و CA (یا بر امتداد آنها، شکل (الف)) از مثلث ABC ، هم‌خطند اگر و فقط اگر:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$$

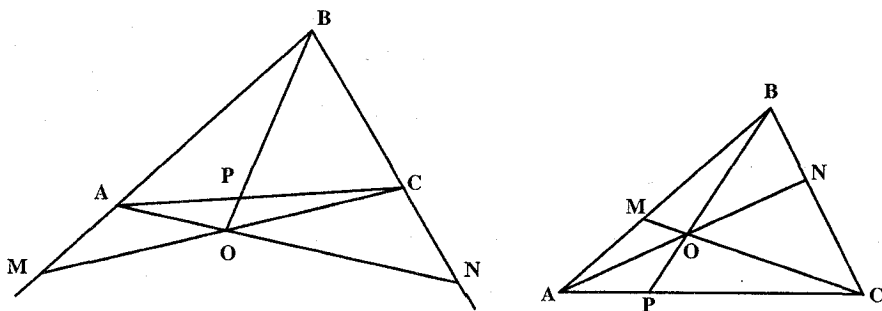
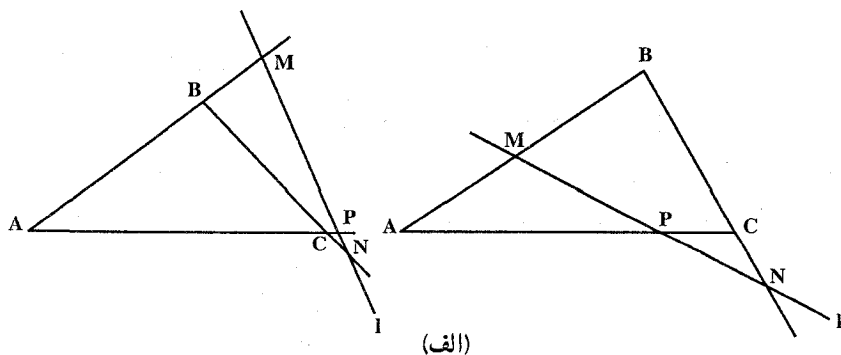
ب. قضیهٔ سوا را ثابت کنید: سه خط AN ، BP و CM که نقطه‌های M ، N و P بترتیب بر ضلعهای AB ، BC و CA (یا بر امتداد آنها، شکل (ب)) از مثلث ABC قرار دارند، هم‌رس یا موازی‌اند، اگر و تنها اگر:

$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = -1$$

به آسانی دیده می‌شود که هرگاه نقطه‌های M ، N و P هم‌خط باشند، آن‌گاه به‌ازای هر مثلث ABC ، یا دو نقطه از این سه نقطه بر ضلعهای مثلث قرار دارند و یا هر سه

نقطه بر امتداد ضلعها واقعد (شكل (الف)). بنابراین از سه نسبت $\frac{AM}{BM}$ ، $\frac{BN}{CN}$ و $\frac{CP}{AP}$ یا دو تا از آنها منفی اند یا هیچ یک منفی نیست؛ پس حاصلضرب هر سه نسبت، الزاماً مثبت خواهد بود. همچنین اگر خطهای AN ، BP و CM متقارب یا موازی باشند (شكل (ب))، آن گاه از سه نقطه M ، N و P یا هر سه بر ضلعهای مثلث واقعد، یا تنها یکی از آنها. بنابراین از سه نسبت $\frac{AM}{BM}$ ، $\frac{BN}{CN}$ و $\frac{CP}{AP}$ یا دو تا مثبتند یا هیچ یک مثبت نیست. پس حاصلضرب سه نسبت منفی می شود.

قضیه های منلائوس و سوا اغلب زمانی به کار برده می شوند که اثبات همخطی سه نقطه یا تقارب سه خط مطلوب باشد.



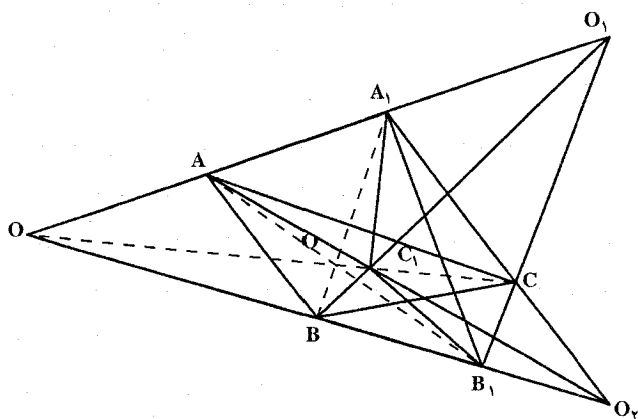
۳۶۶. نقطه های M ، N و P بر ضلعهای AB ، BC و AC از مثلث ABC و M_1 ، N_1 و P_1 بر ضلعهای A_1B_1 ، B_1C_1 و A_1C_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ باشند. بترتیب قرینه های M ، N و P نسبت به وسطهای ضلعهای AB ، BC و AC می باشند. نشان دهید که مساحت مثلثی به ضلعهای AN ، BP و CM با مساحت مثلثی به ضلعهای

AN_1 ، BP_1 و CM_1 برابر است (به ویژه، هرگاه خطهای AN ، BP و CM هم‌مرس باشند، خطهای AN_1 ، BP_1 و CM_1 نیز هم‌رسند).

۳۶۷. نقطه‌های K ، L و M بر ضلعهای مثلث ABC ، به مساحت ۱ واقعند، چنان که این ضلعها را به نسبت‌های مفروض k_1 ، k_2 و k_3 تقسیم می‌کنند. نشان دهید که مساحت مثلث KLM فقط به عددهای k_1 ، k_2 و k_3 بستگی دارد و نه به این که کدام ضلع به چه نسبتی تقسیم شده است.

۷.۳.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۳۶۸. قضیه در باب مثلثهای منظری سه گانه. فرض می‌کنیم مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ چنان باشند که AA_1 ، BB_1 و CC_1 در نقطه O ، خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 در نقطه O_1 ، و خطهای AC_1 ، BB_1 و CA_1 در نقطه O_2 یکدیگر را ببرند (شکل). ثابت کنید که خطهای AB_1 ، BA_1 و CC_1 نیز در یک نقطه O_3 هم‌رسند (به عبارت دیگر، دو مثلث منظری سه گانه، به تعبیر مسأله ما الزاماً منظری چهارگانه‌اند).



۳۶۹. قضیه درباره مثلثهای منظری دو گانه. مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ چنان داده شده‌اند که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 یکدیگر را در یک نقطه O می‌برند و خطهای AB_1 ، BA_1 و CC_1 در یک نقطه O_1 (شکل). ثابت کنید که خطهای AC_1 ، BB_1 و CA_1 نیز یکدیگر را در یک نقطه O می‌برند، به عبارت دیگر دو مثلث منظری دو گانه (به تعبیر حکم مسأله ما) در واقع منظری سه گانه‌اند.

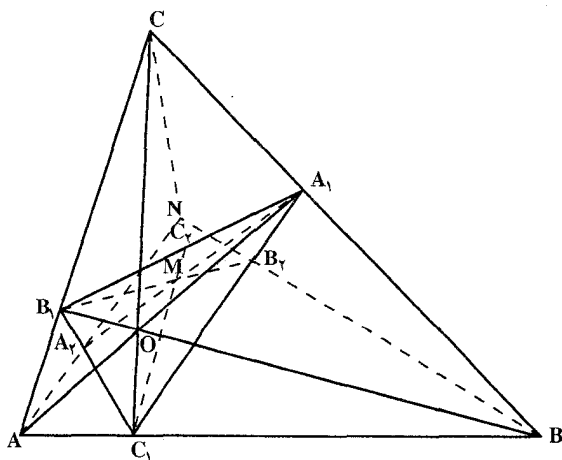
۳۷۴. در مثلث ABC مستطیلی به مساحت δ محاط کنید که دو رأس آن بر ضلع AB واقع باشند و دو رأس دیگر بر ضلعهای CA و CB .

۳.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۷۵. مثلث $A'BC$ تصویر قائم مثلث ABC روی صفحه P است. اگر H و H' به ترتیب نقطه‌های برخورد ارتفاعهای دو مثلث ABC و $A'BC$ باشند، ثابت کنید که خط HH' بر صفحه $A'BC$ عمود است.

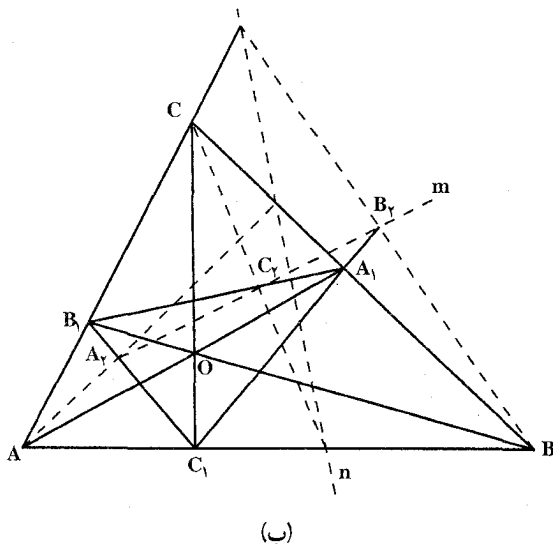
۳.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳۷۶. نقطه‌ای است O در صفحه $\triangle ABC$ ، A_1 ، B_1 و C_1 نقطه‌های برخورد خطهای AO ، BO و CO با ضلعهای روبه‌رو به رأسهای A ، B و C در مثلث هستند (شکل). نقطه‌های A_2 ، B_2 و C_2 را بر ضلعهای B_1C_1 ، C_1A_1 و A_1B_1 از $\triangle A_1B_1C_1$ در نظر می‌گیریم. ثابت کنید که:
الف. اگر سه خط A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 هم‌مس باشند، خطهای AA_2 ، BB_2 و CC_2 نیز هم‌مسند (شکل (الف)).



(الف)

ب. اگر نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 همخط باشند، نقطه‌های برخورد خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 با ضلعهای مقابل $\triangle ABC$ نیز همخطند (شکل (ب)).



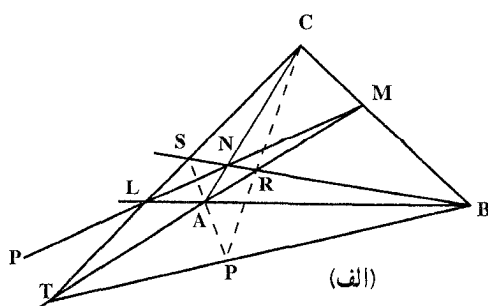
۳۷۷. الف. مثلث ABC و سه نقطه همخط P ، Q و R داده شده‌اند. در این مثلث یک مثلث

XYZ چنان محاط کنید که ضلعهایش بترتیب از نقطه‌های P ، Q و R بگذرند.

ب. در یک n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ ، n ضلعی دیگری محاط کنید که ضلعهایش از نقطه همخط مفروض بگذرند.

ج. سه خط هم‌مس l_1 ، l_2 و l_3 و سه نقطه A ، B و C در یک صفحه داده شده‌اند. مثلی مانند XYZ چنان رسم کنید که ضلعهایش از نقطه‌های A ، B و C بگذرند و رأسهایش بر خطهای l_1 ، l_2 و l_3 واقع باشند.

۳۷۸. الف. خط p ضلعهای AB ، BC و CA از مثلث ABC (یا امتداد آنها) را در نقطه‌های L ،



M و N بریده است. مانند شکل

(الف)، نقطه برخورد AM و

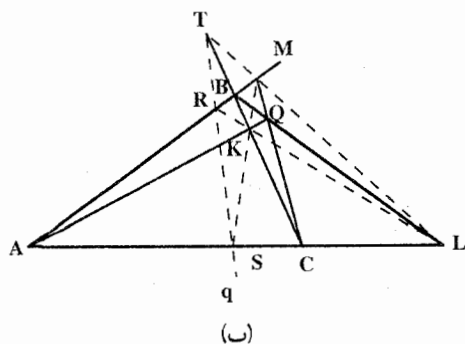
BN را به R ، نقطه برخورد

CL و S به نقطه برخورد

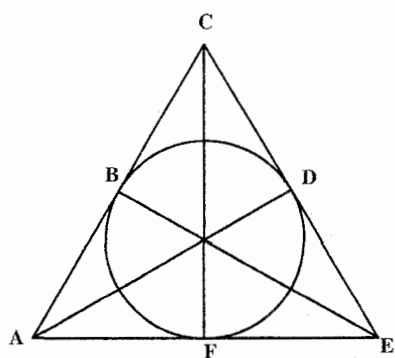
AM و CL را به T نشان

می‌دهیم. نشان دهید که خطهای

AS ، BT و CR هم‌مسند.



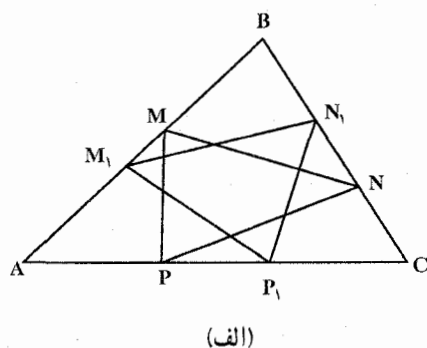
ب. مثلث ABC و یک نقطه Q داده شده‌اند. مانند شکل (ب)، نقطه‌های برخورد خطهای QA ، QB و QC را با ضلعهای مثلث ABC (یا امتداد آنها) به L ، K و M نشان می‌دهیم و نقطه‌های برخورد جفتهای خطهای KL و AB ، AC و KM ، LM و BC را به S ، R و T نشان دهید که نقطه‌های S ، R و T هم‌خطند.



۳۷۹. الف. ثابت کنید که در هر مثلث خطهای واصل از سه رأس به نقطه‌های تماس ضلعهای مقابل با دایره محاطی داخلی هم‌رسند (شکل).

ب. گیریم ABC یک مثلث و S دایره‌ای باشد که ضلعهای AB ، BC و CA آن را به ترتیب در M ، N ، P و Q ، R و T می‌برد. فرض می‌کنیم C_1 ، A_1 و B_1

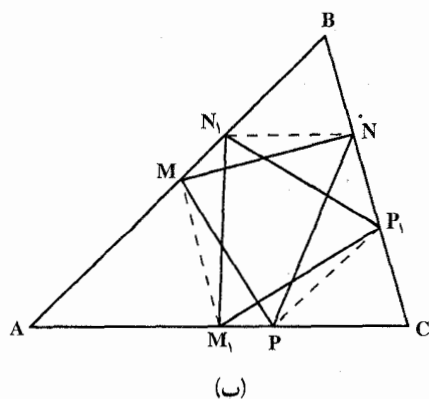
به ترتیب نقطه‌های برخورد مماسهای رسم شده بر S در نقطه‌های M و N ، P و Q ، و R و T باشند. نشان دهید که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم‌رسند.



۳۸۰. نقطه‌های M ، N و P به ترتیب بر ضلعهای AB ، BC و AC از مثلث ABC واقعند، نشان دهید که :

الف. هرگاه M_1 ، N_1 و P_1 به ترتیب قرینه‌های M ، N و P نسبت به وسطهای ضلعهای AB ، BC و AC باشند (شکل (الف))، مثلثهای MNP و $M_1N_1P_1$ مساحتی مساوی دارند (به‌ویژه، اگر نقطه‌های M ، N و P

هم‌خط باشند، نقطه‌های M_1 ، N_1 و P_1 نیز هم‌خطند).



ب. اگر M_1 ، N_1 و P_1 بترتیب بر ضلعهای AC ، BA و CB از مثلث ABC چنان باشند که $MM_1 \parallel BC$ ، $NN_1 \parallel CA$ و $PP_1 \parallel AB$ (شکل (ب))، مثلثهای MNP و $M_1N_1P_1$ مساحتی مساوی دارند (به ویژه هرگاه نقطه های M ، N و P همخط باشند، نقطه های M_1 ، N_1 و P_1 نیز همخطند).

۴.۳. تصویرهای آفین و تصویری در چندضلعی

۳.۴.۱. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

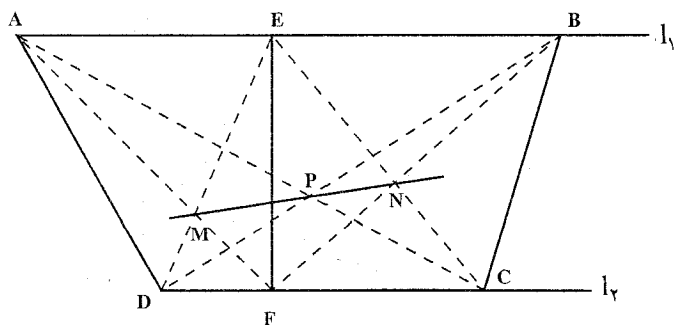
۳۸۱. چهارضلعی چپ $ABCD$ داده شده است. صفحه های تصویر را به قسمی بیابید که تصویر این چهارضلعی مستطیل $A'B'C'D'$ گردد.

۳.۴.۲. نقطه های: همخط، همدایره، ...

۳.۴.۲.۱. نقطه ها همخطند

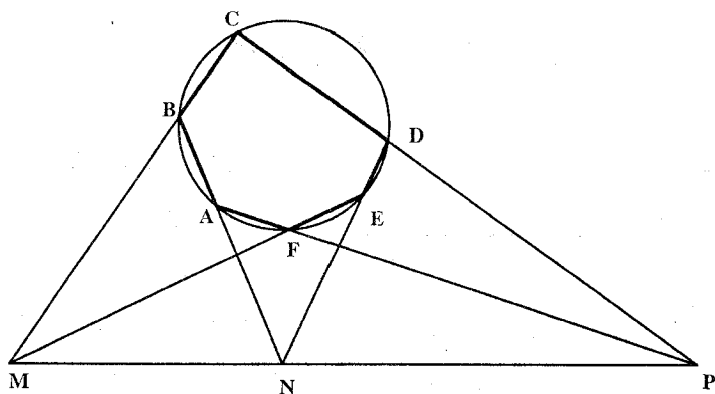
۳۸۲. قضیه پایوس. نشان دهید که اگر یک خط EF چهارضلعی $ABCD$ را به دو چهارضلعی $AEFD$ و $BCFE$ (شکل) تقسیم کند، آن گاه نقطه های برخورد قطره های سه چهار ضلعی $ABCD$ ، $AEFD$ و $BCFE$ همخطند.

یادآور می شویم که این مسأله می تواند به دو طریق زیر نیز بیان شود (شکل):
الف. هرگاه رأسهای A ، E و B از شش ضلعی $AFBDEC$ (که ممکن است نامحذب و حتی خود - متقاطع باشد) بر یک خط l_1 ، و رأسهای D ، E و F بر یک خط l_2 واقع باشند، آن گاه نقطه های برخورد ضلعهای مقابل این شش ضلعی همخطند.



۳۸۳. قضیه پاسکال. نشان دهید که سه نقطه برخورد ضلعهای مقابل یک شش ضلعی محاط در دایره همخطند (شکل).

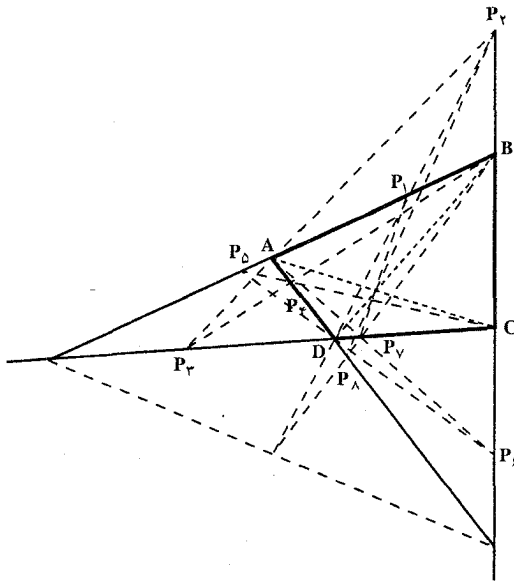
ب. هرگاه ضلعهای AB ، CD و DM از شش ضلعی $ABNCDM$ (که ممکن است نامحدب یا حتی خود - متقاطع باشد) در یک نقطه E ، و ضلعهای CD ، BN و AM در یک نقطه F متقاطع باشند، قطرهای AC ، BD و MN از این شش ضلعی نیز همسرند.



۳۸۴. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یک خط، قضیه زیر را ثابت کنید:

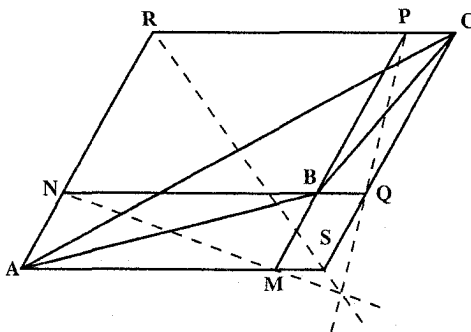
فرض می کنیم P_1 نقطه ای بر ضلع AB از چهار ضلعی $ABCD$ باشد (شکل). گیریم P_2 تصویر P_1 از مرکز D بر خط BC باشد، P_3 تصویر P_2 از مرکز A بر خط CD ، P_4 تصویر P_3 از مرکز B بر خط DA ، و P_5 تصویر P_4 از مرکز C بر خط AB ، و ... ثابت کنید که:

نقطه P_{13} (که پس از سه بار دور زدن چهار ضلعی) بر ضلع AB به دست آمده بر نقطه مفروض P_1 منطبق است (و در نتیجه P_{14} بر نقطه P_2 و P_{15} بر P_3 و ...).



۳.۴.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۳. خطها همرسند



۳۸۵. ضلعهای مثلث ABC قطرهای سه متوازی الاضلاعی هستند که ضلعهای آنها بر یک امتدادند (شکل). نشان دهید که قطرهای دیگر این متوازی الاضلاعها همرسند.

۳۸۶. چهارضلعی EFGH در چهارضلعی ABCD محاط شده است (E بر AB و F بر BC و غیره). نشان دهید اگر نقطه برخورد ضلعهای EF و GH بر قطر AC از ABCD باشد، نقطه برخورد EH و FG بر قطر BC آن است.

۴.۴.۳. زاویه

۱.۴.۴.۳. اندازه زاویه

۳۸۷. چهارضلعی چپ ABCD را در نظر می‌گیریم و تصویر رأس C روی صفحه ABD را C' می‌نامیم. در صورتی که CH و C'H ارتفاعهای دو مثلث BCD و BC'D و $C'H = \frac{1}{2}CH$ باشد، اندازه زاویه صفحه BCD با صفحه ABC را تعیین کنید.

۵.۴.۳. پاره خط

۱.۵.۴.۳. رابطه بین پاره خطها

۳۸۸. ثابت کنید که خط واصل بین نقطه برخورد امتدادهای ساقهای دوزنقه و نقطه برخورد قطرهای آن، قاعده دوزنقه را نصف می‌کند.

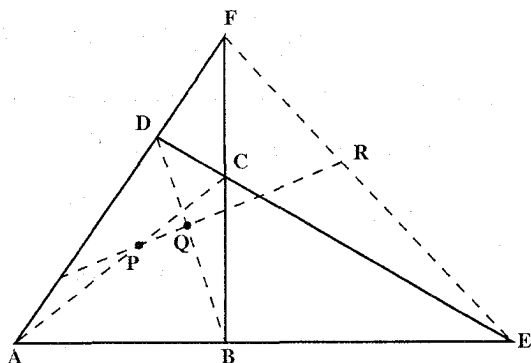
۶.۴.۳. رابطه‌های متری

۳۸۹. نشان دهید که هرگاه E و F نقطه‌های برخورد ضلعهای متقابل AB، CD، AD و BC از یک چهارضلعی دلخواه باشند، آن‌گاه:

$$\frac{AE \cdot CE}{BE \cdot DE} = \frac{AF \cdot CF}{BF \cdot DF}$$

۷.۴.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۳۹۰. ثابت کنید تصویر هر متوازی الاضلاع روی صفحه‌ای که بر صفحه آن عمود نباشد، یک متوازی الاضلاع است.

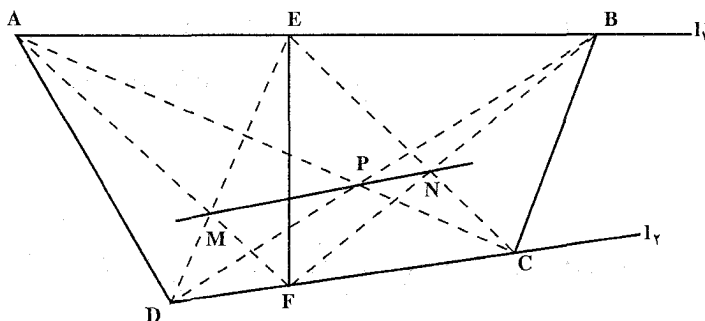


۳۹۱. قضیه چهارضلعی کامل به چه شکلی درخواهد آمد، هرگاه شکل روبه‌رو را طوری تصویر کنیم که خط ABE خط خاص آن باشد؟

(i) ضلع AB خط خاص π باشد؛

(ii) قطر AC خط خاص π باشد.

۳۹۳. در شکل زیر، صفحه π را بر یک صفحه جدید π' تصویر کنید به قسمی که :



(i) خط AB خط خاص π باشد؛

(ii) خط AD خط خاص π باشد.

۹.۴.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۹۴. چهارضلعی محاطی ABCD (محاط در دایره S) داده شده است. ضلعهای روبه‌رو در نقطه‌های P و Q و قطرهای چهارضلعی در نقطه O متقاطعند. ثابت کنید که بینهایت چهارضلعی محاط در دایره S وجود دارد که نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی آنها بر P و Q منطبقند.

۳۹۵. در صفحه، تبدیلهایی اندازه‌نگهدار (= طولیای) را در نظر می‌گیریم که یک شش‌ضلعی منتظم را روی خودش تصویر می‌کنند. این تبدیلهای مجموعه‌ای پدید می‌آورند با:
الف) ۱۱ عضو ب) ۷ عضو ج) ۱۲ عضو د) ۱۳ عضو

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

ب. حکم بالا را با این فرض که چهارضلعی ABCD محیط بر S باشد، ثابت کنید.

۱۰.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۹۶. الف. خط l بر M نقطه برخورد سه میانه مثلث ABC، می‌گذرد و ضلعهای آن را در نقطه‌های R، S و T می‌برد (R و S در یک طرف M قرار دارند). نشان دهید که:

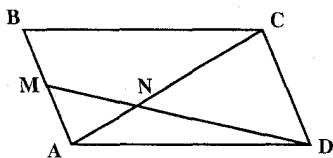
$$\frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} = \frac{1}{MT}$$

ب. خط l بر رأس M از متوازی‌الاضلاع MNPQ می‌گذرد و خطهای NP، PQ و NQ را بترتیب در نقطه‌های R، S و T می‌برد. نشان دهید که:

$$\frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} = \frac{1}{MT}$$

۳۹۷. الف. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. ثابت کنید که هرگاه خط DM از ضلع AB پاره‌خط $AM = \frac{AB}{n}$ را جدا کند، از قطر AC پاره‌خط $AN = \frac{AC}{(n+1)}$ را جدا

خواهد کرد (شکل حالت $n=2$ را نشان می‌دهد). اگر صفحه‌شکل را بر یک صفحه دیگر چنان تصویر کنیم که خط AB با خط خاص آن صفحه موازی باشد، این گزاره به چه



شکلی درخواهد آمد؟

ب. دو خط موازی l_1 و l_2 و پاره خط AB بر l_1 داده شده اند. پاره خط AB را به وسیله ستاره تنها به n جزء مساوی تقسیم کنید.

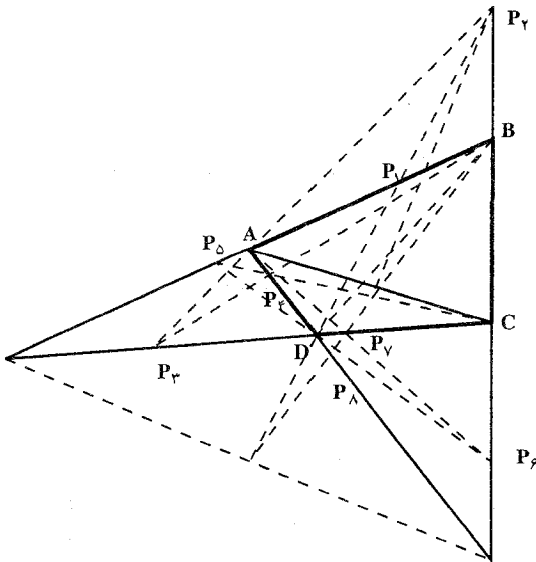
۳۹۸. فرض می کنیم P_1 نقطه ای بر ضلع AB از چهارضلعی $ABCD$ باشد (شکل). گیریم P_2

تصویر P_1 از مرکز D بر خط BC باشد، P_3 تصویر P_2 از مرکز A بر خط CD ، P_4

تصویر P_3 از مرکز B بر خط DA ، و P_5 تصویر P_4 از مرکز C بر خط AB ، و

ثابت کنید :

الف. نقطه P_{13} (که پس از سه بار دور زدن چهارضلعی) بر ضلع AB به دست آمده بر نقطه مفروض P_1 منطبق است (و در نتیجه P_{14} بر نقطه P_2 و P_{15} بر P_3 ، و ...).



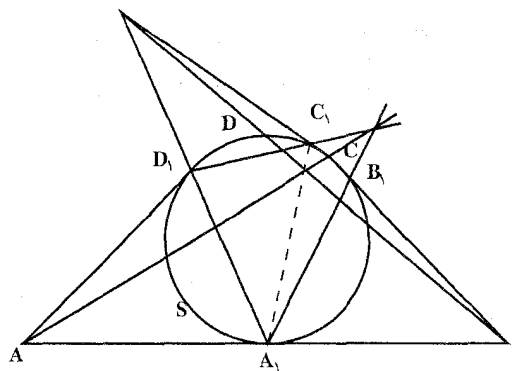
ب. خطهای P_1P_7 ، P_2P_8 ، P_3P_9 و غیره از نقطه برخورد قطره های چهارضلعی می گذرند.

ج. نقطه های برخورد خطهای P_1P_2 و P_7P_8 ، P_2P_3 و P_8P_9 ، P_3P_4 و P_9P_{10} ، و غیره، بر خط واصل بین نقطه های برخورد ضلع های مقابل چهارضلعی واقعند.

۳۹۹. ضلع های چهارضلعی $ABCD$ در نقطه های A_1 ، B_1 ، C_1 و D_1 بر یک دایره S مماس هستند (شکل). نشان دهید که :

الف. نقطه‌های تقاطع
قطرهای چهارضلعیهای
 $A_1B_1C_1D_1$ و $ABCD$
بر هم منطبقند.

ب. امتداد قطرهای
چهارضلعی $ABCD$
نقطه‌های برخورد
ضلعهای مقابل
چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ می‌گذرند.



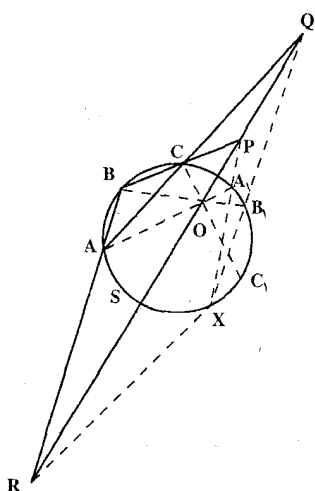
۴۰۰. چهارضلعی $ABCD$ در یک دایره S محاط است و ضلعهای روبه‌رو در نقطه‌های P و Q و قطرهای در نقطه O یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید که:

الف. بینهایت مثلث محاط در S وجود دارند که ضلعهای آنها (یا امتدادشان) از نقطه‌های P ، Q و O می‌گذرند (دقیقتاً بگوییم، اگر دو ضلع یک مثلث محاط در S از دو تا از نقطه‌های P ، Q و O بگذرند، الزاماً ضلع سوم از نقطه سوم خواهد گذشت).

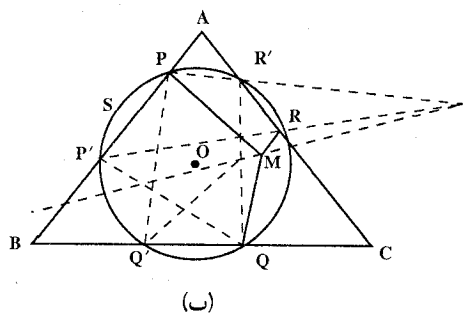
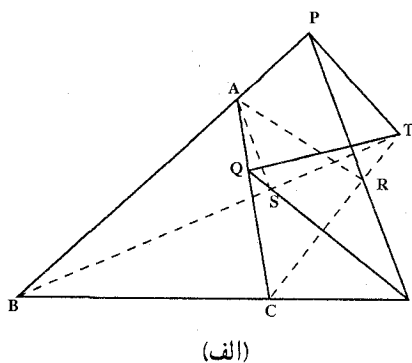
ب. بینهایت چهارضلعی محاط در S وجود دارند که نقطه‌های تقاطع قطرهای آنها بر O منطبقند. یکی از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل بر P منطبق است (دقیقتاً بگوییم، اگر نقطه برخورد قطرهای یک چهارضلعی محاط در S بر O منطبق باشد و یک ضلع آن از P بگذرد، آن گاه ضلع مقابل به آن هم از P خواهد گذشت)، و دومین نقطه برخورد ضلعهای مقابل (در همه این گونه چهارضلعیها) بر Q منطبق است.

۴۰۱. از قضیه پاسکال حکم قضیه (گیریم سه وتر AA_1 ، BB_1 و CC_1 از یک دایره S در یک نقطه O متقاطع باشند و X نقطه‌ای دلخواه از S باشد. نشان دهید که P ، Q و R نقطه‌های برخورد خطهای XA_1 ، XB_1 و XC_1 با ضلعهای BC ، CA و AB از مثلث ABC بر خطی گذرنده بر S واقع است (شکل)) را نتیجه بگیریم.

ب. از یک نقطه T در صفحه یک مثلث ABC عمودهای TP و TQ را بر ضلعهای AB و AC وارد می‌کنیم. سپس T را به رأسهای B و C



وصل و عمودهای AR و AS را بر خطهای TC و TB وارد می کنیم (شکل (الف)). نشان دهید که نقطه تقاطع خطهای PR و QS بر خط BC واقع است.



ج. فرض می کنیم MP، MQ و MR عمودهای رسم شده از یک نقطه M بر ضلعهای مثلث ABC باشند و P' ، Q' و R' دومین نقطه های برخورد ضلعهای مثلث با دایرة S گذرنده بر P، Q و R (شکل (ب)). نشان دهید که نقطه های برخورد $P'Q$ و $P'Q'$ ؛ PR' و $Q'R$ ؛ QR' و $Q'R$ بر خط OM قرار دارند، O مرکز S است.

۴۰۲. یک نقطه M_1 واقع بر ضلع A_1A_2 از یک n ضلعی منتظم $A_1A_2 \dots A_n$ از نقطه A_n بر یک نقطه M_2 از ضلع A_2A_3 تصویر شده است. سپس M_2 از A_1 بر یک نقطه M_3 از ضلع A_3A_4 تصویر شده است. بعد M_3 از نقطه A_4 به یک نقطه M_4 از ضلع A_4A_5 تصویر شده است و این عمل به همین نحو ادامه یافته است. ثابت کنید :

الف. اگر $n = 4$ ، آن گاه نقطه M_{13} ، که پس از ۳ دور تکرار عمل روی n ضلعی به دست آمده است، بر نقطه اولیه M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{14} بر M_2 منطبق است و M_{15} بر M_3 و ...) .

ب. اگر $n = 6$ ، آن گاه نقطه M_{13} ، که پس از سه دور تکرار عمل روی n ضلعی به دست آمده است، بر نقطه اولیه M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{14} بر M_2 منطبق است، M_{15} بر M_3 و ...) .

ج. اگر $n = 10$ ، آن گاه نقطه M_{11} ، که پس از یک دور عمل روی n ضلعی به دست آمده است، بر نقطه اولیه M_1 منطبق است (و بنابراین، M_{12} بر M_2 منطبق است، M_{13} بر M_3 و ...) .

۴۰۳. در چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ فرض می‌کنیم N نقطه برخورد قطرهای P و Q و نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌رو و B_1, B_2, B_3, B_4 و B_4, B_3, B_2, B_1 نقطه‌های برخورد ضلعهای چهارضلعی با خطهای NP و NQ باشند. گیریم ضلعهای چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ ضلعهای چهارضلعی $B_1B_2B_3B_4$ محاط در خود را در نقطه‌های $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8$ نظیر شکل ببرند، ثابت کنید که:

الف. خطهای $M_1M_5, M_2M_6, M_3M_7, M_4M_8$ از N می‌گذرند.

ب. خطهای M_2M_3 و M_6M_7 از P می‌گذرند و خطهای M_1M_8 و M_5M_4 از Q .

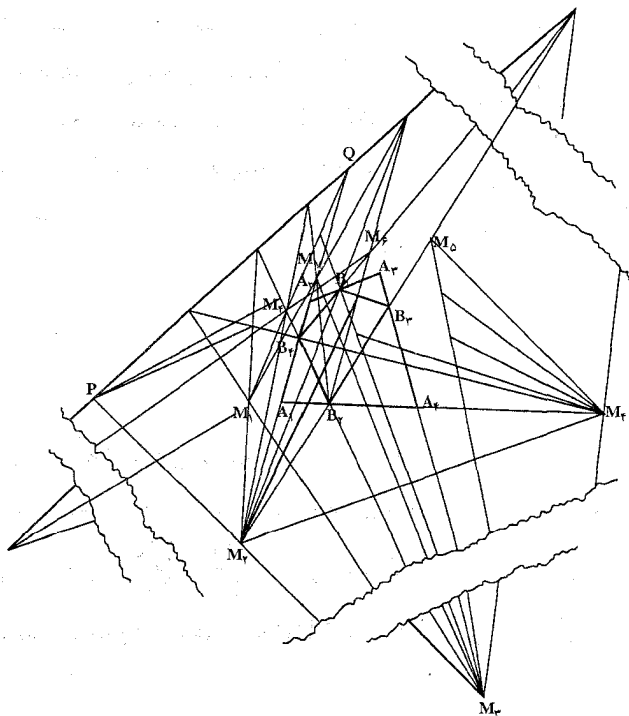
ج. خطهای $M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6, M_7M_8$ از نقطه برخورد PQ با قطر A_1A_3 می‌گذرند و $M_1M_6, M_2M_5, M_3M_4, M_7M_8$ از نقطه برخورد PQ و قطر A_2A_4 .

د. خطهای هریک از چهارتاییهای:

$M_1M_3, M_5M_7, B_4M_4, B_2M_8$; $M_1M_4, M_6M_8, B_4M_5, B_2M_1$;

$M_3M_5, M_1M_7, B_1M_6, B_3M_2$; $M_2M_6, M_2M_8, B_1M_7, B_3M_3$

در یک نقطه یکدیگر را می‌برند و این چهار نقطه حاصل بر خط PQ واقعند.



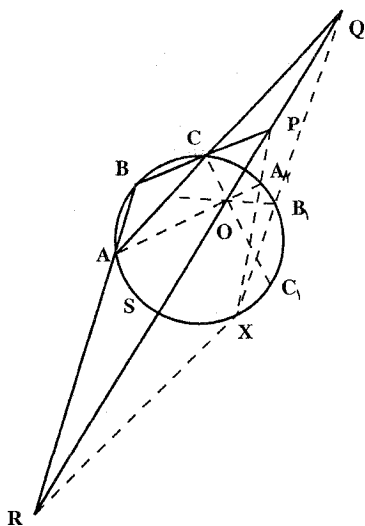
۵.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در دایره

۱.۵.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۴۰۴. در یک تصویر مرکزی که دو صفحه π و π' با هم موازی اند، تصویر دایره (C) دایره (C') است. مرکز این تصویر را تعیین کنید.

۲.۵.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۳. نقطه‌ها همخطند



۴۰۵. گیریم سه وتر AA_1 ، BB_1 و CC_1 از یک دایره S در یک نقطه O متقاطع باشند و X نقطه‌ای دلخواه از S باشد. نشان دهید که P، Q و R نقطه‌های برخورد ضلعهای XA_1 ، XB_1 و XC_1 با ضلعهای AB و CA ، BC از مثلث ABC بر خطی گذرنده بر نقطه O واقع است (شکل).

۲.۲.۵.۳. نقطه‌ها برهم منطبقند

۴۰۶. گیریم سه نقطه M، N و P بر ترتیب بر ضلعهای AB، BC و AC از مثلث ABC باشند به

قسمی که $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. نشان دهید که:

الف. نقطه برخورد میانه‌های مثلث MNP بر نقطه تلاقی میانه‌های مثلث ABC منطبق است.

ب. نقطه برخورد میانه‌های مثلث حاصل از خطهای AN، BP و CM بر نقطه برخورد میانه‌های مثلث ABC منطبق است.

۳.۵.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۳.۵.۳.۱. خطها موازی اند

۴۰۷. در درون دایره به شعاع $n \in \mathbb{N}$ ، به تعداد $4n$ پاره‌خط، که طول هر کدام برابر واحد است، قرار داده‌ایم. ثابت کنید، اگر خط راستی مفروض باشد، خط راست دیگری را می‌توان پیدا کرد که یا موازی با آن و یا عمود بر آن است و در ضمن، دست کم دو پاره‌خط را قطع می‌کند.

المیادهای ریاضی کشورهای مختلف، اتریش، ۱۹۷۷

۳.۵.۴. زاویه

۳.۵.۴.۱. اندازه زاویه

۴۰۸. تصویر دایره $(C(O, 4))$ روی صفحه P که با صفحه دایره موازی نیست، یک بیضی به قطرهای ۸ و ۶ است. اندازه زاویه بین صفحه دایره و صفحه تصویر P را تعیین کنید.

۳.۵.۵. پاره‌خط

۳.۵.۵.۱. اندازه پاره‌خط

۴۰۹. الف. فرض می‌کنیم O وسط وتر AB از یک دایره S باشد، و MN و PQ دو وتر باشند که بر O می‌گذرند. اگر E و F نقطه‌های برخورد MP و NQ با AB باشند، نشان دهید که O وسط پاره‌خط EF است.

ب. فرض می‌کنیم O پای عمود وارد از مرکز دایره S بر یک خط l ، و MN و PQ وترهایی از S باشند که l را در نقطه‌های C و D قطع کرده‌اند به طوری که $OC = OD$.

هرگاه E و F نقطه‌های برخورد MP و NQ با I باشند، نشان دهید که O وسط وتر EF است.

۶.۵.۳. رابطه‌های متری

۴۱۰. تصویرهای جسمی بر دو صفحه، دایره شده است. ثابت کنید، این دو دایره، شعاعهایی برابر دارند.

المیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۰

۷.۵.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۴۱۱. تصویر گنجنگاشتی، هر دایرة واقع بر کره σ را به یک دایره، یا یک خط در صفحه π' بدل می‌کند و بعکس، پیشنگاشت یک خط یا یک دایرة صفحه π' ، دایره‌ای است واقع بر σ .

۸.۵.۳. رسم شکلها

۴۱۲. نقطه‌ای تعیین کنید که نسبت به دو دایره دارای یک خط قطبی باشد.

۴۱۳. چگونه می‌توان هر تعداد دلخواه نقطه از یک دایره را پیدا کرد، در صورتی که مرکز A و شعاع آن داده شده باشد؟

۴۱۴. در دایرة مفروض یک چهارضلعی محاط کنید که:

الف. نقطه برخورد قطرهای آن، M، و دو نقطه K و L از دو ضلع مقابل آن داده شده باشند.

ب. نقطه برخورد دو ضلع مقابل و یک نقطه از هریک از دو ضلع دیگر داده شده باشد.

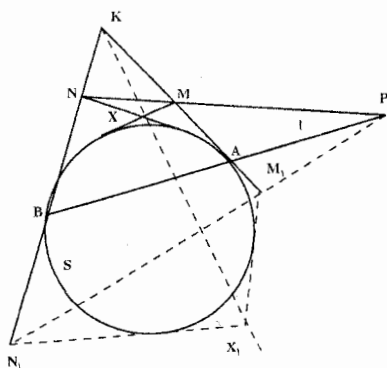
۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۱۵. S یک دایره و P نقطه‌ای در صفحه S است. کلیه قاطعهای S گذرنده بر P را در نظر می‌گیریم. هریک از این قاطعها یک جفت نقطه از S را مشخص می‌کند. به هر جفت از

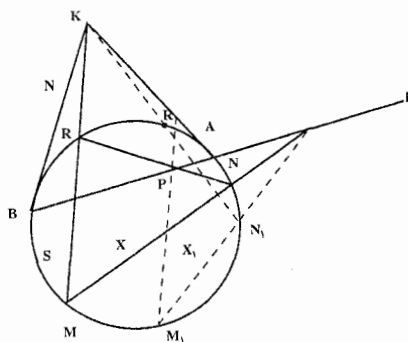
این نقطه‌ها، نقطه برخورد مماس در آنها بر دایره را مربوط می‌کنیم. مکان این نقطه‌های برخورد را پیدا کنید.

۱۰.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۶. دایره S و نقطه P در یک صفحه داده شده‌اند. خط l بر P می‌گذرد و با S در نقطه‌های A و B برخورد می‌کند. فرض می‌کنیم K نقطه برخورد مماسهای بر S در A و B باشد.



(الف)

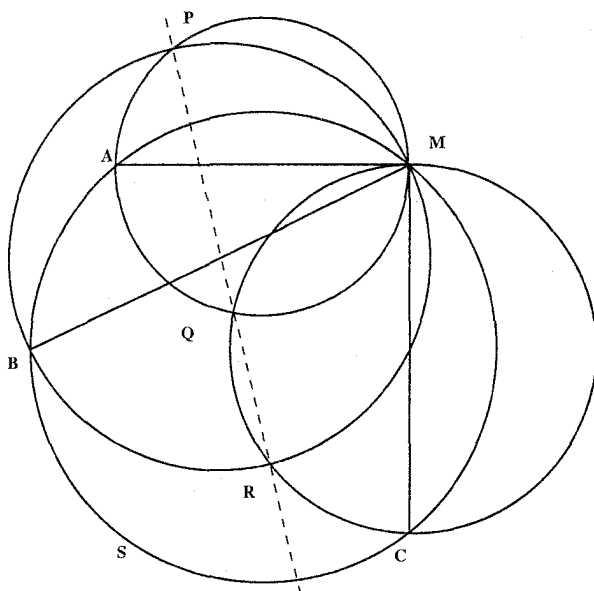


(ب)

الف. یک خط متغیر گذرنده بر P ، خطهای AK و BK را در نقطه‌های M و N می‌برد (شکل (الف)). ثابت کنید که مکان X ، نقطه تقاطع دومین مماسهای بر S مرسوم از M و N ، خطی است که بر K می‌گذرد (دقیقتر بگوییم، جزیی از این خط که در بیرون S قرار دارد).

ب. یک نقطه متغیر R از دایره S را به نقطه‌های P و K وصل می‌کنیم (شکل (ب)). نشان دهید که X ، خط واصل بین نقطه‌های M و N دومین نقطه‌های تقاطع خطهای RK و RP با S ، از نقطه ثابتی (مستقل از انتخاب R) واقع بر l می‌گذرد.

۴۱۷. الف. چهار دایره محیطی بر چهار مثلث حاصل از چهار خط دلخواه در صفحه (که هیچ سه‌تای آنها هم‌رس و هیچ دوتای آنها متوازی نیستند) از یک نقطه می‌گذرند. ب. فرض می‌کنیم دایره S و سه وتر آن MA ، MB و MC مفروضند. سه دایره به قطرهای این وترها رسم می‌کنیم. هر جفت از این سه دایره در نقطه دیگری غیر از M



مقاطعند؛ ثابت کنید که همه این نقطه‌ها بر یک خط واقعند (شکل).

ج. اگر a, b, c, d طولهای ضلعهای متوالی یک چهارضلعی محاطی ABCD و e و f طولهای قطرهای آن باشند، آن گاه:

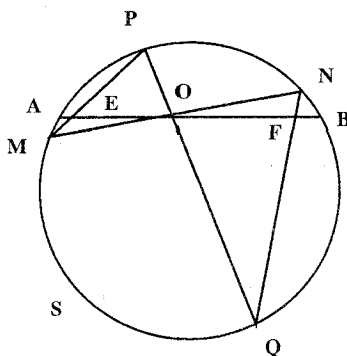
$$ac + bd = ef \quad (\text{قضیه بطلمیوس})$$

۴۱۸. نقطه‌های برخورد دو دایره S_1 و S_2 را پیدا کنید. در صورتی که مرکزهای آنها A_1 و A_2 و شعاعهای آنها، B_1C_1 و B_2C_2 مفروض باشند.

اشاره می‌کنیم که هرگاه به جای دایره کمکی S ، یک قوس کوچک دلخواه MN از S و مرکز آن، O ، داده شده باشد، باز هم می‌توانیم همه ترسیمهای با پرگار و ستاره را با ستاره تنها انجام دهیم. علت آن، این است که نقطه‌های تقاطع یک خط l و یک دایره S را می‌توان با ستاره تنها تعیین کرد، به شرطی که یک قوس MN از S به ما داده شده باشد. O مرکز دایره کمکی S (یا قوس کمکی MN) حتماً باید داده شده باشد. می‌توانیم به طور نسبتاً ساده‌ای نشان دهیم که اگر مرکز S داده نشده باشد، نمی‌توانیم بدون پرگار آن را تعیین کنیم. برای اثبات این حکم عیناً همان راهی را می‌رویم که برای اثبات این که «در رسم خطی موازی با یک خط مفروض، رسم با ستاره تنها وجود ندارد» رفته بودیم. فرض کنید که یک ترسیم با ستاره تنها برای تعیین O ، مرکز یک دایره S ، وجود داشته باشد. نمودار این ترسیم فرضی دستگاهی از خطها است که به نحوی با دایره S مربوط است، و دوتا از این خطها در O ، مرکز S ، یکدیگر را می‌برند. صفحه π ی

نمودار خود را بر یک صفحه جدید π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایره S' ، و مرکز O آن به یک نقطه O' ، که مرکز S' نیست، بدل شود. انجام این عمل ممکن است. نمودار در π' کاملاً مشابه نمودار π است جز این که نقطه O' مرکز S' نیست. این نشان می‌دهد که ترسیم با ستاره تنها برای تعیین مرکز یک دایره دلخواه وجود ندارد. خلاصه این که: اگر مرکز دایره کمکی S داده نشده باشد، نمی‌توانیم همه ترسیمهای با ستاره و پرگار را به کمک ستاره تنها انجام دهیم (به‌ویژه ممکن است مرکز S را با ستاره و پرگار تعیین کرد ولی نه با ستاره تنها).

به علاوه، حتی اگر دو دایره نامتقاطع با مرکزهای نامعلوم در صفحه داده شده باشند، تعیین این مرکزها با ستاره تنها میسر نیست (جز وقتی که بدانیم دایره‌ها هم‌مرکزند). آنچه که می‌توان نشان داد این است که ترسیمهای با ستاره تنها برای تعیین مرکزهای دو دایره متقاطع یا مماس، یا سه دایره غیرمشخص که به یک دسته دایره متعلق نباشند، وجود ندارد.



ب. فرض می‌کنیم O پای عمود وارد از مرکز دایره S بر یک خط l ، و MN و PQ وترهایی از S باشند که l را در نقطه‌های C و D می‌برند به طوری که $OC = OD$. هرگاه E و F نقطه‌های برخورد MP و NQ با l باشند، نشان دهید که O وسط وتر EF است.

۴۱۹. با استفاده از ویژگیهای تبدیل تصویری یک دایره، قضیه‌های الف - ج را ثابت کنید: چهارضلعی $ABCD$ در یک دایره S محاط است و ضلعهای روبه‌رو در نقطه‌های P و Q ، و قطرهای O یکدیگر را قطع می‌کنند.

الف. بینهایت مثلث محاط در S وجود دارند که ضلعهای آنها (یا امتدادشان) از نقطه‌های P ، Q و O می‌گذرند. (دقیقتاً بگوییم، اگر دو ضلع از یک مثلث محاط در S از دو تا از نقطه‌های P ، Q و O بگذرند، الزاماً ضلع سوم از نقطه سوم خواهد گذشت.)

ب. بینهایت چهارضلعی محاط در S وجود دارند که نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل آنها بر P و Q منطبقند (دقیقت بگوییم، اگر دو ضلع مقابل یک چهارضلعی محاط در S یکدیگر را در P ببرند، و ضلع سوم از Q بگذرد، آن گاه ضلع مقابل به آن نیز از Q خواهد گذشت.) و نقطه‌های برخورد قطرهای همه این نوع چهارضلعیها بر O منطبقند.

ج. بینهایت چهارضلعی محاط در S وجود دارند که نقطه‌های برخورد قطرهای آنها بر O منطبقند، یکی از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل بر P منطبق است (دقیقت بگوییم، اگر نقطه برخورد قطرهای یک چهارضلعی محاط در S بر O منطبق باشد و یک ضلع آن از P بگذرد، آن گاه ضلع مقابل به آن هم از P خواهد گذشت)، و دومین نقطه برخورد ضلعهای مقابل (در همه این گونه چهارضلعیها) بر Q منطبق است.

۴۲۰. الف. در دایره مفروض S ، یک مثلث ABC محاط کنید که از آن، ضلع AB ، امتداد ضلع BC و یک نقطه از ضلع AC معلوم باشند.

ب. در دایره مفروض S ، یک چهارضلعی $ABCD$ محاط کنید که دو نقطه از دو ضلع مقابل آن و طولهای دو ضلع دیگر آن معلوم باشند.

۶.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مقطعهای مخروطی

۱.۶.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۴۲۱. شکل قطبی معکوس دایره α نسبت به دایره ω یک محور تقارن دارد که همان خط‌المركزین دو دایره است. آیا این شکل می‌تواند یک محور تقارن دیگر داشته باشد؟

۴۲۲. دو نقطه P_1 و P_2 واقع در دو سر قطری متغیر از کره α' را در نظر می‌گیریم و تصویرهای جسم نمایی آنها را روی صفحه α با P_1 و P_2 نشان می‌دهیم. تبدیلی را بیابید که به وسیله آن بتوان در صفحه α از P_1 به P_2 رسید.

۲.۶.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۶.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۲۳. ثابت کنید که در مقطع مخروطی مرکزدار، تصویرهای کانونها بر خطهای مماس بر منحنی

روی دایره ثابتی (دایره اصلی) واقعند.

۳.۶.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۶.۳. خطها موازی‌اند

۴۲۴. در تصویر موازی، تصویرهای دو خط هادی یک مقطع مخروطی، دو خط موازی است.

۴.۶.۳. زاویه

۱.۴.۶.۳. اندازه زاویه

۴۲۵. ثابت کنید که تصویر جسم‌نمایی، زاویه‌ها را محفوظ نگه می‌دارد.

۵.۶.۳. پاره خط

۱.۵.۶.۳. اندازه پاره خط

۴۲۶. MN وتری است از یک سهمی به طول ۶ سانتیمتر، واقع در صفحه مفروض π . صفحه π' موازی صفحه π و به فاصله ۸ سانتیمتر از صفحه π و نقطه O به فاصله ۲ سانتیمتر از صفحه π داده شده است. طول تصویر مرکزی MN روی صفحه π' را تعیین کنید.

۶.۶.۳. رابطه‌های متری

۴۲۷. نقطه P بر هذلولی به کانونهای O و O_1 تغییر مکان می‌دهد. ثابت کنید که تفاضل شعاعهای حامل آن، یعنی $|OP - O_1P|$ مقدار ثابتی است.

۷.۶.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۴۲۸. ثابت کنید که در تصویر جسم نمایی، هر دایرة عظیمه از کره α' به یک دایره (یا یک خط) از صفحه α تبدیل می شود که با دایرة معینی در دو نقطه واقع در دو سر یک قطر متقاطع می باشند.

۸.۶.۳. رسم شکلها

۴۲۹. با استفاده از تصویر جسم نمایی، شش دایرة مورد نظر در تمرین (اولاً سه دایرة متساوی رسم کنید که بر هم مماس باشند. ثانیاً سه دایرة دیگر با همان ویژگی را چنان رسم کنید که هر کدام از آنها بر دو دایره از مجموعه اول نیز مماس باشند. انحرافهای بین این شش دایره را تعیین کنید.) را از روی شش دایرة محاط در شش وجه یک مکعب به دست آورید.

راهنمایی و حل

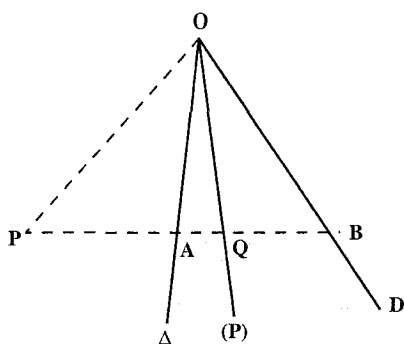
از آن جا که به گفته جورج پولیا J. Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازه کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد»، در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهده دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوه تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه حل‌ها و راهنمایی‌های ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه حل یا راهنمایی، نمی‌باشند؛ و به طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه حل‌هایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه حل‌های موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

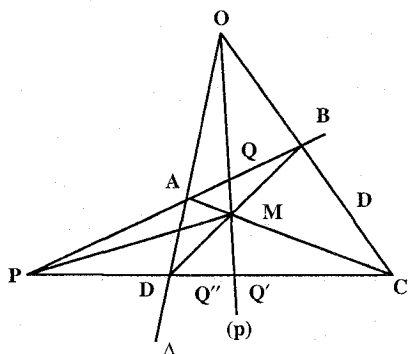
هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، اما ممکن است باز هم اشکالها و نادرستی‌هایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقمندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه حل‌های جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه حل‌های مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هر چه پر بارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستی‌های آن مورد استفاده قرار گیرد؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالب‌ترین راه حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستنده آن، در چاپ‌های بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱. قطب و قطبی

۱.۱. تعریف و قضیه



نقطه مانند M از خط OQ مزدوج توافقی P است، نسبت به نقطه های برخورد PM با D و Δ ، زیرا که دستگاه (O - PQAB) توافقی است؛ پس OQ قطبی P است نسبت به Δ و D. نتیجه. قطبی هر نقطه نسبت به دو خط متوازی، با آنها موازی است. قرارداد. قطبی هر نقطه را با همان حرف، ولی کوچک، نام می گذاریم. به طور مثال خط (p) قطبی نقطه P است، همچنان که نقطه P قطب خط (p) است.



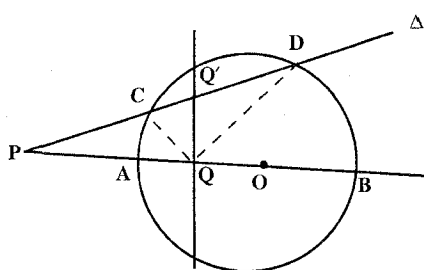
$(M - PQAB)$ توافقی است و قاطع PDC آن را در P ، D ، Q'' و C قطع کرده است، Q'' باید مزدوج توافقی P نسبت به D و C باشد، یعنی باید بر Q' منطبق باشد. پس QM بر Q' می‌گذرد، یعنی بر (p) منطبق است یا به عبارت دیگر، (p) از M می‌گذرد.

۲. خط (p) قطبی p را نسبت به Δ و D به دست می آوریم و ثابت می کنیم که بر M می گذرد. می دانیم که نقطه Q و نقطه Q'، نقطه های برخورد (p) با دو قاطع، مزدوجهای توافقی P نسبت به نقطه های برخورد قاطعها با Δ و D هستند. حال می گوئیم که اگر خط (p) بر نقطه M نگذرد، چنانچه از Q به M وصل کنیم و امتداد دهیم تا قاطع PDC را در Q' قطع کند، از آنجا که دستگاه

نکته. با استفاده از قضیه بالا راه حل ساده‌ای برای ترسیم قطبی هر نقطه نسبت به دو خط به دست می‌آید.

تعریف. دو نقطه را نسبت به دو خط مزدوج گویند، وقتی که قطبی یکی از آنها از نقطهٔ دیگر بگذرد.

۳. دایره O و نقطه P داده شده اند (شکل).



قطری که بر P گذشته، دایره را در A و B قطع کرده است و Q مزدوج توافقی P را نسبت به A و B به دست آورده ایم. حال از نقطه P قاطع غیر مشخصی مانند Δ رسم می کنیم، تا دایره را در C و D قطع کند و Q' مزدوج P را نسبت به C و D به دست

می‌آوریم. مطابق تعریف، Q' و Q روی قطبی نقطه P قرار دارند. اگر ثابت کنیم که QQ' بر AB عمود است، قضیه ثابت می‌شود. چون A و B پاره‌خط PQ را به نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند و C و D بر روی دایره‌ای به قطر AB واقعند، داریم:

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{AP}{AQ} \quad (1)$$

$$\frac{DP}{DQ} = \frac{AP}{AQ} \quad (2)$$

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{DP}{DQ}$$

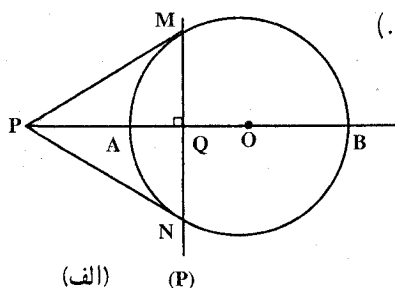
$$\frac{CP}{DP} = \frac{CQ}{DQ}$$

$$\frac{QC}{OD} = \frac{PC}{PD} = \frac{Q'C}{O'D} \quad (३)$$

یہیں :

و پس از عوض کردن جای دو وسط :

٢٠



(زیرا که Q' مزدوج توافقی P است نسبت به C و D .)

از رابطه (۳)، نتیجه می‌گیریم که در مثلث CQD دو خط QP و QQ' ضلع CD را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم کرده‌اند، پس نیمسازهای داخلی و خارجی مثلثند، و برهم عمودند، یعنی QQ' بر AB عمود است.

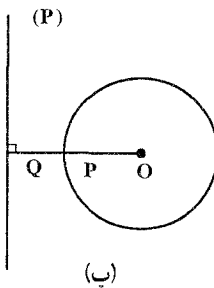
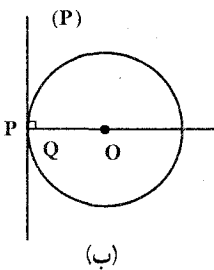
نتیجه ۱. چون مماس حد قاطع است، مماسهایی که از نقطه P بر دایره رسم شوند، در نقطه تماس، قطب نقطه P را قطع می کنند (شکل (الف)).

نتیجه ۲. بین OP، فاصله مرکز دایره از نقطه P، و OQ، فاصله مرکز دایره از قطبی این رابطه است: $OP \cdot OQ = R^2$

از این رابطه نتیجه می شود که :

۱. اگر داشته باشیم: $OP > R$ ، داریم $OQ < R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که خارج دایره باشد، دایره را قطع می کند (شکل (الف)).

۲. اگر داشته باشیم: $OP = R$ ، داریم: $OQ = R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که روی دایره باشد، در همان نقطه بر دایره مماس است (شکل (ب)).



۳. اگر داشته باشیم: $OP < R$ ، داریم: $OQ > R$ ؛ یعنی قطبی هر نقطه که داخل دایره باشد، در خارج دایره واقع است (شکل (پ)).

باید توجه داشت که در حالت اول، یعنی وقتی که P خارج دایره باشد (شکل (الف))، فقط جزء MN از خط نامحدود (p) در تعریف قطبی صادق است، یعنی مکان مزدوجهای توافقی P است.

در حالت دوم، یعنی وقتی که P بر روی دایره است (شکل (ب))، فقط نقطه P در تعریف قطبی صادق است.

در حالت سوم، تمام نقطه های خط (p) در تعریف قطبی صدق می کنند. با وجود این، در حالت های اول و دوم هم، با مسامحه در لفظ، تمام خط (p) را قطبی P می گویند.

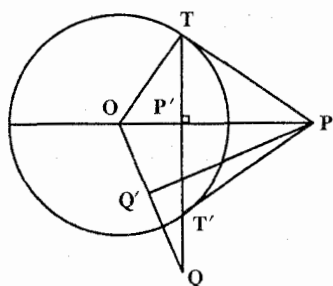
بنابراین گذشته، اگر دایره ای به مرکز O و شعاع R و نقطه ای مانند P و خطی مانند (p) چنان باشند که (p) بر OP عمود باشد و آن را در Q قطع کند و $OP \cdot OQ = R^2$ باشد، خط (p) را قطبی نقطه P نسبت به دایره ذکر شده و نقطه P را قطب خط (p) نسبت به همان دایره می نامیم.

تبصره. از رابطه $OP \cdot OQ = R^2$ ، معلوم می شود که بردارهای OP و OQ متحدالجهتند و

در نتیجه قطبی هر نقطه نسبت به این دایره با خود آن نقطه همیشه یک طرف مرکز دایره قرار دارند.

۴. در واقع، اگر محل برخورد وتر TT' را، که از دو نقطه تماس می‌گذرد، با قطر OP ، که از قطب P می‌گذرد، P' بنامیم (شکل در صورت)، P' وارون P نسبت به دایره است، زیرا در مثل قائم‌الزاویه OTP داریم:

$$OT^2 = OP \cdot OP'$$



۵. اگر خط PQ دایره را در دو نقطه C و D قطع کند، برقراری قضیه تقریباً روشن است. در واقع اگر خط قطبی نقطه P از Q بگذرد، داریم $(PQCD) = -1$ ، پس P مزدوج همساز Q نسبت به D است و خط قطبی نقطه Q هم از P خواهد گذشت. اثبات زیر، چه خط PQ دایره را قطع کند و چه قطع نکند، معتبر است.

دو نقطه P و Q ، و P' و Q' ، وارون آنها نسبت به دایره (O, R) ، چهار نقطه همدایره‌اند؛ زیرا:

$$OP \cdot OP' = R^2 = OQ \cdot OQ'$$

پس زاویه‌های $PP'Q$ و $PQ'Q$ در چهارضلعی محاطی $PQQ'P'$ (شکل) برابرند. QP'

خط قطبی نقطه P است؛ زیرا از Q و وارون P ، یعنی P' ، می‌گذرد. پس $\angle PP'Q = 90^\circ$ و

در نتیجه، $\angle PQ'Q = 90^\circ$. پس خط PQ' از وارون Q ، یعنی Q' ، می‌گذرد و بر عمود OQ

است، یعنی PQ' خط قطبی نقطه Q است، و چون PQ' از P می‌گذرد، قضیه ثابت شده است.

۶. فرض کنید P و Q به ترتیب قطبهای دو خط p و q باشند، بنابر فرض، P روی q است، یعنی خط قطبی Q از نقطه P می‌گذرد؛ پس خط قطبی P ، یعنی خط p ، نیز از Q می‌گذرد.

۷. نقطه P و قطبی آن (p) نسبت به دایره O داده شده‌اند

(شکل)؛ خط غیر مشخص δ را بر P می‌گذرانیم و

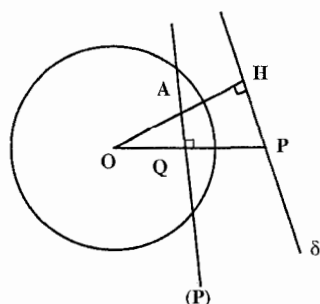
ثابت می‌کنیم که قطب آن روی (p) است؛ اگر از O

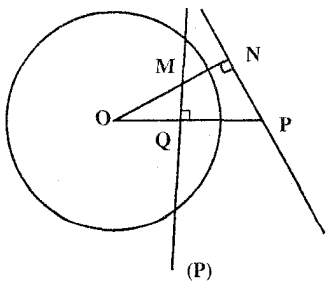
عمودی بر δ فرود آوریم تا آن را در H و (p) را در A

قطع کند، چهارضلعی $AHPQ$ محاطی است و داریم:

$$OA \cdot OH = OQ \cdot OP = R^2$$

یعنی A قطب δ است.





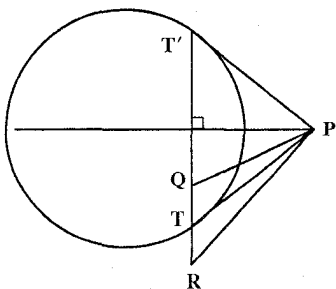
۸. خط (p) و قطب آن P نسبت به دایره O داده شده‌اند (شکل)؛ نقطه‌ای مانند M بر روی (p) اختیار می‌کنیم و از P عمود PN را بر OM فرود می‌آوریم؛ چون چهارضلعی QMNP محاطی است، داریم:

$$OM.ON = OQ.OP = R^2$$

يعني خط PN قطبي نقطة M است.

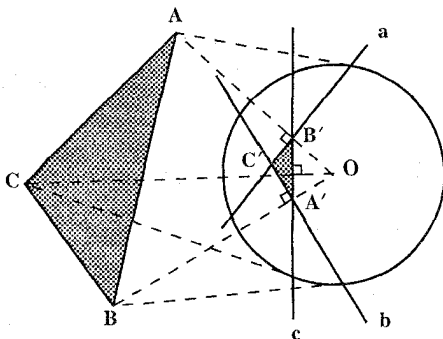
نتیجه ۱. خطی که قطبهای دو خط را به هم مربوط سازد، قطبی نقطه تقاطع آن دو خط است.

نتیجه ۲. نقطه تقاطع دو خط، قطب خطی است که قطبهای آن دو خط را به هم مربوط کند.



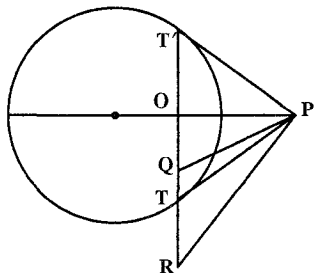
۹. فرض کنید دو خط مزدوج PQ و PR و وتر TT' را در Q و R قطع کنند (شکل)، که T و T' نقطه‌های تماس مماسهایی هستند که از P بر دایره رسم می‌شوند. قطب PR روی PQ و روی خط قطبی P، یعنی TT' قرار دارد؛ زیرا PR از P می‌گذرد؛ بنابراین، Q قطب PR است. پس $(TT'QR) = -1$ ؛ و بنابراین، $P(TT'QR)$ یک دسته خط همساز است.

۱۰. اولاً، بنابه فرض، هر ضلع از شکل دوم، منطبق بر قطبی یک رأس از شکل اول است. ثانیاً، چون (a) قطبی A و (b) قطبی B می‌باشد (شکل)، C' نقطه تقاطع (a) و (b)، قطب خطی است که بر A و B می‌گذرد، یعنی C' قطب ضلع AB است. به همین ترتیب، هر



رأس شکل دوم، قطب یکی از ضلعهای شکل اول می‌شود، به عبارت دیگر، هر ضلع شکل اول، قطبی یکی از رأسهای شکل دوم است.

۱۱. خط PC (شکل الف)) که از P به مرکز دایره (C)

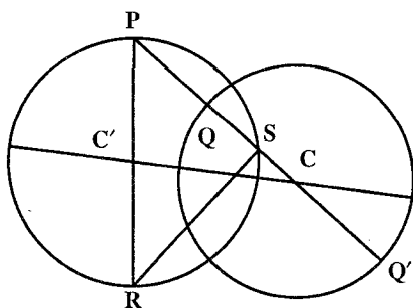


(الف)

رسم می‌شود، (C') را مجدداً در وارون P نسبت به (C) ، یعنی نقطهٔ S قطع می‌کند؛ پس خط قطبی P نسبت به (C) در S بر PC عمود است و (C') را مجدداً در R که انتهای دیگر قطری از (C') است که از P می‌گذرد، قطع می‌کند.

بعكس، بنابر فرض، خط قطبی P نسبت به (C) از نقطه R می‌گذرد (شکل (ب)) و همچنین، بر PC

عمود است. پس این خط قطبی بر RS منطبق است، یعنی S و P نسبت به (C) است. در نتیجه دو دایره متعامدند.



(ب)

۱۲. اگر رأس P از مثلث PQR ، که نسبت به دایره (O) قطبی است، داخل (O) باشد، دو رأس دیگر Q و R روی خط قطبی P ، و بنابراین خارج دایره (O) قرار دارند.

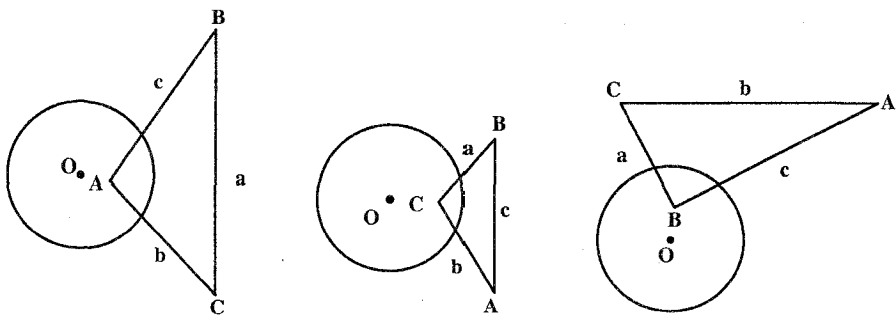
اگر P را خارج (O) بگیریم، خط قطبی P دایرهٔ (O) را در دو نقطه مانند E و F، قطع می‌کند. رأسهای Q و R نسبت به (O) مزدوجند؛ بنابراین توسط E و F به صورت همساز تقسیم می‌شوند، و در نتیجه، یکی از آنها داخل و دیگری خارج دایرهٔ (O) قرار دارد.

۱۳. اگر مثلث PQR نسبت به دایره (O) قطبی باشد، عمودهایی که از P، Q و R بر خطهای قطبی این نقطه‌ها، یعنی QR، RP و PQ رسم می‌شوند، از مرکز (O) می‌گذرند؛ پس قضیه ثابت شده است.

۱۴. در شکل (الف) سه حالت ممکن مثلث مزدوج ABC نشان داده شده است و ملاحظه می شود که در هر یک از سه حالت، یک رأس در داخل دایره و دو رأس دیگر در خارج دایره واقعند و زاویه نظیر رأس واقع در داخل دایره، منفرجه می باشد (زیرا مرکز ارتفاعی مثلث همان O، مرکز دایره ω می باشد). بعکس، اگر مثلث ABC در یک زاویه منفرجه و O مرکز ارتفاعی آن و A' ، B' و C' بترتیب پاهای ارتفاعهای نظیر رأسهای A، B و C باشند، داریم:

$$OA \times OA' = OB \times OB' = OC \times OC' = k^2$$

بنابراین نسبت به دایره ω به مرکز O و به شعاع k، مثلث مزبور مزدوج می باشد. این دایره را که برای مثلث منفرج الزاویه ABC منحصر به فرد است، دایره مزدوج آن مثلث می نامند.



(الف)

از رابطه بالا نتیجه می شود که در انعکاس نسبت به دایره ω ، نقطه های A، B و C بترتیب به نقطه های A' ، B' و C' تبدیل می شوند، به عبارت دیگر، دایره محیطی مثلث ABC به دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ تبدیل می شود. از این رو قضیه ثابت شده است.

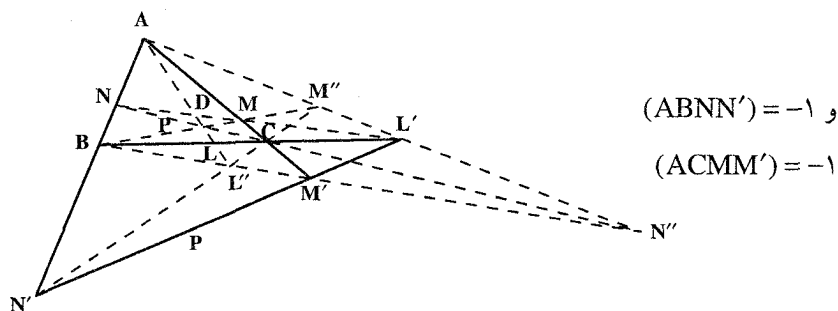
۱۵. در هر مورد (الف) و (ب)، بنابر مطالب گفته شده در ترسیم، با در نظر گرفتن اندازه و علامت، داریم:

$$\frac{BL'}{L'C} = -\frac{BL}{LC} \text{ و } \frac{CM'}{M'A} = -\frac{CM}{MA} \text{ و } \frac{AN'}{N'B} = -\frac{AN}{NB}$$

پس با ضرب کردن این برابریها به دست می آوریم:

$$-\frac{BL' \cdot CM' \cdot AN'}{L'C \cdot M'A \cdot N'B} = \frac{BL \cdot CM \cdot AN}{LC \cdot MA \cdot NB}$$

در حالت (الف)، سمت راست رابطه بالا، بنابر قضیه سوا، برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیه منلائوس، نتیجه می شود که نقطه های M' ، L' و N' همخطند. در مورد (ب)، بنابر قضیه منلائوس، سمت چپ رابطه بالا برابر واحد است و از تساوی حاصل، بنابر قضیه سوا، نتیجه می شود که خطهای AL ، BM و CN همرسند. ۱۶. داریم (شکل):



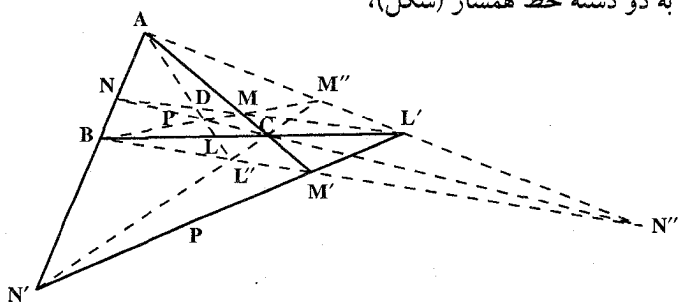
$$(ABNN') = -1$$

$$(ACMM') = -1$$

و دو گستره همساز در نقطه A مشترکند. پس خطهای BC ، MN و $M'N'$ همرسند؛ یعنی نقطه L' با M و N همخط است. به طور مشابه، M' با L و N' و M با L و N همخط است، و قضیه ثابت می شود.

نکته. مثلث ABC و نقطه P مفروضند. قضیه بالا راه ساده ای برای ترسیم قطبی سه خطی P برای مثلث ABC ، یعنی خط p ، تنها با استفاده از خط کش به دست می دهد. قضیه. قطبی سه خطی یک نقطه برای یک مثلث، قطبی سه خطی مثلث سوایی این نقطه نسبت به مثلث مفروض نیز هست.

۱۷. با توجه به دو دسته خط همساز (شکل)؛ پس نقطه L' مزدوج همساز D ، نقطه برخورد APL و $L'MN$ ، نسبت به M و N است. پس L' نقطه ای از قطبی سه خطی P برای مثلث LMN است. برای M' و N' نیز چنین است، پس قضیه ثابت می شود.

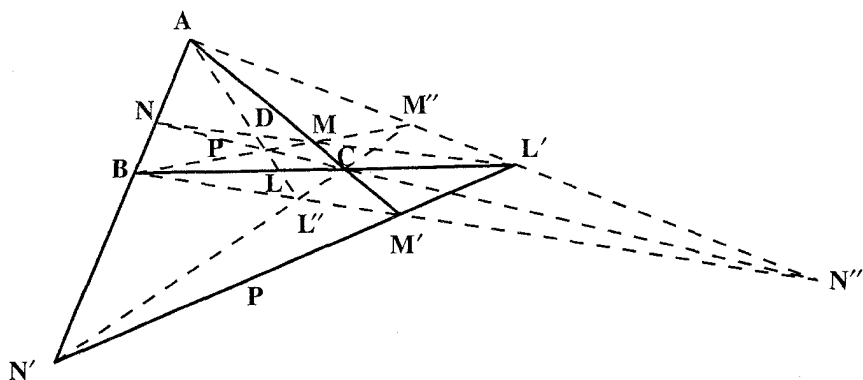


$$B(ACMM') = -۱ \text{ و } C(ABNN') = -۱$$

که توسط خط APL قطع می‌شوند، نتیجه می‌شود که BM' و CN' از مزدوجهای همساز P نسبت به A و L می‌گذرند؛ پس این مزدوج همساز نقطه L'' بین دو خط BM' و CN' مشترک است. در مورد M'' و N'' نیز گزاره‌های مشابهی برقرارند. نتیجه، وابسته‌های همساز نقطه P نسبت به مثلث ABC رأسهای یک مثلث منظری نسبت به ABC هستند؛ نقطه P مرکز منظری، و قطبی سه خطی P برای ABC محور منظری است.

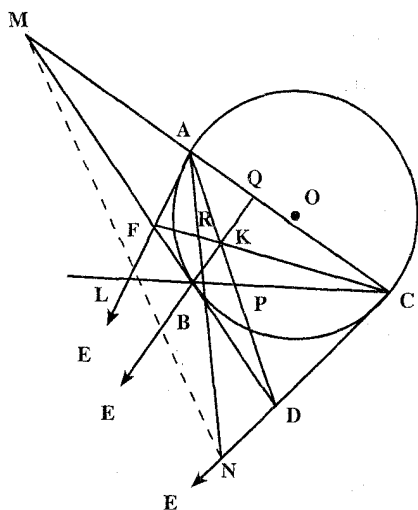
نکته. اگر مثلث ABC و خط $p = L'M'N'$ مفروض باشند، خطهای AL' ، BM'' و CN' نقطه‌های L'' ، M'' و N'' را تعیین می‌کنند و خطهای AL'' ، BM'' و CN'' یکدیگر را در قطب همساز خط p برای مثلث ABC ، یعنی نقطه P ، قطع می‌کنند.

۱۸. اثبات به آسانی با توجه به شکل به دست می‌آید.

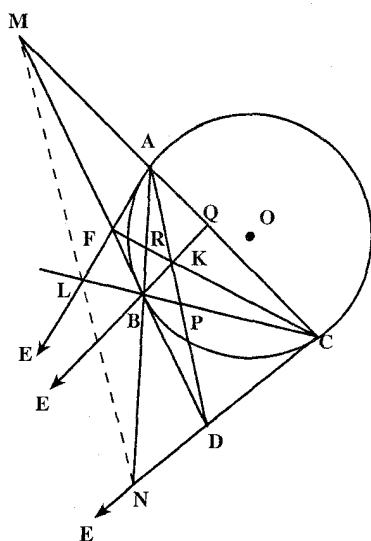


نکته. شکل با مفروض بودن ABC و نقطه P رسم شده است. ولی اگر به جای P یکی از وابسته‌های همساز آن نسبت به ABC ، مثلاً L'' را نیز داشته باشیم، باز هم می‌توانیم همین شکل را به دست آوریم؛ زیرا مزدوج همساز L'' نسبت به A و L نقطه P است و بقیه شکل به همان صورت قبل رسم می‌شود.

۱۹. اگر مماس AL بر دایره محیطی (O) از مثلث ABC در رأس A ، ضلع BC را در L قطع کند (شکل)، خط قطبی L نسبت به (O) از A و D ، یعنی قطب BC ، می‌گذرد؛ پس این خط قطبی همان میانه متقارن AD است. برای نقطه‌های مشابه



M و N نیز وضعیت چنین است. چون نقطه های M, L, N همخطند، نتیجه می شود که سه میانه متقارن AD, BE و CF همرسند، و نقطه مشترکشان قطب LMN است. توجه کنید که چون نقطه لوموان داخل مثلث، و بنابراین داخل دایره محیطی است، محور لوموان دایره محیطی را قطع نمی کند.

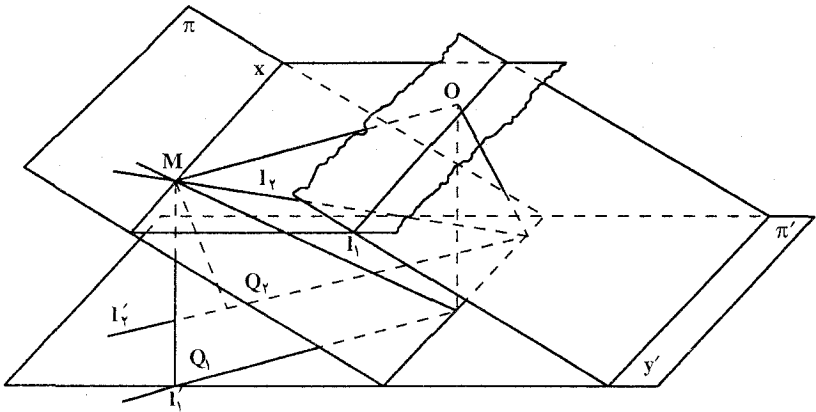


۲۰. نقطه برخورد محور لوموان LMN با ضلع BC، نقطه L و پای میانه متقارن AP از مثلث ABC نقطه P است (شکل). مزدوج همساز L نسبت به B و C نقطه P است. نتیجه مشابهی برای دو نقطه M و Q و همچنین برای دو نقطه N و R صادق است. بنابراین، هم می توان نتیجه گرفت که میانه های متقارن AP، BQ و CR همرسند و هم این که نقطه مشترک میانه های متقارن، یعنی K، قطب سه خطی LMN برای ABC است.

نتیجه. رأسهای مثلث مماسی یک مثلث مفروض، وابسته های همساز نقطه لوموان مثلث مفروض هستند.

۲۱. فرض کنید A رأس مثلث، P پای میانه متقارن AP، K نقطه لوموان، و D قطب BC نسبت به دایره محیطی (O) از مثلث ABC باشد؛ و P پاره خط KD را به طور همساز تقسیم می کنند؛ پس $\angle A'PKD = -1$ ، که در آن A' وسط BC است. ارتفاع AA_h با $A'D$ موازی است؛ پس $\angle A'K$ از نقطه وسط AA_h می گذرد. برای دو ارتفاع دیگر نیز مطلب مشابهی صادق است.

۲۲. خط A_1OA' (شکل) از قطب U برای ضلع BC نسبت به دایره محیطی (O) از مثلث ABC می‌گذرد؛ میانه متقارن AK نیز همین‌طور است. اگر نقطه برخورد AK و BC

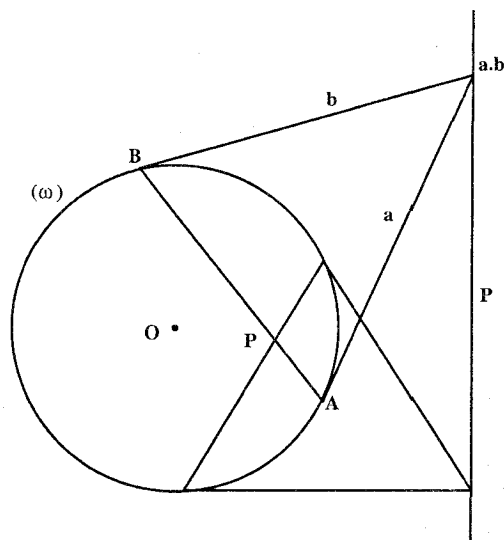


باشد، خط KA_1 موازی با شعاع $A'K'$ از دسته خط همساز $A'(AK'KU)$ ، خط $A'A$ را در نقطه وسط پاره خط KA_1 قطع می‌کند، یعنی خطهای AK و AA_1 هم‌نوا هستند. برای دو خط BB_1 و BK ، و همچنین دو خط CC_1 و CK نیز مطلب مشابهی صادق است، پس قضیه برقرار است.
نکته. مثلث اول بروکار با مثلث اصلی به سه طریق منطری است، و مرکزهای منطری دو نقطه بروکار و نقطه هم‌نوا نقطه لوموان هستند.

۲۳. زیرا اگر دایره‌های مفروض متعامد باشند، مرکزهایشان روی دایره اصلی آنها قرار دارد و اگر M نقطه‌ای روی دایره اصلی (L) باشد، و A و B مرکزهای دو دایره مفروض باشند، عمودی که در M بر AM رسم می‌شود، از روبه‌روی قطری A در دایره (L)، یعنی B می‌گذرد.

۲۴. اگر دو نقطه چنان باشند که هر کدام از آنها بر قطبی دیگری واقع باشد، آنها را نقطه‌های مزدوج و قطبیهای آنها را خطهای مزدوج می‌نامند. هرگاه a قطبی نقطه A بر نقطه B بگذرد، خط b قطبی B نیز بر A می‌گذرد؛ بنابراین A و B نقطه‌های مزدوج a و b خطهای مزدوج می‌باشند. با توجه به این که می‌توانیم نقطه را دایره به شعاع صفر بگیریم، قطبی هر نقطه، مکان هندسی مزدوجهای آن نقطه، و قطب هر خط، پوش مزدوجهای آن خط می‌باشد.

اگر خط a در نقطه A بر دایره ω مماس باشد، هر نقطه واقع بر a مزدوج نقطه A و در عین حال نقطه A مزدوج خودش نیز می باشد، همچنین در این حالت هر خط که بر A بگذرد، مزدوج a و بخصوص خط a مزدوج خودش نیز می باشد.



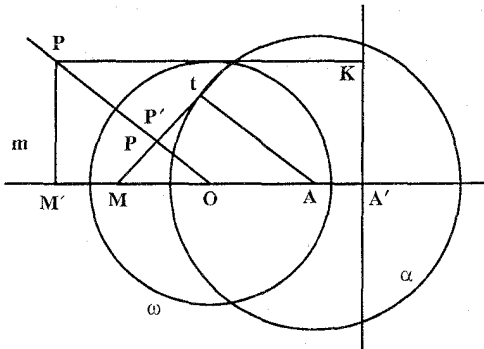
قطب هر خط که بر دو نقطه A و B بگذرد (بدون آن که بر O بگذرد)، بر نقطه برخورد a و b ، قطبهای A و B واقع است. در شکل (ت) دو نقطه A و B بر دایره ω واقعند؛ پس a و b قطبهای آنها که بترتیب در A و B بر ω مماسند، در قطب خط AB ، که آن را با $a.b$ نشان داده ایم متقاطع می باشند. بعکس، هرگاه از نقطه خارج ω دو مماس a و b را بر آن رسم کنیم، خطی که A و B ، نقطه های

تماس را به هم وصل می کند، قطبی نقطه مفروض می باشد.

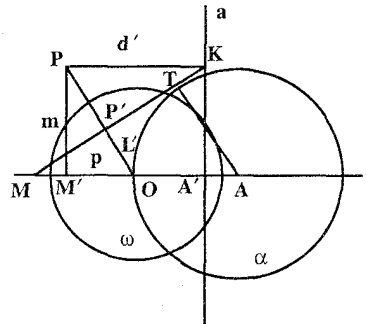
هرگاه بر خط p دو نقطه انتخاب کنیم و قطبهای آنها را رسم کنیم، در P قطب خط p برخورد می کنند. در عمل این دو نقطه را در خارج ω انتخاب کرده، از هریک از آنها دو مماس بر دایره رسم و نقطه های تماس را به هم وصل می کنیم که از برخورد دو خط حاصل، قطب خط مفروض مشخص می شود. بعکس، هرگاه P داده شده باشد و از آن دو قاطع نسبت به دایره رسم کنیم و قطبهای این دو قاطع را به یکدیگر وصل کنیم، قطبی نقطه P مشخص می شود.

نکته قابل توجه این است که با معلوم بودن دایره هادی ω و همه مماسهایی که می توان بر آن رسم کرد، ترسیمهای مربوط به تبدیل قطبی معکوس فقط به وجود خود نقطه ها و خطها بستگی دارد و فاصله های بین آنها مطرح نیست. این نکته از ویژگیهای سرشتی هندسه تصویری است.

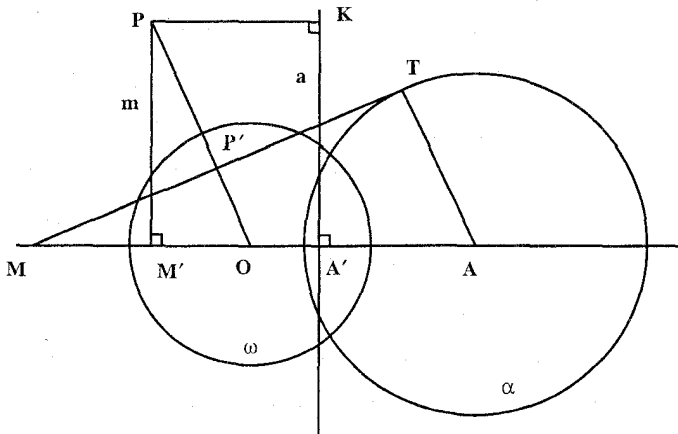
۲۵. در شکلهای (الف، ب و پ)، P نقطه ای از منحنی مقطع مخروطی است و p قطبی P (نسبت به دایره ω) است که در T بر α مماس می باشد و با OA در M برخورد کرده



(ب)



(الف)



(ب)

است. خط p با OP در P' برخورد می کند که منعکس P می باشد. همچنین خط هادی a (نظیر کانون O) با OA در A' برخورد می کند که منعکس نقطه A است و بالاخره خط m قطبی نقطه M نیز با OA در M' منعکس نقطه M برخورد می کند. از P عمود PK را بر خط a رسم می کنیم و می خواهیم ثابت کنیم که: $OP = \varepsilon \cdot PK$. برای آن که اثبات در حالت های مختلف را یکجا انجام دهیم، خط حامل OA را جهت دار می گیریم و جهت مثبت آن را همان جهت از O به A اختیار می کنیم. با توجه به این که K شعاع دایره ω و

r شعاع دایره α است، می‌توانیم بنویسیم :

$$\begin{aligned}\frac{Pk}{OP} &= \frac{OA' - OM'}{OP} = \frac{k}{OP} \left(\frac{OA'}{k} - \frac{OM'}{k} \right) \\ &= \frac{OP'}{k} \left(\frac{k}{OA} - \frac{k}{OM} \right) = \frac{OP'}{OM} \left(\frac{OM}{OA} - 1 \right) \\ &= \frac{AT}{AM} \cdot \frac{AM}{AO} = \frac{r}{OA} = \frac{1}{\varepsilon}\end{aligned}$$

هرگاه بترتیب عکس عمل کنیم، عکس قضیه نیز ثابت می‌شود.
 بسادگی معلوم می‌شود که هرگاه دایره ω به مرکز O مماس بر a انتخاب شود و A نقطه تماس باشد، دایره α به مرکز A و به شعاع $\frac{OA}{\varepsilon}$ خواهد بود.

۲۶. با توجه به تبدیل قطبی معکوس، هر قضیه مربوط به خطها و نقطه‌ها را که در نظر بگیریم، می‌توانیم نظیر آن قضیه‌ای مربوط به نقطه‌ها و خطها بیان کنیم که این نقطه‌ها و خطها بترتیب قطبها و قطبیهای خطها و نقطه‌های قضیه اول می‌باشند. برای مثال، شش ضلعی محیطی دایره ω را در نظر می‌گیریم، نقطه‌های تماس ضلعهای این شش ضلعی با دایره، شش ضلعی محاطی تشکیل می‌دهند و این دو شش ضلعی در تبدیل قطبی معکوس نسبت به ω مبدل یکدیگرند. بنابراین قضیه پاسکال و قضیه بریانشن نظیر یکدیگرند و می‌توان با استفاده از تبدیل قطبی معکوس هر کدام را از دیگری نتیجه گرفت. در حالت کلی که دایره ω غیر از دایره محیطی یا محاطی شش ضلعی انتخاب شود، هریک از دو قضیه مزبور را که در مورد دایره در نظر بگیریم، به صورت قضیه دیگری در مورد یک منحنی مقطع مخروطی بیان خواهد شد که این منحنی مبدل قطبی معکوس آن دایره خواهد بود.
 اکنون می‌خواهیم قضیه را با کنارگذاشتن استثنای آن (که در داخل پراترها قرار داشتند) به صورت کلی و ساده بیان کنیم. قضیه را برای دایره دلخواه α در نظر می‌گیریم و اگر α' منحنی مقطع مخروطی باشد که نسبت به دایره ω مبدل قطبی معکوس دایره α است، در این صورت قضیه را برای α' نیز نتیجه خواهیم گرفت. به این ترتیب ترسیمهایی که برای قطبها و قطبیها نسبت به α خواهیم داشت، به ترسیمهای مربوط به قطبیها و قطبها نسبت به α' تبدیل می‌شوند. از این رو می‌توانیم قطب و قطبی نسبت به دایره را به صورت کلی قطب و قطبی نسبت به یک مقطع مخروطی تعمیم دهیم. این قضیه با کنارگذاشتن استثنای آن شامل چهار بخش می‌باشد که هریک از آنها متقابلاً نظیر بقیه است؛ هرگاه به جای ω یک منحنی مقطع مخروطی در نظر بگیریم، باز هم قضیه درست خواهد بود.

۲۷. در شکل (الف) خط LM از N،

نقطه برخورد b و c و همچنین نقطه

برخورد a و d می‌گذرد. با توجه به

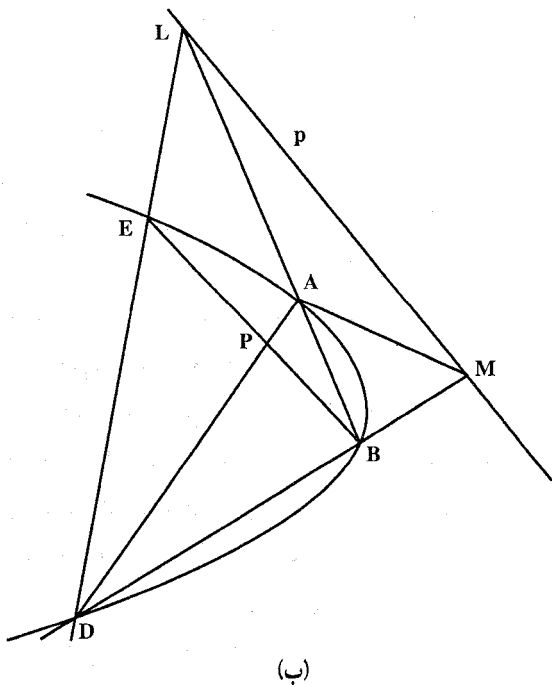
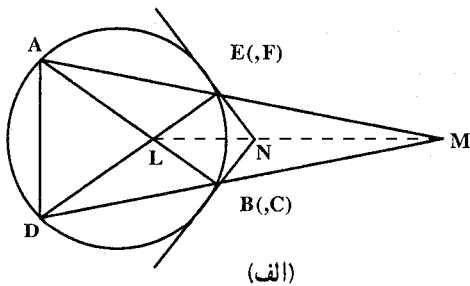
این نکته و با در نظر گرفتن بخش آخر

قضیۂ بالا و تعمیم آن، روش سادہ

ترسیم قطبی یک نقطه دلخواه P

نسبت به یک منحنی مقطع

مخروطی، و مطابق با نمونه شکل (ب)، قضیه فوق نتیجه می شود.



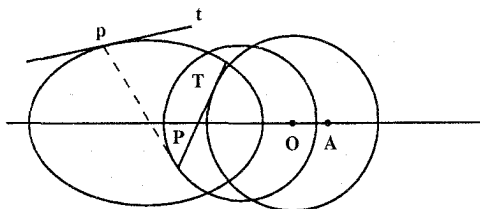
۲۸. با توجه به این که اگر قطب و قطبی نسبت به یک دایره α را در نظر بگیریم و آن را نسبت

به دایره هادی (۱) تبدیل قطبی معکوس کنیم، قطبی و قطب نسبت به مقطع مخروطی α'

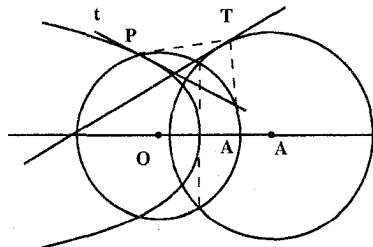
را به دست خواهیم آورد. در شکل‌های (الف، ب و پ) نقطهٔ A و خط بینهایت l_∞ نسبت

به دایره α قطب و قطبی می‌باشند، هرگاه α' مبدل قطبی معکوس α نسبت به (ω) باشد،

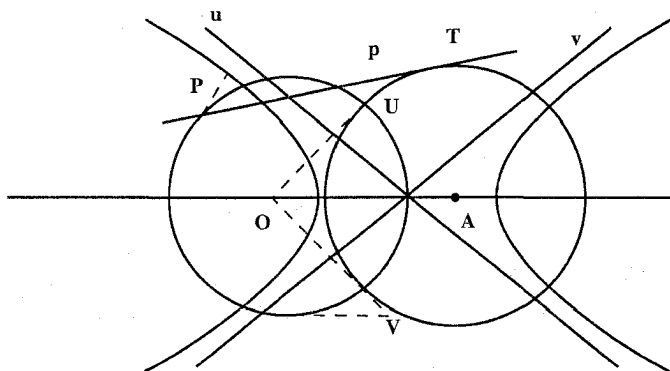
خط a و نقطه O نسبت به α' قطبی و قطب خواهند بود.



(الف)

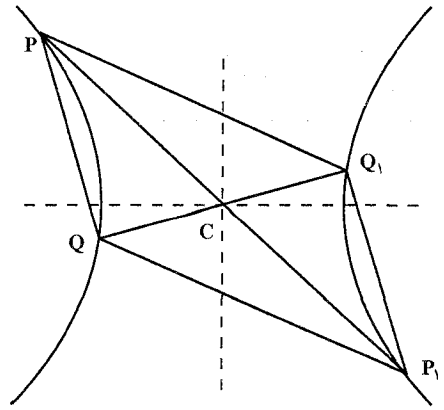


(ب)

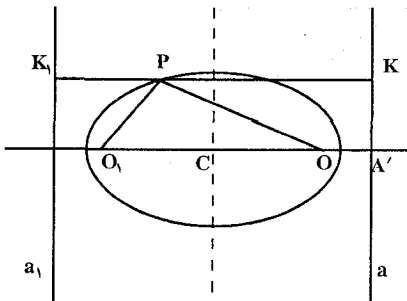
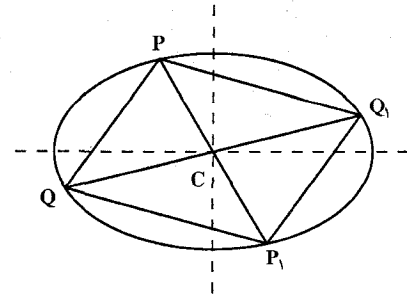


(پ)

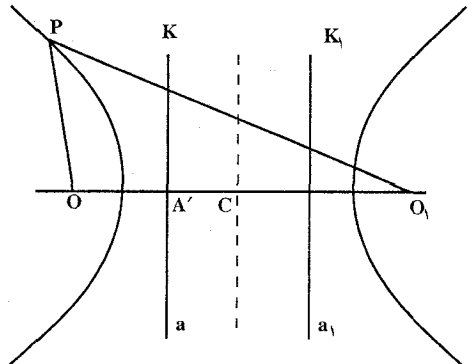
۲۹. اگر C نقطه‌ای غیرواقع بر مقطع مخروطی و PP_1 و QQ_1 دو قاطع دلخواه گذرنده بر آن باشند، قطبی نقطه C نسبت به مقطع مخروطی، خطی است که بر نقطه برخورد دو خط PQ و P_1Q_1 و همچنین نقطه برخورد دو خط PQ_1 و P_1Q می‌گذرد. هرگاه قطبی نقطه C خط بینهایت باشد، مانند شکل (الف)، در این صورت چهار گوشه محاطی PQP_1Q_1 متوازی الاضلاع می‌باشد؛ نقطه C که بر مقطع مخروطی واقع نیست، قطبی آن (یعنی خط بینهایت l_∞) بر این مقطع مخروطی مماس نمی‌باشد و در نتیجه این منحنی سهمی نخواهد بود و علاوه، نقطه C که قطب خط بینهایت است، در وسط هریک از پاره خطهای PP_1 و QQ_1 قرار دارد و بنابراین PQP_1Q_1 متوازی الاضلاع است. قاطعهای PP_1 و QQ_1 به دلخواه انتخاب شده‌اند؛ پس C مرکز تقارن منحنی است و آن را مرکز مقطع مخروطی (بیضی و هذلولی) می‌نامند. از این رو منحنیهای بیضی و هذلولی، مقطعهای مخروطی مرکزدار نامیده می‌شوند.



(الف)



(ب)



هرگاه O کانون و a خط هادی نظیر آن در یک مقطع مخروطی مرکزدار باشد، قرینه‌های آنها نسبت به C ، یعنی نقطه O_1 و خط a_1 نیز بترتیب کانون و خط هادی نظیر آن در آن مقطع مخروطی خواهد بود (شکل (ب)). همچنین در تبدیل نیمدور به مرکز C دایره‌های ω و ω_1 به دایره‌های جدید ω_1 و α_1 تبدیل می‌شوند، به گونه‌ای که قطبی متقابل α_1 نسبت به ω_1 باز همان مقطع مخروطی به مرکز C خواهد بود.

صرف نظر از حالتی که O و A بر هم منطبق باشند، خط OA محور تقارن هر مقطع مخروطی است. بدیهی است که در مقطعی مخروطی مرکزدار، مرکز آنها بر این محور تقارن قرار دارد. بنابراین تبدیل نیمدور به مرکز C را می‌توان ترکیب دو تقارن محوری دانست که محورهای آنها در C بر هم عمودند؛ یکی از این محورهای تقارن، خط OA است؛ پس در مقطعی مخروطی مرکزدار، خطی که در C عمود بر OA است نیز محور

تقارن منحنی می باشد. می توان گفت که مقطع مخروطی مرکزدار دارای همان نوع تقارنهایی است که لوزی یا مستطیل دارا می باشد.

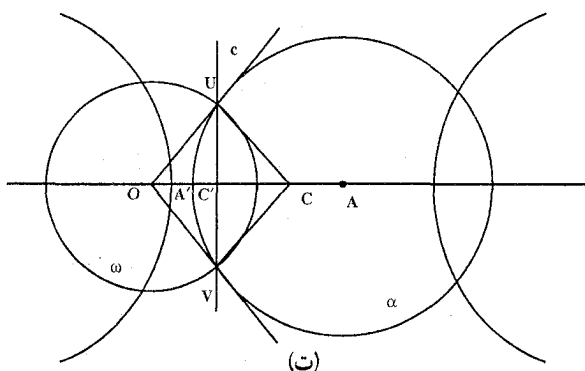
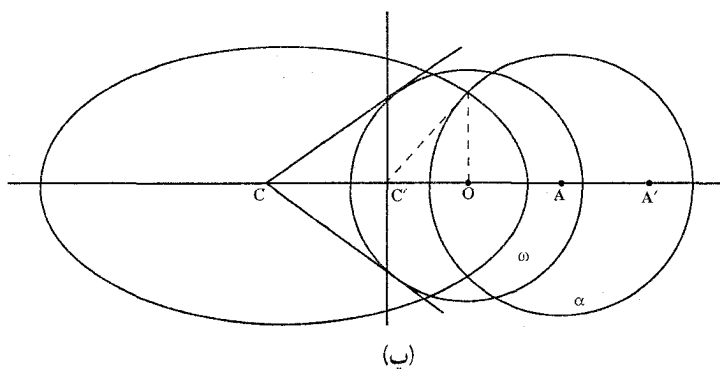
قطبی C را نسبت به دایره ω با c نشان می دهیم که در شکلهای (پ) و (ت) نموده شده است. نقطه C و خط بینهایت 1_∞ نسبت به دایره α' قطب و قطبی یکدیگرند، خط c و نقطه O نیز باید قطبی و قطب یکدیگر نسبت به دایره α باشند. پس نقطه C قطب خط c است نسبت به دایره ω ، درحالی که همین خط c قطبی نقطه O نسبت به دایره α است. اگر نقطه برخورد c با OA باشد، نقطه C' از یک طرف منعکس C نسبت به ω و از طرف دیگر منعکس O نسبت به α است، یعنی داریم:

$$\vec{OC} \cdot \vec{OC'} = k^2 = \vec{OA} \cdot \vec{OA'}$$

$$r^2 = \vec{AO} \cdot \vec{AC'} = \vec{OA} \cdot \vec{C'A}$$

بنابراین:

$$\frac{OC}{OA'} = \frac{OA}{OC'} = \frac{OA}{OA - C'A} = \frac{OA^2}{OA^2 - OA \cdot C'A} = \frac{OA^2}{OA^2 - r^2} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - 1}$$

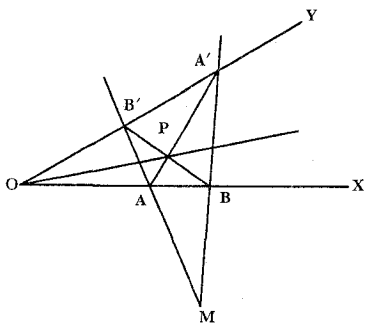


بر حسب آن که $\varepsilon > 1$ یا $\varepsilon < 1$ باشد، نسبت بالا مثبت یا منفی خواهد بود، بنابراین در بیضی مرکز C و خط هادی a در دو طرف O قرار دارند، در حالی که در هذلولی در یک طرف O واقعند، همچنان که در شکل‌های (ب) نموده شده است. به عبارت دیگر در بیضی دو کانون در درون منحنی واقعند و منحنی به تمامی بین دو خط هادی قرار دارد. اما در هذلولی دو خط هادی در بخشی از صفحه واقعند که بین دو شاخهٔ هذلولی واقع شده است.

در مکانیک ثابت می‌شود که اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر گردد، مسیر یک گلوله که از دهانهٔ توپ پرتاب می‌گردد، کمانی از سهمی خواهد بود که تعیین کانون آن بسادگی میسر می‌باشد. از آن‌جا که می‌توان برای حداقل چند ثانیه، گلوله را همچون یک سیارهٔ کوچک تصور کرد، در این صورت مسیر آن، که به نظر می‌رسد سهمی است، در واقع یک بیضی بسیار کشیده خواهد بود که خروج از مرکز آن بسیار نزدیک به یک می‌باشد. در این صورت کانون دیگر این بیضی در کجا قرار دارد؟ ... در مرکز زمین!

۲.۱. قطب و قطبی در نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۱. قطب خط، قطبی نقطه



۳۰. نقطه برخورد AB' و $A'B$ را M می‌نامیم.
این نقطه، قطب خط OP است.

۲.۲.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۱. نقطه‌ها هم‌خطند

۳۱. این نقطه‌ها، روی قطبی نقطهٔ P نسبت به دو خط متقاطع $x'Ox$ و $y'Oy$ قرار دارند. بنابراین روی خط راستی قرار دارد که از O می‌گذرد.

۳.۲.۱. خط‌های: موازی، هم‌رس، ...

۱.۳.۲.۱. خطها موازی اند

۳۲. می دانیم در چهار ضلعی کامل

BPAODC وسطه‌های قطرها بر یک

استقامت می باشند، یعنی خط واصل

بین وسطهای قطرهای CA و OP از

وسط قطر BD می‌گذرد و چون قطر

CA از M وسط OP می گذرد، پس

خط واصل بین وسطهای CA و OP

همان قطر CA بوده که از نقطه N وسط BD می‌گذرد و از آنجا داریم:

$$\frac{ND}{NB} = \frac{OM}{MP}$$

و از این رابطه نتیجه می گیریم که $BD \parallel OP$ است.

نتیجه. (در هر چهار ضلعی کامل که یک قطر از وسط قطر دیگر بگذرد، از وسط قطر

سوم گذشته و آن دو قطر موازی اند.)

۲.۳.۲.۱. خطها دستگاه توافقی می سازند

۳۳. چون تقسیم توافقی (ABCD) شامل چهار نقطه واقع بر یک خط راست است، بنابراین

قطبیهای این چهار نقطه نسبت به دایره به مرکز O، چهار خط هم‌رس می‌باشند. از طرفی

این خطها بر خطهایی که مرکز دایره (نقطه O) را به نقطه‌های A، B، C و D وصل

می‌کنند، عمودند. اما $(O - ABCD)$ دستگاهی توافقی است. بنابراین دستگاه حاصل

از قطبیه‌های چهار نقطه A، B، C و D نیز توافقی می‌باشد.

۳.۳.۲.۱. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

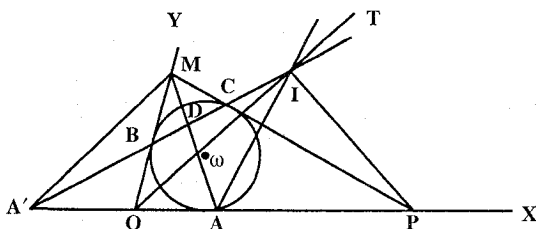
٣٤. خط BC قطبي نقطة M نسبت

به دایره (ω) می باشد.

در نتیجه قطب خطهای

گذرنده بر M بر BC واقع

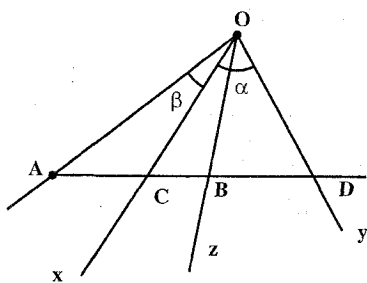
است. از جمله، قطب خط



MA بر BC قرار دارد. همچنین OX قطبی نقطه A نسبت به دایره است. پس قطب کلیه خطهای گذرنده بر A، بر OX واقع است. از جمله، AM بر OX واقع است و از آنجا قطب MA بر محل برخورد BC و OX قرار دارد؛ یعنی A' قطب AM است و در نتیجه نقطه های (A'DBC) تشکیل یک تقسیم توافقی می دهند و دستگاه (M.ADBC) توافقی بوده و چون هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، نقطه های برخورد، تشکیل یک تقسیم توافقی می دهند، پس (A'BOP) تقسیم توافقی و دستگاه (I.A'AOP) توافقی است. از طرفی چون دو مثلث $\triangle OAI$ و $\triangle OBI$ به حالت دو ضلع و زاویه بین آنها مساوی اند، پس IO نیمساز داخلی زاویه $\hat{A'IA}$ بوده و در نتیجه شعاع مزدوجش، IP، نیمساز خارجی آن است و چون نیمسازهای داخلی و خارجی بر هم عمودند، پس $\hat{OIP} = 90^\circ$ یا به عبارت دیگر I تصویر P روی نیمساز زاویه $\hat{xOy}$ بوده که چون زاویه $\hat{xOy}$ و در نتیجه نیمساز آن OT و همچنین نقطه P ثابت است، تصویرش روی نیمساز OT ثابت بوده و BC از نقطه ثابت I می گذرد.

۴.۲.۱. زاویه

۱.۴.۲.۱. اندازه زاویه



۳۵. قطبی نقطه A نسبت به Oy و Ox را Oz می نامیم

و از A خطی رسم می کنیم که Ox، Oy و Oz را بترتیب در C، B و D قطع کند. (ABCD) یک تقسیم توافقی است و داریم:

$$\frac{\sin(\hat{OA}, \hat{OC})}{\sin(\hat{OB}, \hat{OC})} = -\frac{\sin(\hat{OA}, \hat{OD})}{\sin(\hat{OB}, \hat{OD})}$$

با فرض $\hat{COB} = \theta$ داریم:

$$\frac{\sin \beta}{\sin \theta} = -\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \theta)}$$

زاویه θ به دست می آید.

۵.۲.۱. پاره خط

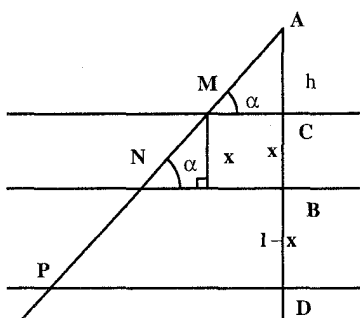
۱.۵.۲.۱. اندازه پاره خط

۳۶. اگر فاصله بین دو خط Δ و D را x بگیریم (شکل)، داریم:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \Rightarrow \frac{h}{x} = \frac{1+h}{1-x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{lh}{1+2h}$$

با محاسبه x ، MN و NP بسادگی محاسبه می شوند.



۶.۲.۱. رابطه های متری

۳۷. اثبات کاملاً ساده است. چهار

نقطه A, B, C و D واقع بر یک

خط و قطبیهای آنها a, b, c و

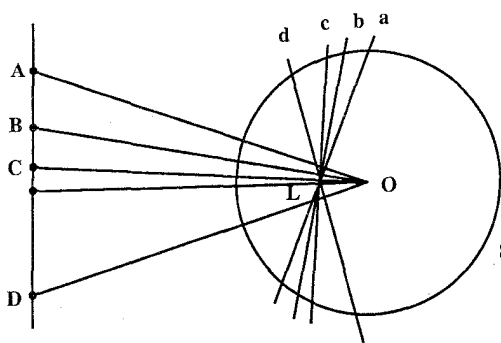
d نسبت به یک دایره S را در

نظر می گیریم (شکل). تعریف

نسبت ناهمساز چهار خط

ایجاب می کند که نسبت ناهمساز

نقطه های A و B ؛ C و D با



نسبت ناهمساز خطهای OA و OB ؛ OC و OD ، (O مرکز S)، مساوی باشد. چون

قطبی یک نقطه نسبت به یک دایره S ، بر خط واصل بین آن نقطه و مرکز S عمود است؛

پس خطهای OA ، OB ، OC و OD بترتیب بر خطهای a ، b ، c و d عمود می شوند. از

این جا نتیجه می گیریم که دو چهارخطی a, b, c, d و OA, OB, OC, OD ، می توانند

با یک حرکت مناسب بر هم منطبق شوند؛ زیرا این عمل را می توان ابتدا با انتقال خطهای

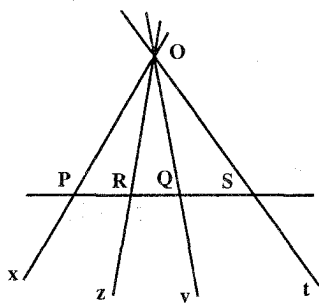
OA, OB, OC و OD ، به طوری که O بر L منطبق شود، و سپس دوران این خطها به

زاویه 90° حول L ، انجام داد. از این جا نتیجه می شود که نسبت ناهمساز چهار خط

OA و OB ؛ OC و OD با نسبت ناهمساز چهار خط a و b ؛ c و d مساوی است؛ اما در

این حالت نسبت ناهمساز چهار نقطه A و B ؛ C و D نیز با نسبت ناهمساز چهار خط a و b ؛ c و d مساوی است، و این همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.

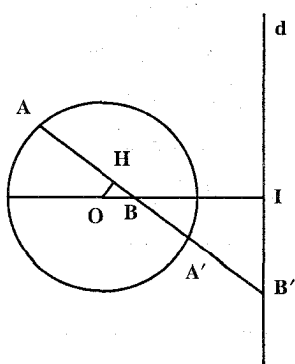
۷.۲.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند



۳۸. اگر از نقطه دلخواه P واقع بر Ox، خطی رسم کنیم تا سه شعاع Oy، Oz و Ot را بترتیب در R، Q و S قطع کند، (PQRS) تقسیم توافقی است؛ بنابراین بنا به تعریف شعاع Oy قطبی نقطه P نسبت به دو شعاع Oz و Ot است. به همین ترتیب هر نقطه از شعاع Oy قطب شعاع Ox است.

۸.۲.۱. رسم شکلها

۱.۳۹. قطبی P نسبت به نقطه C (دایره به شعاع صفر) خطی است که از C بر PC عمود شود.
۲. قطبی P نسبت به خط Δ (دایره به شعاع بینهایت) خطی است به موازات Δ و مکان قرینه های P نسبت به نقطه های مختلف Δ ؛ زیرا می دانیم در یک تقسیم توافقی (ABCD)، اگر یکی از نقطه ها، به عنوان مثال D، در بینهایت واقع شود، نقطه C وسط AB واقع خواهد شد.



۴۰. اگر O دایره مطلوب گذرنده بر A باشد که در آن، d قطبی B نسبت به آن دایره باشد، چنانچه خط AB دایره را در A' و خط d را در B' قطع کند، نقطه A' مزدوج A نسبت به B' و B خواهد بود و از طرفی مرکز دایره بر عمودی واقع است که از B بر d فرود می آید و از آن جا حل مسأله چنین است:
از نقطه B عمودی بر خط d فرود می آوریم و AB را امتداد داده تا خط d را در B' قطع کند. نقطه A' را

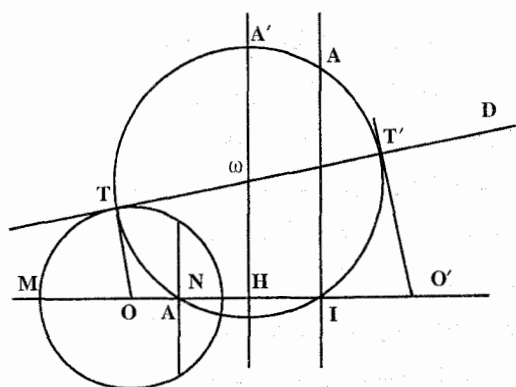
مزدوج توافقی A نسبت به B و B' تعیین می نماییم. محل برخورد عمود منصف AA' با

خط BI نقطه (O) مرکز دایره خواسته شده و $OA = OA'$ شعاع آن می باشد.

بحث. اگر AB بر d عمود باشد، مرکز دایره بر نقطه H وسط AA' واقع است، در صورتی که $AB \parallel d$ باشد، A' قرینه A نسبت به B روی دایره بوده و چون B وسط AA' است، B' در بینهایت بوده و IA در A بر دایره مماس است و از آن جا عمودی که در A بر IA رسم می شود، هر جا BI عمود رسم شده از B بر d قطع کند، نقطه (O) مرکز دایره خواسته شده و $OA = R$ شعاع آن است.

۴۱. اگر (O) دایره مطلوب باشد که

در نقطه T بر خط D مماس بوده و Δ قطبی نقطه A نسبت به آن دایره باشد، در این صورت مرکز دایره (O) بر خطی واقع است که از A بر Δ عمود می‌شود و از آن‌جا اگر نقطه تماس دایره با خط D معلوم باشد، می‌توان (O) ، مرکز دایره را تعیین کرد.



بدین طریق که از نقطه تماس بر خط D عمود اخراج می کنیم تا عمود رسم شده از A بر Δ را قطع کند و چون A مزدوج توافقی I نسبت به MN می باشد، پس می توان نوشت:

$$OT^{\gamma} = OM^{\gamma} = ON^{\gamma} = OA, OI$$

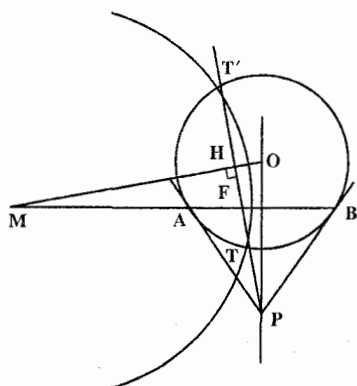
که در این حالت دایرهٔ گذرنده بر A، I و T بر دایرهٔ (O) عمود است و مرکزش بر D واقع می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

ابتدا از نقطه A عمود AI را بر Δ وارد آورده و Δ' عمود منصف AI را رسم می‌کنیم تا خط D را در (ω) قطع کند. دایره به مرکز ω و شعاع $\omega I = \omega A = R'$ دایره‌ای است که بر دایره (O) عمود است. نقطه تقاطع این دایره با خط D، نقطه‌های T و T'، نقطه‌های تماس می‌باشند و عمودهای رسم شده از T و T' بر خط D، خط AI را در نقطه‌های O و O' قطع می‌کنند. دایره به مرکز (O) و شعاع $OT = R$ و یا به مرکز (O') و شعاع $O'T' = R'$ جواب مسأله است.

بحث. اگر عمود رسم شده از T یا T' بر D خط AI را قطع کند، مسأله دارای جواب

است، وگرنه مسأله جواب ندارد و همچنین لازم است که Δ' با D متقاطع باشد. در صورتی که $DI \parallel \Delta$ باشد، T بر M منطبق بوده و در نتیجه A, I و M معلوم بوده و N مزدوج M نسبت به AI را تعیین کرده و (O) وسط MN مرکز و $OM = ON = R$ شعاع آن دایره است.

۹.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۱.۴۲. خط MAB قطبی نقطه P نسبت به دایره (O) است. و چون قطبی نقطه P از M می‌گذرد، قطبی M نیز از نقطه P خواهد گذشت. و چون قطبی هر نقطه بر خط واصل بین آن نقطه و مرکز دایره عمود است؛ پس PH قطبی نقطه M نسبت به دایره می‌باشد و از آن جا اگر F نقطه برخورد MAB با PH باشد، نقطه F مزدوج توافقی M نسبت به AB است، که چون نقطه‌های A, M و B ثابت هستند، با تغییر دایره، خط PH تغییر

کرده، ولی نقطه F ثابت می‌ماند و چون $\angle MHF = 90^\circ$ است، پس مکان H تصویر P بر روی MO دایره‌ای است به قطر MF .

۲. چون PH قطبی M نسبت به دایره (O) است، پس MT و MT' پیوسته بر دایره (O) مماس است و در نتیجه پیوسته داریم:

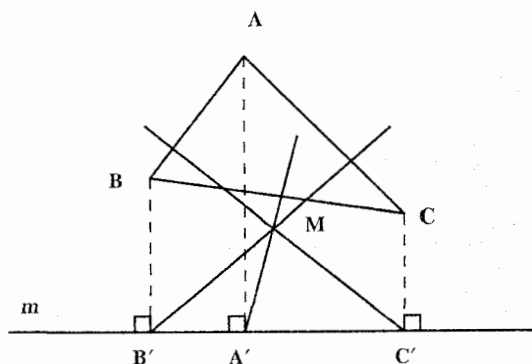
$$MT^2 = MT'^2 = MA \cdot MB = P_M(O) = \text{مقدار ثابت}$$

یعنی مکان T و T' دایره‌ای است به مرکز M و شعاع $R = \sqrt{MA \cdot MB}$.

۳.۱. قطب و قطبی در مثلث

۱.۳.۱. قطب خط، قطبی نقطه

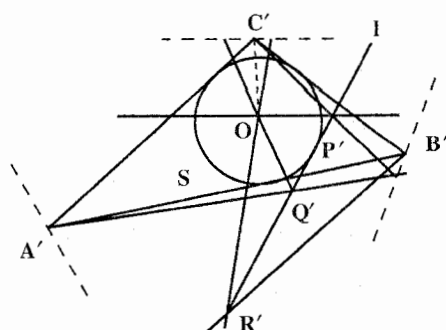
۴۳. عمودهایی که از تصویرهای رأسهای یک مثلث بر روی خط m بر ضلعهای روبه‌روی آن



رأسها رسم می‌شوند، در یک
نقطه مانند M هم‌رسند، که M
را قطب ارتفاعی خط
نسبت به مثلث ABC
می‌نامند.

۲.۳.۱. نقطه‌های: همخط، هم‌دایره،...

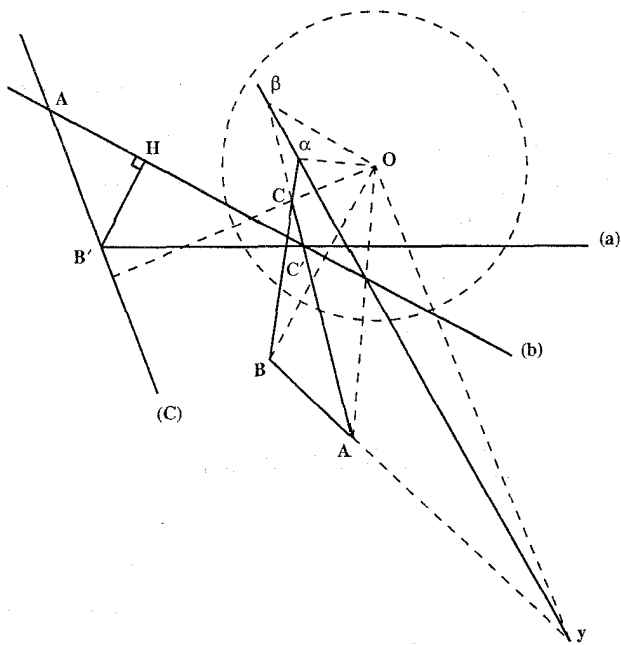
۱.۲.۳.۱. نقطه‌ها هم‌خطند



۴۵. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به
یک دایره S، یک مثلث محاطی ABC
به یک مثلث محیطی A'B'C' بدل
می‌شود، یک نقطه L از S به یک
مماس l، و P، پای ارتفاع رسم شده
از L بر AB، به خط C'P' بدل
می‌شود که P' نقطه‌ای است از l به
طوری که $\angle C'OP' = 90^\circ$ ، یعنی P'

نقطه برخورد l و خط گذرنده بر O به موازات نیمساز زاویه خارجی در رأس C' است
(O'C' نیمساز زاویه داخلی، شکل). بنابراین به قضیه زیر می‌رسیم: خطهای واصل از
رأسهای یک مثلث A'B'C' به نقطه‌های برخورد یک مماس l بر دایره محاطی S، با
خطهای گذرنده بر O، مرکز S، و موازی با نیمسازهای زاویه‌های خارجی در این رأسها،
هم‌رسند (شکل).

۴۶. مثلث ABC و نقطه O مفروضند (شکل)؛ از O به A وصل کرده و خطی از O بر OA
عمود می‌کنیم تا BC یا امتداد آن را در α قطع کند؛ به طریق مشابه، β و γ را به دست
می‌آوریم، حال باید ثابت کنیم که α ، β و γ بر یک استقامتند.

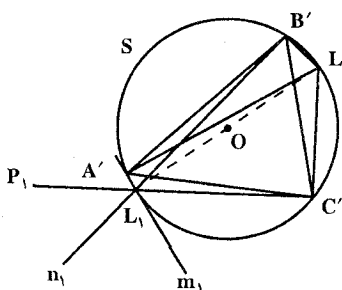


به مرکز O دایره‌ای به شعاع اختیاری می‌کشیم و $A'B'C'$ ، شکل قطبی متقابل ABC را نسبت به دایره O به دست می‌آوریم و ثابت می‌کنیم که هریک از نقطه‌های α ، β و γ قطب یکی از ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ است، و در نتیجه، چون سه ارتفاع هم‌رسند، α ، β و γ بر یک استقامت خواهند بود.

از طرفی یکی از ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ به طور مثال ارتفاع رأس B' ، را در نظر می‌گیریم؛ قطب این ارتفاع که موازی با OB است (چرا؟)، بر قطبی B' یعنی بر AC واقع است، و از طرف دیگر، قطب هر خط بر روی عمودی است که از مرکز دایره بر آن خط رسم شود، یعنی قطب ارتفاع $B'H$ واقع است بر روی خطی که از O بر $B'H$ ، یا بر OB عمود شود؛ پس β قطب ارتفاع رأس B' از مثلث $A'B'C'$ است؛ همین‌طور ثابت می‌شود که α و γ قطبهای ارتفاعهای رأسهای A' و C' آن مثلثند و قضیه ثابت می‌شود.

۴۷. خط $\gamma\beta$ که دو نقطه تماس رسم شده از A بر دایره (O) را به هم وصل می کند، قطبی A نسبت به دایره (O) است. در نتیجه قطبی کلیه نقطه های واقع بر خط $\gamma\beta$ از نقطه A می گذرند؛ پس قطبی نقطه M از نقطه A گذشته و بر خطی که از مرکز دایره به M وصل می شود عمود است، و چون MO بر BC در نقطه α عمود می باشد، پس اگر از A خط

AL را موازی BC رسم کنیم، بر MO عمود بوده و قطبی نقطه M نسبت به دایره (O) خواهد بود، و D نقطه تقاطع AL و $\gamma\beta$ قطب AM بوده و در نتیجه M مزدوج توافقی D نسبت به $\gamma\beta$ بوده و دستگاه (A.DM $\gamma\beta$) توافقی است، و به همین دلیل دستگاه (A.D'XM' $\gamma'\beta'$) توافقی بوده و چون در این دو دستگاه توافقی ADD'، $A\beta\beta'$ و $A\gamma\gamma'$ خطهای مستقیم هستند، پس AMM' نیز خط مستقیم می باشد، و چون که در دستگاه توافقی (A.D'M' $\gamma'\beta'$)، خط BC موازی شعاع AL رسم شده به وسیله سه شعاع دیگر، به دو قسمت مساوی تقسیم می شود و یا به عبارت دیگر، AMM' از I وسط BC می گذرد که در نتیجه نقطه های A، M، I و M' بر یک استقامت می باشند.



۴۸. تبدیل قطب و قطبی نسبت به دایره S را به کار می بریم. ضلعهای BC، CA، و AB ی ΔABC به نقطه های A'، B' و C' واقع بر S بدل می شوند و مثلث محیطی ABC به مثلث محاطی A'B'C' بدل می شود (یعنی ضلعهای ΔABC به رأسهای $\Delta A'B'C'$ بدل می شود و بعکس). مماس I به

یک نقطه L واقع بر S بدل می شود؛ نقطه های M، N و P به خطهای LA'، LB' و LC' بدل می شوند، و نقطه های M₁، N₁ و P₁ به خطهای m₁، n₁ و p₁ گذرنده بر A'، B' و C' و عمود بر A'L، B'L و C'L؛ نتیجه گیری اخیر از ویژگی (ج) مربوط به تبدیلات قطب و قطبی حاصل می شود (شکل). قضیه ای که در مسأله بیان شده است، به قضیه زیر بدل می شود:

خطهای m₁، n₁ و p₁ در یک نقطه از S برخورد می کنند. کافی است یکی از این دو قضیه را اثبات کنیم. اما این مطلب که خطهای m₁، n₁ و p₁ در نقطه ای از S برخورد می کنند، کاملاً روشن است. زیرا $m_1 \perp A'L$ ایجاب می کند که m₁ دایره S را در نقطه L₁ متقاطع L، ببرد. همچنین، خطهای n₁ و p₁ هم باید از L₁ بگذرند.

۴۹. گیریم ABC و A₁B₁C₁ دو مثلث منطری از O، نقطه برخورد AA₁، BB₁ و CC₁ باشند. تبدیل قطب و قطبی II نسبت به یک دایره S به مرکز O را در نظر می گیریم. به موجب ویژگی (ب) از تبدیل قطب و قطبی، II مثلثهای ABC و A₁B₁C₁ را به مثلثهایی

که ضلعهایشان دو به دو موازی هستند بدل می کند. این گونه مثلثها با یک انتقال یا یک تجانس به هم مربوط می شوند. ولی در این صورت خطهای واصل به رأسهای این مثلثها همرس یا موازی هستند؛ اما ویژگی (الف) تبدیل قطب و قطبی به ما اجازه می دهد که نتیجه بگیریم که نقطه های برخورد ضلعهای متناظر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ همخطند.

قسمت دوم قضیه دزارگ که می گوید اگر دو مثلث به جای این که تصویر منظری از یک نقطه باشند، تصویر منظری از یک خط باشند، از قسمت اول بر اثر اصل دوگانی نتیجه می شود (برای این که این را نشان دهیم، یک تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایرة دلخواه را برای نمودار مربوط به قسمت اول قضیه به کار می بریم).

۳.۳.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

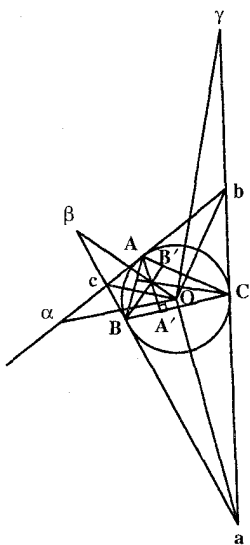
۱.۳.۳.۱. خطها همرسند

۵۱. محل برخورد DE و BC را P می نامیم. نشان می دهیم که IH بر P می گذرد. OA قطبی O نسبت به زاویه A است؛ بنابراین M یعنی محل برخورد این قطبی با DE، مزدوج P نسبت به D و E است. از طرفی در چهارضلعی کاملی که از چهار خط EC، EL، DB و DL تشکیل شده قطر ED به وسیله دو قطر دیگر OL و IH به توافق بخش شده؛ چون OL بر M می گذرد، پس IH هم بر P می گذرد.

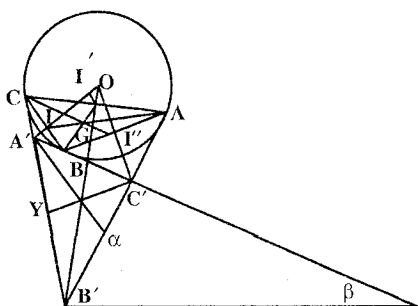
۵۲. اگر (O) دایرة محیطی مثلث ABC باشد، مماسهای بر دایره

را در نقطه های A، B و C بر دایره رسم می کنیم تا دو به دو یکدیگر را در نقطه های a، b و c قطع نمایند، مثلث Δabc قطبی معکوس مثلث ABC خواهد بود.

چنانچه AA' ارتفاع وارد بر bc باشد، قطب AA' بر قطبی نقطه A، یعنی خط cb واقع است و از طرف دیگر قطب AA' بر خطی واقع است که از مرکز دایره بر AA' عمود می شود و از آنجا قطب AA' بر محل برخورد bc با عمودی است که از



(O)، مرکز دایره، بر AA' رسم می‌شود، یعنی نقطه α است. از طرفی می‌دانیم که AA' و Oa بر BC عمودند، پس $O\alpha$ بر Oa عمود خواهد بود و به همین دلیل ثابت می‌شود نقطه β محل برخورد ab و عمودی که از (O) بر OC رسم می‌شود، قطب CC' و محل برخورد ac با عمودی که از O بر Ob رسم می‌شود، قطب BB' است و چون از نقطه O واقع بر صفحه مثلث Δadc بر خطهای واصل بین آن نقطه رأسهای مثلث عمود کرده‌ایم تا ضلعهای مقابل را بترتیب در α ، β و γ قطع کنند و این سه نقطه بر یک استقامت می‌باشند؛ پس قطبهای آنها که همان ارتفاعهای مثلث می‌باشند همرس خواهند بود.



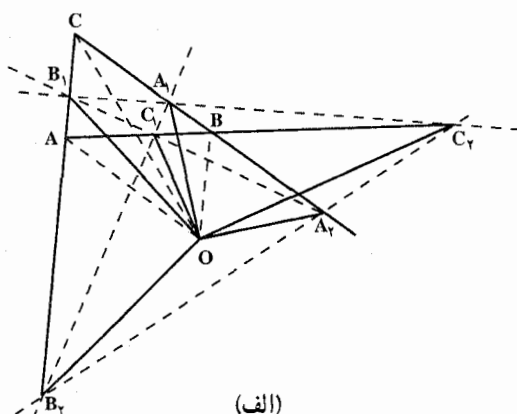
۵۳. اگر (O) دایره محیطی مثلث ABC باشد، مماسهای بر دایره در نقطه‌های A ، B و C دو به دو یکدیگر را بترتیب در نقطه‌های A' ، B' و C' قطع می‌کنند. مثلث $A'B'C'$ قطبی معکوس مثلث ABC می‌باشد. در نتیجه BC قطبی نقطه A' بوده و A' پای قطبی BC خواهد بود و از طرفی

$A'O$ نیمساز $\widehat{CA'C'}$ بوده و نیمساز خارجی آن یعنی $A'\alpha$ بر $A'O$ عمود است و $A'\alpha$ قطبی نقطه I وسط BC می‌باشد و در نتیجه قطبهای کلیه خطهای گذرنده بر I ، بر خط $A'\alpha$ واقع است، از جمله قطب میانه AI که بر $A'\alpha$ قرار دارد.

همچنین چون AB' مماس بر دایره در نقطه A قطبی نقطه A است نسبت به دایره، پس قطبهای خطهای گذرنده از A بر AB' واقع است؛ از جمله قطب میانه AI . پس قطب AI از یک طرف بر $A'\alpha$ و از طرف دیگر بر AB' واقع است؛ یعنی قطب میانه AI نقطه α می‌باشد و به همین طریق ثابت می‌شود که β قطب میانه BI و γ قطب میانه CI است و چون α ، β و γ پای دو نیمساز داخلی و یک نیمساز خارجی مثلث $A'B'C'$ است، و این سه نقطه بر یک استقامت می‌باشند، قطبهای آنها، یعنی میانه‌های مثلث ABC همرسند.

۵۴. گیریم I نیمساز یکی از زاویه‌های حاصل از خطهای m و n باشد. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S به مرکز O ، خطهای l ، m و n به نقطه‌های همخط M ، N و L بدل می‌شوند، به طوری که پاره‌خطهای ML و NL به دو زاویه مساوی یا مکمل در O

مقابلند (ویژگی (ج) از تبدیل قطبی)؛ به عبارت دیگر، L نقطه برخورد MN است با نیمساز یکی از دو زاویه حاصل از خطهای OM و ON .



(الف)

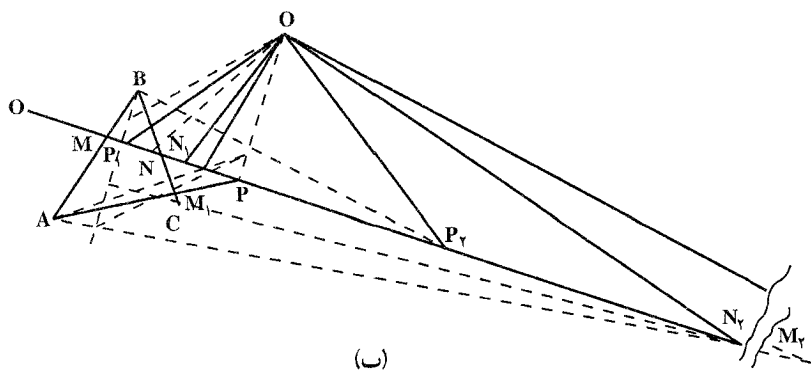
چون نمی دانیم که L روی کدام یک از این دو نیمساز واقع است، هر دو نیمساز زاویه های حاصل از خطهای m و n را در نظر می گیریم. این خطها به نقطه های برخورد MN با نیمسازهای دو زاویه مجاور حاصل از OM و ON بدل می شوند. بنابراین بجاست که نیمسازهای خارجی $\triangle ABC$ را در هم در نظر بگیریم و قضیه مربوط به نقطه های برخورد نیمسازها را چنین تنظیم کنیم:

شش نیمساز زاویه های داخلی و خارجی یک مثلث ABC سه به سه در چهار نقطه هم رسند. بر اثر تبدیل قطب و قطبی، این قضیه به قضیه زیر بدل می شود:

گیریم A, B, C و O ، چهار نقطه باشند که هیچ سه تایی از آنها بر یک خط نباشند. نقطه های برخورد شش نیمساز زاویه های حاصل از خطهای OA و OB ، OB و OC ، OC و OA ، با ضلعهای متناظر مثلث ABC سه به سه بر چهار خط قرار دارند (شکل (الف)).

یادداشت. استفاده از تبدیل قطب و قطبی برای شکل (الف) به قضیه زیر منجر می شود:

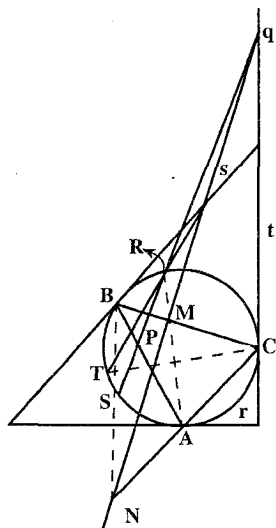
گیریم O یک خط، و O نقطه ای در صفحه یک مثلث ABC باشد، و M, N, P نقطه های برخورد خط O با ضلعهای AB, BC, CA و M_1, N_1, P_1 و M_2, N_2, P_2 اگر OM, ON, OP و $OM_1, OM_2, ON_1, ON_2, OP_1, OP_2$ حاصل از نیمسازهای زاویه های حاصل از OM, ON, OP باشند، آن گاه سه خط AN_1, BP_1, CM_1 و AN_2, BP_2, CM_2 سه به سه در چهار نقطه هم رسند (شکل (ب)).

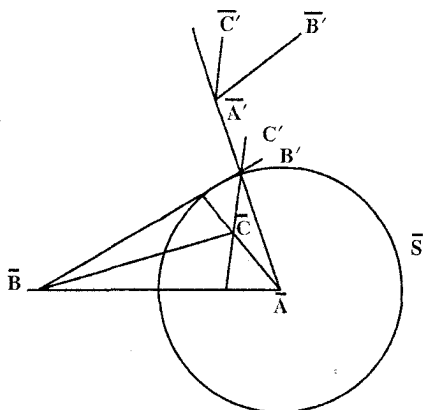


۵۵. خط AI که از نقطه تماس A بر خط OD عمود شده است، قطبی نقطه D نسبت به دایره (O) است، پس $(BCHD)$ تقسیم توافقی بوده و در نتیجه دستگاه $(A.BCHD)$ و از آنجا $(A.EFID)$ توافقی هستند و چون OA, OD, OM, ON برترتیب بر AD, AL ، AB و AC عمودند، پس دستگاه $(O.MNAD)$ توافقی است و چون هرگاه خطی شعاعهای یک دستگاه توافقی را قطع نماید، نقطه‌های برخورد تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، پس $(QPMN)$ تقسیم توافقی است و از آنجا AO قطبی نقطه Q نسبت به AB و AC است و در نتیجه قطبی Q نسبت به AB و AC از نقطه تقاطع قطرهای چهارضلعی $MNFE$ می‌گذرد و یا به عبارت دیگر AO, MF و NE هم‌رسانند.

۵۷. این مسأله به مسأله زیر تبدیل می‌شود:

فرض می‌کنیم r, s و t مماسهای رسم شده بر دایره محیطی مثلث ABC در رأسهای A ، B و C باشند و M, N و P سه نقطه واقع بر ضلعهای BC, CA و AB واقع بر یک خط q . اگر دومین نقطه‌های برخورد خطهای AM, BN و CP با دایره محیطی را برترتیب با S, R و T نشان دهیم، آنگاه نقطه‌های برخورد خطهای RS و t ، ST و r و TR و s ، بر q واقعند.





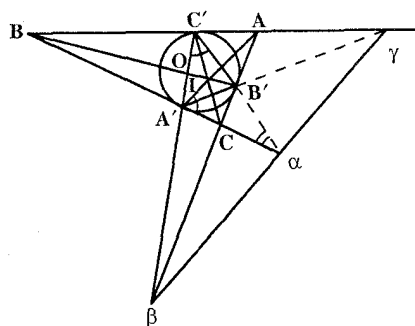
۵۸. گیریم a قطبی A نسبت به دایره S باشد. اگر از یک تصویر مرکزی برای تصویر S بر یک دایره $\bar{S}$ و تصویر A بر یک نقطه $\bar{A}$ استفاده کنیم، آن گاه خط a به خط $\bar{a}$ ، قطبی $\bar{A}$ نسبت به S ، بدل خواهد شد. به طریق مشابه، یک خط b ، قطبی B نسبت به S ، بر اثر این تصویر به خط $\bar{b}$ ، قطبی $\bar{B}$ نسبت به $\bar{S}$ بدل می‌شود، که $\bar{b}$ نگاره b است. حال

اوضاع مختلف و ممکن مثلثهای ABC و $A'B'C'$ را نسبت به S در نظر می‌گیریم.

۱. فرض می‌کنیم دست کم یکی از رئسهای $\triangle ABC$ ، به‌طور مثال A ، در داخل دایره S باشد. صفحه π ی نمودار را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم، به‌گونه‌ای که S به یک دایره $\bar{S}$ بدل شود و A به $\bar{A}$ ، مرکز $\bar{S}$. بر اثر این تصویر نمودار ما به نمودار شکل بدل می‌شود، که در آن $\bar{A}'$ قطب $\bar{BC}$ است؛ B' و C' ، قطبهای AC و AB ، به قطبهای قطرهای $\bar{AC}$ و $\bar{AB}$ از دایره $\bar{S}$ ، یعنی به نقطه‌های بینهایت $\bar{B}'$ و $\bar{C}'$ مربوط به امتدادهای عمود بر $\bar{AC}$ و $\bar{AB}$ بدل می‌شوند (شکل). از این‌جا نتیجه می‌شود که $\bar{BB}'$ و $\bar{CC}'$ ارتفاعهای $\triangle \bar{ABC}$ هستند. چون $\bar{AA}'$ سومین ارتفاع $\triangle \bar{ABC}$ است $\bar{A}'$ (قطب $\bar{BC}$ بر عمود رسم شده از $\bar{A}$ ، مرکز $\bar{S}$ ، بر خط $\bar{BC}$ واقع است)، خطهای $\bar{AA}'$ ، $\bar{BB}'$ و $\bar{CC}'$ هم‌رسمند. در نتیجه AA' ، BB' و CC' هم‌رسم هستند.

۲. فرض می‌کنیم دست‌کم یکی از ضلعهای مثلث ABC دایره S را نبرد. در این حال رأسهای مربوط به $\Delta A'B'C'$ در داخل S قرار دارند، و می‌توانیم همان برهانی را که در حالت ۱ آوردیم، برای $\Delta A'B'C'$ بیاوریم.

۳. بالاخره فرض می‌کنیم همهٔ رأسهای $\triangle ABC$ در خارج S باشند و هیچ یک از ضلعها کاملاً در خارج S نباشند، در این حالت قضیه ما به قضیهٔ (گیریم ABC یک مثلث و S دایره‌ای باشد که ضلعهای AB ، BC و CA آن را به ترتیب در M و N ، P و Q ، R و T می‌برد. فرض می‌کنیم C_1 ، A_1 و B_1 به ترتیب نقطه‌های برخورد مماسهای رسم شده بر S در نقطه‌های M و N ، P و Q ، R و T باشند. نشان دهید که خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 هم‌سند) بدل می‌شود.



۵۹. مثلث $A'B'C'$ قطبی متقابل مثلث ABC است؛ زیرا خط $B'C'$ قطبی نقطه A است، و در نتیجه قطبهای کلیه خطهای گذرنده بر A ، بر قطبی نقطه A یعنی $B'C'$ واقع می‌باشد. یعنی قطبی AA' بر $B'C'$ قرار دارد، و همچنین خط BC قطبی نقطه A' است، در نتیجه قطب خط AA' بر

BC واقع است؛ پس قطب خط AA' بر محل برخورد $B'C'$ و BC قرار دارد. یعنی نقطه α قطبی AA' می‌باشد، و به همین دلیل نقطه β محل برخورد AC و $A'C'$ قطب خط BB' و γ نقطه برخورد AB و $A'B'$ قطب خط CC' است. حال برای اثبات این که AA' ، BB' و CC' هم‌رسانند، کافی است ثابت کنیم α ، β و γ بر یک خط راست واقع‌ند.

دو مثلث $\Delta\alpha A'C'$ و $\Delta\alpha A'B'$ متشابه‌اند ($\hat{A}' = \hat{C}' = \hat{B}' = \frac{B'A'}{\gamma}$ و $\hat{\alpha}$ در هر دو

مشترکند)، پس داریم:

$$\begin{cases} \frac{\alpha B'}{\alpha A'} = \frac{A'B'}{A'C'} \\ \frac{\alpha A'}{\alpha C'} = \frac{A'B'}{A'C'} \end{cases} \quad \text{یا} \quad \frac{\alpha B'}{\alpha C'} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad (۱)$$

و به همین دلیل در دو مثلث متشابه $\Delta\beta A'C'$ و $\Delta\beta A'B'$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\beta C'}{\beta A'} = \frac{B'C'}{A'B'} \quad (۲)$$

و همچنین در دو مثلث متشابه $\gamma A'C'$ و $\gamma B'C'$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\gamma A'}{\gamma B'} = \frac{A'C'}{B'C'} \quad (۳)$$

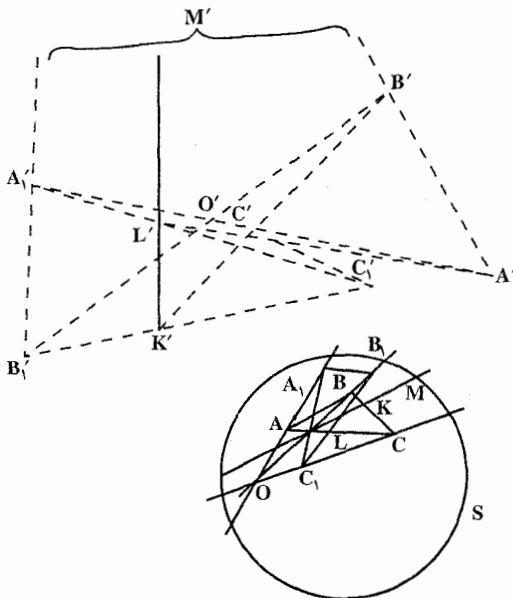
از ضرب دو طرف رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\alpha B' \cdot \beta C' \cdot \gamma A'}{\alpha C' \cdot \beta A' \cdot \gamma B'} = \frac{A'B' \cdot B'C' \cdot A'C'}{A'C' \cdot A'B' \cdot B'C'}$$

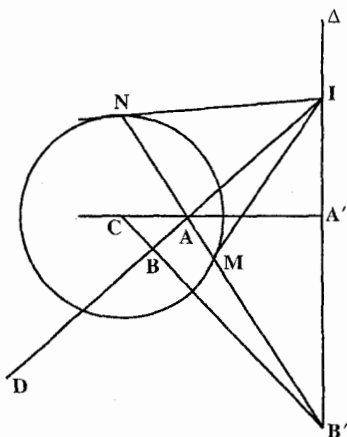
از این رابطه نتیجه می‌گیریم که در مثلث $A'B'C'$ ، نقطه‌های α ، β و γ بر یک استقامتند (عکس قضیهٔ منلائوس).

۶۰. گیریم A' ، B' و C' قطبهای ضلعهای ΔABC و A_1 ، B_1 و C_1 قطبهای ضلعهای

$\Delta A_1 B_1 C_1$ نسبت به دایرة S باشند (شکل). نقطه برخورد $B'C'$ و B_1C_1 ، قطب خط AA_1 . به طریق مشابه، L' و M' ، نقطه های برخورد خطهای $A'C'$ و A_1C_1 ، $A'B'$ و A_1B_1 ، قطبهای خطهای BB_1 و CC_1 هستند. بنابراین $K'L'$ قطبی O ، نقطه برخورد AA_1 و BB_1 خواهد شد. چون، بنابر فرض، O از CC_1 می گذرد، M' ، قطب CC_1 بر خط $K'L'$ قرار دارد. از این رو نقطه های K' ، L' و M' همخطند؛ پس به موجب قضیه دزارگ، خطهای $A'A_1$ ، $B'B_1$ و $C'C_1$ همرسند، که همان چیزی است که می خواستیم ثابت کنیم.



۱.۳.۳.۲. خطها دستگاه توافقی می سازند
۶.۱. وقتی دو خط Δ و D مزدوج باشند، نقطه A ، قطب Δ روی D ، و نقطه B' ، قطب D روی Δ قرار دارد. چون I روی Δ واقع است، قطبی این نقطه، خط MN ، از A می گذرد و شامل B' است. پس تقسیم $(NMAB')$ توافقی است و دستگاه $(I.NMAB')$ توافقی می باشد.



۱.۳.۳. خطها برهم عمودند

۶۲. AM را به موازات BC رسم می‌کنیم. AB و AC نسبت به AM و AI مزدوج توافقی یکدیگرند. از طرفی خط $A\alpha$ قطبی α نسبت به زاویه $\hat{BAC}$ است و HC و HB نسبت به $H\alpha$ و Ha مزدوج یکدیگرند. از دو دستگاه توافقی $(H.CB\alpha)$ و $(A.BCMI)$ ، شعاعهای $(H\alpha)$ و (AM) و (HB) و (AC) و (AB) و (HC) دوه‌دو برهم عمودند. در نتیجه AI بر Ha عمود است.

۶۳. دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. این دایره از نقطه‌های B' و C' می‌گذرد و خط AH قطبی نقطه F نسبت به خطهای AB و AC و در نتیجه قطبی F نسبت به دایره (O) می‌باشد، و همچنین خط FH قطبی نقطه A نسبت به خطهای CA و CB، و در نتیجه نسبت به دایره (O) است، و از آن‌جا خط AF که قطبهای دو خط AH و FH را به هم وصل می‌کند، قطبی نقطه برخورد آنها می‌باشد؛ یعنی AF قطبی نقطه H است، و از طرفی می‌دانیم قطبی هر نقطه نسبت به یک دایره، بر خطی که از مرکز دایره بر آن خط عمود می‌شود واقع است، پس OH بر AF عمود می‌باشد.

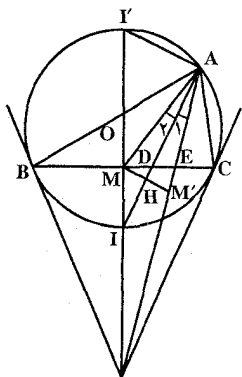
۱.۳.۴. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۶۴. اگر P نقطه برخورد خط AM با BC باشد، خط DE قطبی نقطه P نسبت به خطهای EC و EB و در نتیجه نسبت به دایره محیطی مثلث ABC می‌باشد. در صورتی که M بر دایره تغییر نماید، نقطه P بر BC تغییر نموده و قطبی P تغییر می‌نماید. ولی چون قطبهای کلیه نقطه‌های واقع بر یک خط، بر قطب آن خط می‌گذرند، پس با تغییر P بر BC، خط DE پیوسته از قطب مکان نقطه P، یعنی قطب خط BC می‌گذرد، و این نقطه ثابت، نقطه I، محل برخورد مماسهای رسم شده بر دایره در نقطه‌های B و C می‌باشد.

۶۶. اگر AM و AD بترتیب میانه و نیمساز وارد بر ضلع BC، و

AE قرینه میانه AM نسبت به نیمساز AD باشد، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ بوده و اگر از M عمودی بر AD وارد کنیم تا AE را در M' قطع کند، $MH = MH'$ خواهد بود؛ چون AD نیمساز

$\hat{BAC}$ است، نقطه برخورد آن با دایره، نقطه I وسط کمان BC بوده و MI از مرکز دایره گذشته و اگر MI دایره را در نقطه دیگر I' و AE قطر II' را در P قطع کنند، چون AI



نیمساز داخلی زاویه $\hat{M}AP$ است، AI' نیمساز خارجی آن بوده و نقطه های $(I'IMP)$ تشکیل تقسیم توافقی می دهند؛ یعنی P مزدوج M نسبت به II' بوده و چون MP بر BC عمود است، نقطه P قطب خط BC بوده و در نتیجه AE از قطب خط BC می گذرد.

۱.۳.۳.۵. خط نیمساز است

۶۸. خط $A\beta$ قطبی C نسبت به زاویه BAA' است، پس دستگاه $(A.BA'C\beta)$ توافقی است. به همین ترتیب $(A.CA'B\gamma)$ نیز توافقی است. در این دو دستگاه شعاعهای (AC) و (AB) ، $(A'A)$ و (AA') و (AB) و (AC) نسبت به AA' قرینه اند و از آنجا شعاعهای $(A\gamma)$ و $(A\beta)$ نسبت به AA' قرینه یکدیگرند.

۱.۳.۴. زاویه

۱.۳.۴.۱. اندازه زاویه

۶۹. خط ED قطبی نقطه B نسبت به دایره (ω) است. در نتیجه قطبی کلیه نقطه های واقع بر ED از نقطه B ، قطب خط ED می گذرد. از جمله قطبی نقطه F که از B می گذرد. همچنین قطبی نقطه F از نقطه C می گذرد، پس خط BC قطبی نقطه F نسبت به دایره (ω) بوده و نقطه مزدوج توافقی F نسبت به DE می باشد، و از آنجا دستگاه $(B.FIED)$ و در نتیجه دستگاه $(P.FCOA)$ توافقی است، و چون در مثلث $\triangle AOB$ زاویه $\hat{O} = 90^\circ$ است، پس $\hat{E}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ$ (۱) است، و از طرفی دایره به قطر EC از نقطه های O و P می گذرد، زیرا $\hat{O} = \hat{P} = 90^\circ$ ؛ پس:

$$\hat{P}_1 = \hat{E}_1 = \frac{\widehat{OC}}{2} \quad (2)$$

$$\hat{P}_2 = \hat{C}_1 = \frac{\widehat{EO}}{2} \quad (3) \text{ و}$$

از مقایسه رابطه های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می شود که:

$$\hat{P}_2 = \hat{P}_1 = 45^\circ \quad (4)$$

یعنی در دستگاه توافقی $(P.FCOA)$ شعاع PO که مزدوج شعاع PA است می باشد، نیمساز زاویه بین شعاعهای PC و PF می باشد و چون دو شعاع PC و PF بر هم عمودند، پس

PO نیمساز خارجی $\hat{FPC}$ بوده و $\hat{P}_3 = \hat{P}_4 = 45^\circ$ و در نتیجه $\hat{P}_3 + \hat{P}_1 = \hat{OPA} = 90^\circ$ است.

۱.۳.۴.۲. رابطه بین زاویه‌ها

۷۰. می‌دانیم که مماس بر دایره مزدوج، عبارت است از نیمساز یکی از دو زاویه مکملی که بین دایره محیطی، با دایره نه نقطه تشکیل می‌شود؛ وقتی یکی از این دو زاویه به سمت صفر میل کند، دیگری به سمت 180° میل خواهد کرد. بنابراین داریم:

$$\theta = \frac{1}{2}(180^\circ - \delta)$$

۱.۳.۵. پاره خط

۱.۵.۳.۱. رابطه بین پاره خطها

۷۱. خط PBC قطبی نقطه D نسبت به دایره (O) است. در نتیجه قطب کلیه خطهای گذرنده بر نقطه D بر خط PBC واقع است؛ پس قطبی نقطه P از نقطه D می‌گذرد و همچنین قطبی نقطه P از نقطه A می‌گذرد. یعنی خط AD قطبی نقطه P نسبت به دایره (O) بوده که در نتیجه بنا به تعریف قطب و قطبی نسبت به دایره، نقطه‌های (PIBC) تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند، و از آنجا دستگاه (A, PIBC) توافقی است و چون خط MN موازی شعاع AP، رسم شده به وسیله سه شعاع دیگر، به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود؛ یعنی $MD = DN$ است.

۱.۳.۶. رابطه‌های متری

۷۲. محل برخورد BC و $B'C'$ با خط AI، قطبی نقطه N نسبت به زاویه A است، در نتیجه M' و N نسبت به B' و C' مزدوج یکدیگرند و می‌توان نوشت:

$$\frac{M'B'}{M'C'} = -\frac{NB'}{NC'} \quad (1)$$

از طرفی چون $B'N$ موازی با AC و $C'M'$ موازی با AB است، بترتیب می‌توان نوشت:

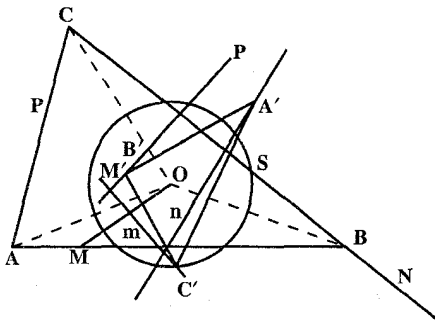
$$\frac{NB'}{NC'} = \frac{B'M}{C'C} = \frac{AC'}{C'C} = \frac{BM}{MC}$$

$$\frac{NB'}{NC'} = -\frac{MB}{MC}$$

و یا :

باتوجه به رابطه (۱) داریم :

$$\frac{M'B'}{M'C'} = \frac{MB}{MC}$$



۷۳. فرض می کنیم M, N و P سه نقطه

واقع بر ضلعهای AB, BC و CA، یا بر امتداد آنها، از یک مثلث ABC

باشند (شکل). در نتیجه تبدیل قطب و

قطبی مثلث ABC به یک مثلث

A'B'C'، که ضلعهای a, b و c

آن، قطبیهایی نقطه های A, B و C

هستند، بدل می شود و نقطه های M,

N و P به خطهای m, n و p گذرنده بر نقطه های A', B' و C' فرض می کنیم M', N'

و P' نقطه های برخورد خطهای m, n و p با ضلعهای A'B'C' باشند. سعی می کنیم

بین عبارتهای :

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP}$$

رابطه ای برقرار کنیم.

ملاحظه می کنیم که نسبت A'M'/B'M' مساوی است با خارج قسمت

(A'M'/C'M')/(B'M'/C'M') مطابق قانون سینوسها داریم :

$$\left| \frac{B'M'}{C'M'} \right| = \frac{\sin \hat{B'C'M'}}{\sin \hat{C'B'M'}} \text{ و } \left| \frac{A'M'}{C'M'} \right| = \frac{\sin \hat{A'C'M'}}{\sin \hat{C'A'M'}}$$

از این جا نتیجه می شود، A'M'/B'M' از لحاظ قدرمطلق برابر است با :

$$\frac{\sin \hat{A'C'M'}}{\sin \hat{C'A'M'}} \bigg/ \frac{\sin \hat{B'C'M'}}{\sin \hat{C'B'M'}} = \frac{\sin \hat{C'B'M'}}{\sin \hat{C'A'M'}} \bigg/ \frac{\sin \hat{B'C'M'}}{\sin \hat{A'C'M'}}$$

می‌دانیم که قطبی A بر OA عمود است، که O مرکز دایره S در تبدیل قطب و قطبی است. بنابراین $C'B' \perp OA$ ، $C'A' \perp OB$ و $A'B' \perp OC$ ، و در نتیجه:

$\sin \hat{C'A'M'} = \sin \hat{BOC}$ و $\sin \hat{C'B'M'} = \sin \hat{AOC}$
 (زاویه‌های $C'B'M'$ و AOC و نیز زاویه‌های $C'A'M'$ و BOC ضلعهایشان برهم عمودند، و بنابراین مساوی یا مکملند، پس دارای سینوسهای مساوی هستند). از این رو داریم:

$$\frac{\sin \hat{C'B'M'}}{\sin \hat{C'A'M'}} = \frac{\sin \hat{AOC}}{\sin \hat{BOC}}$$

چون $C'M' \perp OM$ ، همچنین داریم:

$$\frac{\sin \hat{B'C'M'}}{\sin \hat{A'C'M'}} = \frac{\sin \hat{AOM}}{\sin \hat{BOM}}$$

حال عبارت اخیر را تبدیل می‌کنیم. برای این منظور مساحت‌های مثلث‌های AOM و BOM را از دو راه حساب، و نسبت آنها را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{S_{AOM}}{S_{BOM}} = \frac{\left| \frac{1}{2} AO \cdot OM \cdot \sin \hat{AOM} \right|}{\left| \frac{1}{2} BO \cdot OM \cdot \sin \hat{BOM} \right|} = \frac{\left| \frac{1}{2} AM \cdot h_{AB} \right|}{\left| \frac{1}{2} BM \cdot h_{AB} \right|}$$

(در این جا h_{AB} ارتفاع مشترک مثلث‌های AOM و BOM است). از تساوی اخیر بلافاصله به دست می‌آوریم:

$$\frac{\sin \hat{AOM}}{\sin \hat{BOM}} = \left| \frac{OB}{OA} \cdot \frac{AM}{BM} \right|$$

بنابراین نسبت $A'M'/B'M'$ از لحاظ قدر مطلق برابر است با:

$$\frac{\sin \hat{AOC}}{\sin \hat{BOC}} \bigg/ \left(\frac{OB}{OA} \cdot \frac{AM}{BM} \right) = \frac{1}{AM/BM} \cdot \left(\frac{\sin \hat{AOC}}{\sin \hat{BOC}} \cdot \frac{OA}{OB} \right)$$

با استدلالی مشابه نشان داده می‌شود که نسبت‌های $B'N'/C'N'$ و $C'P'/A'P'$ از لحاظ قدر مطلق بترتیب برابرند با:

$$\frac{1}{CP/AP} \cdot \frac{\sin \hat{COB}}{\sin \hat{AOB}} \cdot \frac{OC}{OA} \text{ و } \frac{1}{BN/CN} \cdot \frac{\sin \hat{BOA}}{\sin \hat{COA}} \cdot \frac{OB}{OC}$$

از ضرب این سه عبارت در یکدیگر معلوم می شود که قدرمطلقهای عبارتهای

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP}$$

عکس یکدیگرند.

مانده است که علامتهای آنها را با هم مربوط کنیم. برای سادگی، فرض می کنیم که O، مرکز S، در داخل $\triangle ABC$ باشد. داریم $OA \perp B'C'$ ، $OB \perp A'C'$ و $OC \perp A'B'$. این رابطه ها ایجاب می کنند که اگر OM بین OA و OB باشد، آن گاه $C'M'$ در خارج زاویه $A'C'B'$ باشد، و اگر OM خارج زاویه AOB باشد، آن گاه $C'M'$ بین $C'A'$ و $C'B'$ باشد. از آن جا نتیجه می شود که نسبت های AM/BM و $A'M'/B'M'$ علامتهایشان مخالف یکدیگرند. عیناً به همین طریق نشان داده می شود که نسبت های BN/CN و $B'N'/C'N'$ و CP/AP و $C'P'/A'P'$ ، مختلف علامه اند. این مطلب نتیجه گیری ما را که عبارتهای :

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} \text{ و } \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP}$$

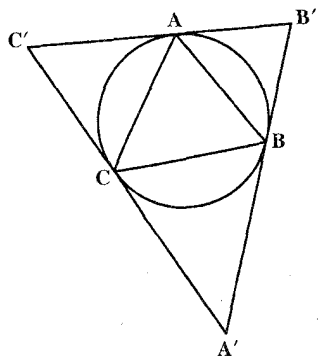
مختلف علامه هستند، موجه می سازد. روی هم رفته داریم :

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} = - \frac{1}{\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP}} \quad (۱)$$

به موجب ویژگی (الف) از تبدیل قطب و قطبی خطهای $A'N'$ ، $B'P'$ و $C'M'$ در یک نقطه متقاطع (یا موازی) هستند، اگر و فقط اگر، M، N و P همخط باشند. این امر فرمول (۱) ایجاب می کند که بر اثر تبدیل قطب و قطبی، قضیه های سوا و منلائوس به یکدیگر بدل شوند. از این جا نتیجه می شود که، کافی است فقط یکی از آنها را ثابت کنیم.

۱. ۳. ۷. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند

۷۵. می دانیم که اگر نقطه ای روی یک دایره قرار داشته باشد، قطبی آن نقطه نسبت به آن دایره خطی است که در همان نقطه بر دایره مماس می شود؛ بنابراین نقطه های A' ، B' و C'



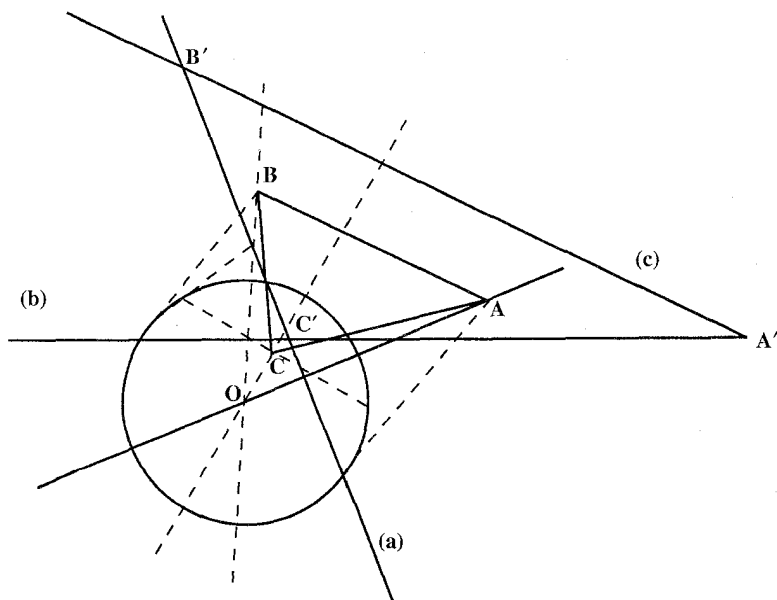
بترتیب قطب خطهای BC ، AC و AB از مثلث ABC می‌باشند. بنابراین در دو مثلث ABC و $A'B'C'$ هر رأس یکی قطب یک ضلع از دیگری و هر ضلع یکی قطبی یک رأس از دیگری است. پس دو مثلث قطبی معکوس یکدیگرند.

به طور کلی داریم:

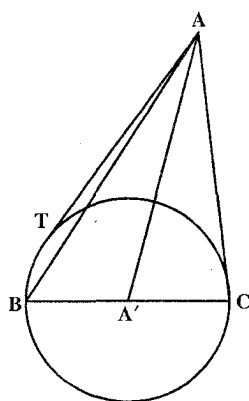
قضیه. اگر خطهای قطبی رأسهای مثلث (P) نسبت به دایره (O) ، ضلعهای مثلث (Q) باشند، نشان دهید

که خطهای قطبی رأسهای مثلث (Q) نسبت به دایره (O) ، ضلعهای مثلث (P) هستند؛ یعنی دو مثلث (P) و (Q) قطبی معکوس یکدیگرند.

برای اثبات، مثلث ABC (مثلث (P)) و دایره (S) را در نظر می‌گیریم. قطبیهای رأسهای A ، B و C نسبت به دایره را a ، b و c می‌نامیم. اگر نقطه‌های برخورد این سه خط را A' ، B' و C' بنامیم، بدیهی است که قطبیهای رأسهای مثلث $A'B'C'$ (مثلث (Q) ، ضلعهای مثلث ABC می‌باشند؛ زیرا قطبی رأس A' ، خط BC ، قطبی رأس B' ، خط AC و قطبی رأس C' ، خط AB از مثلث ABC است.



۱.۳.۸. رسم شکلها



۱.۷۶. دایره (A) (شکل) بر دایره به قطر BC عمود است. اگر از نقطه A مماس AT را بر دایره مزبور رسم کنیم، شعاع دایره (A) به دست می آید. برای این که این دایره موجود باشد، لازم است که زاویه A حاده یا قائمه باشد، درحالی که A قائمه است. دایره (A) به نقطه A تبدیل می شود. شعاع AT را بر حسب a، b و c، ضلعهای مثلث ABC محاسبه می کنیم. داریم:

$$AT^2 = AA'^2 - \frac{a^2}{4}$$

و به موجب قضیه میانه ها داریم:

$$b^2 + c^2 = 2AA'^2 + \frac{a^2}{2};$$

$$AT^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2};$$

پس

$$AT = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$$

یا

۲. فرض کنیم مثلث ABC زاویه منفرجه ندارد، دراین صورت دایره های (A)، (B) و (C) موجودند و این دایره ها دوه دو برهم عمودند؛ زیرا اگر دو دایره (A) و (B) را در نظر بگیریم، فاصله مرکزهای آنها برابر c می باشد. به موجب قسمت اول مربع شعاع آنها عبارتند از:

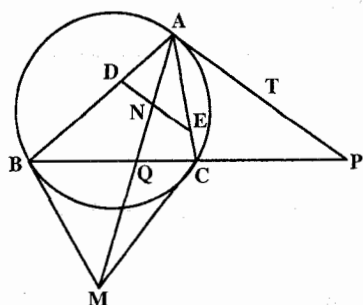
$$\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2} \text{ و } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$c^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4}$$

و داریم:

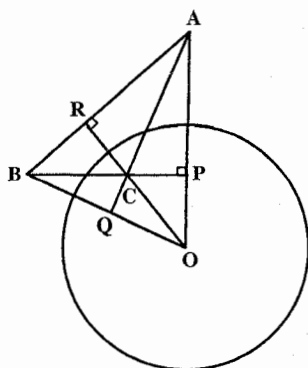
رابطه بالا نشان می دهد که دو دایره (A) و (B) برهم عمودند.

۱.۳.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۷۷. مماس AT با BC نسبت به زوج AB و AC متباین است. خط DNE که با AT موازی است نیز با BC نسبت به زوج مزبور متباین است. برای این که ثابت کنیم AM شبه میانه در ABC است، باید ثابت کنیم که AN میانه در ADE می باشد، ولی دستگاه $(A \cdot BCPQ)$ توافقی است؛ زیرا AM قطبی نقطه P نسبت به دایره

محیطی مثلث است (A و M دو نقطه این قطبی می باشند) و DE که موازی با AP می باشد، به وسیله شعاع مزدوج AQ نصف می شود (شکل).

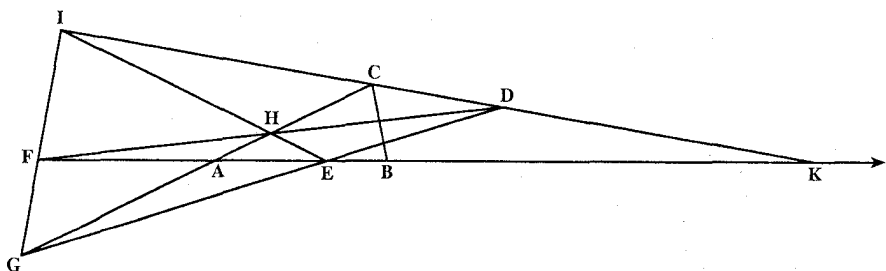


۷۸. مثلث ABC را، که قطبی معکوس خود نسبت به دایره S به مرکز O است، در نظر می گیریم (شکل). چون BC ، قطبی A ، بر OA عمود است، O بر ارتفاع AP از $\triangle ABC$ واقع است. همچنین O بر دو ارتفاع دیگر BQ و CR نیز واقع است. بنابراین O محل برخورد سه ارتفاع $\triangle ABC$ است. بعلاوه، چون هر سه جفت از نقطه های A و P ، B و Q ، C و R در یک طرف O قرار دارند، $\triangle ABC$ منفرج الزاویه است. منحصر به فرد بودن دایره S ،

که مثلث منفرج الزاویه T نسبت به آن قطبی معکوس خود است، از این امر ناشی می شود که مرکز O نقطه برخورد ارتفاعهای T است، و شعاعش، R، با رابطه $r^2 = OA \cdot OP = OB \cdot OQ = OC \cdot OR$ مشخص می شود. [تساوی سه حاصلضرب اخیر از تشابه مثلثهای OAQ و OAR، OBP و OAR، OCP و OAR، نتیجه می شود. می توان به آسانی تحقیق کرد که، $r = 2R \sqrt{\cos A \cos B \cos C}$ ، که شعاع دایره محیطی ΔABC است.]

۱.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۸۴. ۱. چهارضلعی EGFH، چهارضلعی کامل است. و قطر EF از این چهارضلعی به وسیله



دو قطر دیگرش به نسبت توافقی تقسیم می شود یعنی (FEAK) تقسیم توافقی است. پس داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} &= -\frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} \Rightarrow \frac{m\overline{AB}}{n\overline{AB}} = -\frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{KF}} = \frac{-m}{n} \\ \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{KF} - \overline{KE}} &= \frac{-m}{-m-n} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{EF}} = \frac{m}{m+n} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{\overline{AF} - \overline{AE}} = \frac{m}{m+n} \\ \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{n\overline{AB} - m\overline{AB}} &= \frac{m}{m+n} \Rightarrow \frac{\overline{KE}}{(n-m)\overline{AB}} = \frac{m}{m+n} \\ \Rightarrow \overline{KE} &= \frac{m(n-m)}{m+n} \overline{AB}\end{aligned}$$

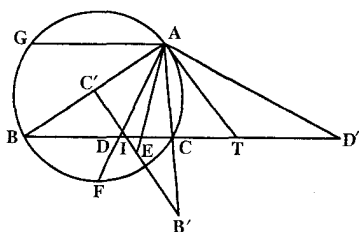
بنابراین حکم مسأله ثابت است.
۲. داریم:

$$\overline{EK} = \frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4})}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}} \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AB} \Rightarrow \overline{KE} = -\frac{1}{2} \overline{AB}$$

$$\overline{EA} = -m\overline{AB} = -\frac{1}{2} \overline{AB} \text{ و } \overline{AF} = n\overline{AB} = -\frac{3}{4} \overline{AB} \text{ و } 2\overline{KF} + 3\overline{AB} = 0.$$

$$\Rightarrow 2(\overline{KE} + \overline{EA} + \overline{AF}) + 3\overline{AB} = 0 \Rightarrow 2(-\frac{1}{2} \overline{AB} - \frac{3}{4} \overline{AB} - \frac{1}{4} \overline{AB}) + 3\overline{AB} = 0.$$

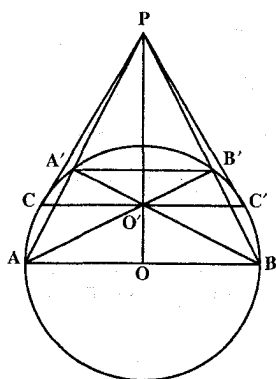
$$\Rightarrow -3\overline{AB} + 3\overline{AB} = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$



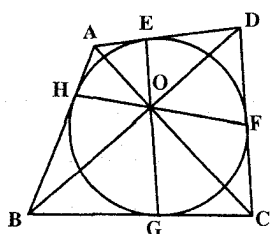
۸۵. ۱. AG را به موازات BC رسم می کنیم و فرض می کنیم F محل برخورد نیمساز AD با دایرة محیطی مثلث باشد، F وسط قوسهای BFC و GFA خواهد بود؛ پس AD نیمساز زاویه

۳.۴.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۴.۱. خطها همرسند



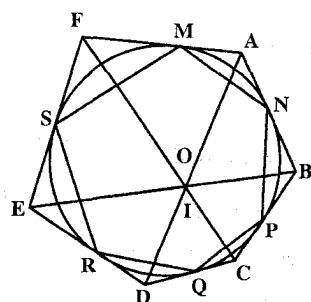
۹۰. اگر P محل برخورد AA' و BB' و O' محل برخورد AB' و BA' باشد، قطبی نقطه P باید از O' بگذرد و بر PO عمود شود، پس CC' قطبی P و نقطه P قطب CC' است. از طرف دیگر قطب CC' در محل برخورد مماسهای رسم شده از C و C' بر دایره است. پس این مماسها در نقطه P باهم برخورد می کنند.



۹۱. فرض کنیم چهار ضلعی $ABCD$ محیط بر یک دایره باشد. می خواهیم ثابت کنیم که قطرهای AC و BD ، و خطهای EG و FH که نقطه های تماس ضلعهای مقابل را به هم وصل می کنند، همرسند (شکل).

می توان $AHBCFD$ را یک شش ضلعی محیطی دانست که به موجب قضیه برانسن AC ، BD و HF همرسند؛

پس HF از O نقطه برخورد قطرهای AC و BD می گذرد و چنانچه شکل $ABGCDE$ را شش ضلعی محیطی فرض کنیم، بترتیب بالا ثابت می شود که AC ، BD و GE همرسند.



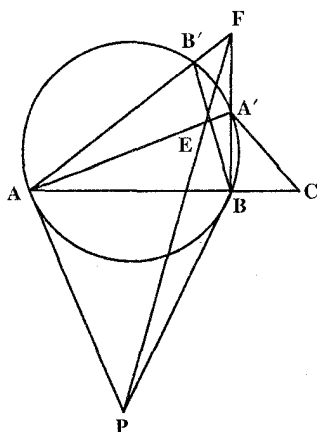
۹۲. شش ضلعی $ABCDEF$ بر دایره (O) محیط است.

نقطه های تماس را به هم وصل می کنیم تا شش ضلعی محاطی $MNPQRS$ به دست آید. به موجب قضیه پاسکال MN در نقطه α و NP با SR در نقطه β و PQ با MS در نقطه γ متقاطعند. و α ، β و γ بر یک استقامت واقعند. چون A قطب MN و D قطب RQ می باشد؛ پس α قطب AD است و به همین

دلیل β قطب BE و γ قطب FC است. چون α ، β و γ بر یک استقامتند، پس، قطبهای این نقطه ها یعنی AD ، BE و CF از یک نقطه می گذرند.

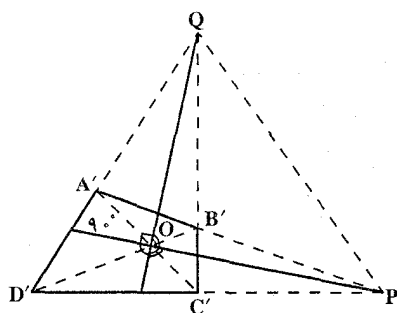
۱.۴.۳.۲. خط از نقطه ثابتی می‌گذرد

۹۳. اگر $A'B'$ ضلع AB را در G قطع کند، این نقطه قطب EF خواهد بود. نقطه P قطب AB است که نقطه‌ای است ثابت. چون G روی AB تغییر می‌کند، پس EF همواره از قطب AB ، یعنی نقطه ثابت P می‌گذرد (شکل).



۱.۴.۳.۳. خط نیمساز است

۹۴. بر اثر تبدیل قطب و قطبی نسبت به یک دایره S ، یک متوازی الاضلاع $ABCD$ به یک چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود که O ، مرکز S ، نقطه برخورد قطرهای آن است (ویژگی (ب) تبدیل قطب و قطبی). P و Q ، نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$ ، با قطرهای AC



و BD متوازی الاضلاع $ABCD$ متناظر می‌شود. اگر قطرهای متوازی الاضلاع برهم عمود باشند (یعنی اگر متوازی الاضلاع یک لوزی باشد)، پاره خط PQ از O به زاویه قائمه دیده می‌شود. بر اثر تبدیل قطب و قطبی قضیه مذکور در مسأله به قضیه زیر بدل می‌شود:

اگر پاره خط واصل بین P و Q ، نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل یک چهارضلعی $A'B'C'D'$ ، از O ، محل برخورد قطرهاش، به زاویه قائمه دیده شود، آن گاه OP و OQ نیمسازهای زاویه‌های بین قطرهای آن خواهد شد.

۱.۴.۴. زاویه

۱.۴.۴.۱. اندازه زاویه

۹۵. می‌دانیم که زاویه بین قطبیه‌های دو نقطه A و B نسبت به دایره (O) ، مکمل زاویه بین

خطهای واصل از مرکز دایره به دو نقطه A و B است؛ یعنی زاویه حاده بین دو خط موردنظر همان 5° و زاویه منفرجه بین آنها $13^\circ = 18^\circ - 5^\circ$ است.

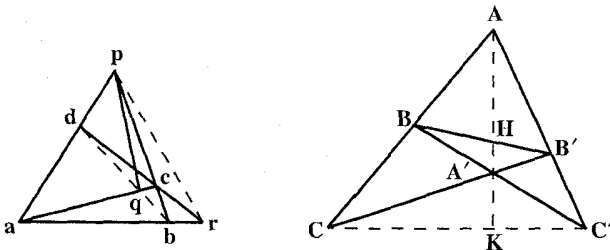
۵.۴.۱. پاره خط

۱.۵.۴.۱. اندازه پاره خط

۹۶. نقطه E محل برخورد مماسهای بر دایره در دو نقطه A و C نقطه ثابتی است. بنابراین مثلثهای EAB و EAD مشخص می‌باشند. از آنجا پاره خطهای EB و ED را می‌توان برحسب اجزاء داده شده به دست آورد.

۶.۴.۱. رابطه‌های مترى

۹۷. اگر $abcpqr$ شش ضلعی متقابل شش ضلعی کامل $ABCA'B'C'$ باشد که در آن قطر AA' قطرهای BB' و CC' را بترتیب در H و K قطع نموده باشد، برای اثبات این که $(AA'HK)$ یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، بایستی ثابت کنیم، قطبیهای نقطه‌های A، A'، H و K تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.

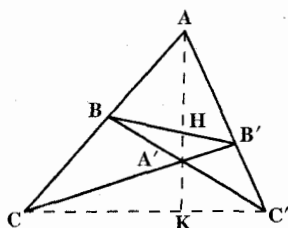
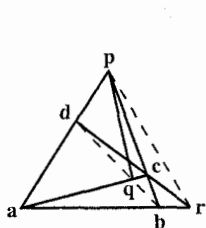


می‌دانیم pq قطبیه نقطه H، محل برخورد AA' و BB' است و خط ad قطبی A، نقطه برخورد $\overline{ABC}$ و $\overline{A'B'C'}$ و خط bc قطبی نقطه A'، محل برخورد $BA'C'$ و $CA'B'$ است، و چون A، H، A' و K بر یک استقامت می‌باشند، قطبیهای آنها هم‌رس بوده و از نقطه P می‌گذرند، و در چهارضلعی کامل $abcpqr$ ، خط pq قطبی نقطه r نسبت به pa و pd بوده و در نتیجه دستگاه (p, aqr) توافقی است.

۷.۴.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۹۸. قطبهای دو ضلع روبه روی مستطیل عبارتند از دو نقطه متساوی الفاصله از O که روی یک خط D واقعند. قطبهای دو ضلع روبه روی دیگر نیز عبارتند از دو نقطه متساوی الفاصله از O که روی یک خط D' قرار دارند. دو خط D و D' در O برهم عمودند. بنابراین چهار نقطه حاصل یک چهارگوشه تشکیل می دهند که دو قطر آن عمود منصف یکدیگرند، پس این چهارگوشه یک لوزی است. همچنین می توان از این ویژگی استفاده کرد که محورهای تقارن مستطیل روی مماسهایی که در رأسهای مستطیل بر دایره محیطی آن رسم می شوند، پاره خطهای برابر جدا می کنند.

۹۹. اگر $ABCA'B'C'$ یک شش ضلعی کامل به ضلعهای $AB'C'$ ، ABC و $BA'C'$ و به قطرهای AA' ، BB' و CC' باشد، در این صورت اگر قطبی متقابل آن را رسم کنیم، قطب هر ضلع نسبت به هر دایره دلخواه یک نقطه، و قطبی هر رأس، یک خط است. به نحوی که هر دو خط متقاطع، قطبهایشان بر قطبی نقطه تقاطعشان واقع است و همچنین خطهای همرس، قطبهایشان بر یک استقامت واقع است و برعکس قطبهای نقطه های واقع بر یک استقامت همرسند، چنانچه به طور خلاصه می توان نوشت :



اجزای چهار ضلعی کامل

ضلع	$AB'C'$
ضلع	$BC'A'$
ضلع	$CA'B'$
ضلع	ABC
رأس	A
رأس	B
رأس	B'

اجزای چهار ضلعی معکوس آن

a	رأس
b	رأس
c	رأس
d	رأس
ad	ضلع
bd	ضلع
ac	ضلع

رأس	C	cd	ضلع
رأس	C'	ab	ضلع
رأس	A'	bc	ضلع
قطر	AA'	نقطه برخورد قطرها	p(ad,bc)
قطر	BB'	نقطه برخورد قطرها	q(bd,ac)
قطر	CC'	نقطه برخورد قطرها	r(cd,ad)

از روی رابطه‌های بالا نتیجه می‌گیریم که هر ضلع چهار ضلعی متقابل، سه ضلع دیگر را قطع کرده و دارای سه قطر است، به طوری که هر قطر با دو قطر دیگر متقاطع است، یعنی قطبی متقابل هر چهار ضلعی کامل، یک چهار ضلعی کامل است.

۱۰۰. شکل دلخواه F را در نظر می‌گیریم، قطبیه‌های معکوس F نسبت به یک دایره ω به مرکز O و نسبت به دایره دیگر به همان مرکز باهم متشابه‌اند؛ بنابراین می‌توان دایره ω را همان دایره محاطی چندضلعی منتظم مفروض $ABC \dots$ اختیار کرد. در این صورت قطبیه‌های هر یک از ضلعهای AB ، BC ، ... و سطوح این ضلعها و قطبیه‌های رأسهای A ، B ، ... عبارتند از خطهایی که وسطهای دو ضلع مجاور به آن رأس را به هم وصل می‌کنند. هرگاه دایره محیطی چندضلعی را به عنوان دایره ω انتخاب کنیم، مبدل قطبی معکوس چندضلعی عبارت است از چندضلعی دیگری که ضلعهایش بر دایره محیطی در رأسهای چندضلعی اول مماس می‌باشند.

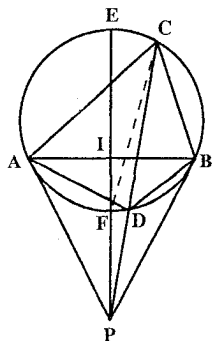
۱۰۱. قطری از دایره را که از نقطه P قطب وتر AB می‌گذرد رسم می‌کنیم. این قطر دایره را در نقطه‌های E و F و وتر AB را در وسط وتر AB ، قطع می‌کند. خطهای CE و CF

برهم عمودند و نیمسازهای زاویه ACB می باشند ؛ پس $\hat{ACF} = \hat{FCB}$ (۱) . از طرف

دیگر چون AB قطبی نقطه P است، نقطه‌های I و P مزدوج توافقی یکدیگر نسبت به نقطه‌های E و F می‌باشند؛ پس (C.EFIP) دستگاه توافقی است. در این دستگاه توافقی CE و CF برهم عمودند، پس نیمسازهای زاویه‌های ICP می‌باشند

و داریم (۲) $\hat{ICF} = \hat{FCP}$. از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲)

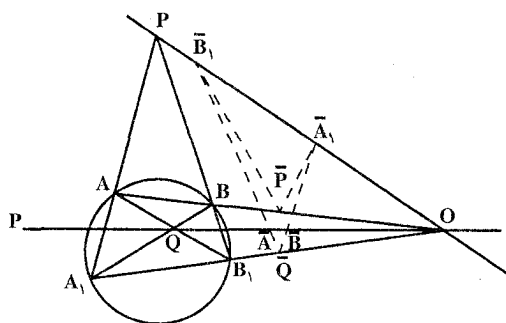
داریم : $\hat{A}CI = \hat{D}CB$ و این نشان می دهد که CH شبه میانه



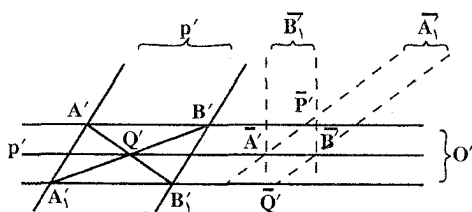
مثلاً CAB است. به روش مشابه ثابت می شود که DH شبه میانه مثلاً DAB است. همچنین AB شبه میانه مثلاًهای ACD و BCD است.

۱.۴.۸. رسم شکلها

۱۰۲. فرض می‌کنیم که ABB_1A_1 یک چهارضلعی محاطی در یک دایره S باشد. اگر ضلعهای AA_1 و BB_1 در P متقاطع باشند، و ضلعهای AB و A_1B_1 در O و قطرهای AB_1 و BA_1 در Q ، آن‌گاه p ، قطعی P ، خط OQ خواهد شد (شکل الف). از این‌جا نتیجه



(الف)

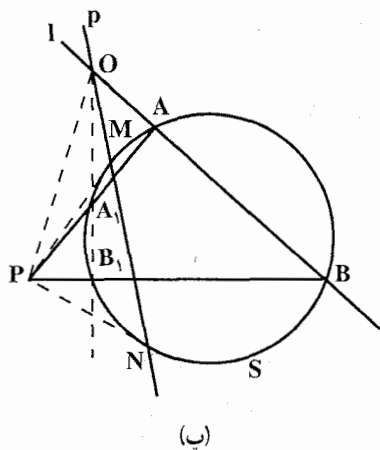


(b)

می‌شود که p قطبی P نسبت به دو خط AB و A_1B_1 است. پس p قطبی هر نقطه از خط OP نسبت به خط‌های AB و A_1B_1 است. به آسانی می‌توان ثابت کرد که A_1B_1 قطبی هر نقطه AB نسبت به خط‌های OP و p است. [برای اثبات، چهار خط AB ، A_1B_1 ، OP و p از صفحه π را بر یک صفحه جدید π' تصویر می‌کنیم به گونه‌ای که OP خط خاص π باشد. در این صورت AB و A_1B_1 به خط‌های موازی $A'B'$ و $A_1'B_1'$ و OP به

$O'P'$. خط بینهایت صفحه π' ، و p به میانخط p' از نواری حاصل به وسیله $A'B'$ و A_1B_1 (شکل ب) بدل می‌شوند. بنابر تعریف قطبی یک نقطه نسبت به دو خط، A_1B_1 قطبی هر نقطه P' واقع بر خط $A'B'$ است نسبت به خطهای p' و $O'P'$. اما در این صورت A_1B_1 قطبی پیشنهادگر نقطه P ، واقع بر خط AB ، نسبت به خطهای p و OP است. [بنابراین، وقتی خطهای OP و p و AB داده شده باشند، می‌توانیم خط A_1B_1 را به وسیله ستارهٔ تنها رسم کنیم، یعنی دو خط $\overline{PAA_1}$ و $\overline{PBB_1}$ متقاطع در $\bar{P}$ بر AB را رسم می‌کنیم ($\bar{A}$ و $\bar{B}$ بر p واقعند، درحالی که $\bar{A_1}$ و $\bar{B_1}$ بر OP واقعند)، و $\bar{Q}$ ، نقطهٔ

برخورد خطهای AB_1 و BA_1 را به O ، نقطه برخورد خطهای p و AB ، وصل می کنیم.



(ب)

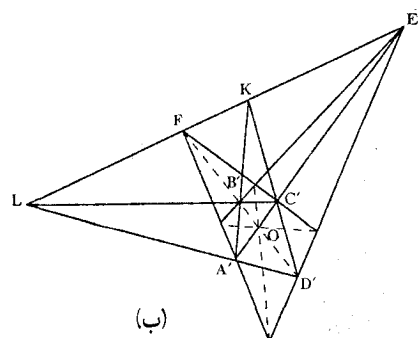
اکنون به حل مسئله خود باز می گردیم. فرض می کنیم p خطی اختیاری باشد که l را در نقطه ای مانند O ، و کمان مفروض را در نقطه های M و N بریده است. (نقطه های برخورد p با کمان مفروض می تواند بر دو سر کمان منطبق باشد. آنچه که ما می خواهیم، این است که خط p موازی با l نباشد و کمان MN کمتر از یک نیمدایره باشد.) قطب P ی p نسبت به S ، نقطه برخورد مماسهای بر S در نقطه های M و N است، و می تواند به وسیله ستاره تنها رسم

شود. حال فرض می کنیم که l دایره S را در نقطه های A و B (که می خواهیم تعیین کنیم) برد. خطهای PA و PB دایره S را در دو نقطه دیگر A_1 و B_1 می برند (شکل پ). چنانچه در بالا نشان دادیم، وقتی خطهای AB (یعنی l) و p داده شده باشند، می توانیم A_1B_1 را با ستاره تنها رسم کنیم. یادآور می شویم که اگر l در خارج زاویه MOP باشد (که در این حال، l دایره S را می برد ولی کمان MN را نمی برد)، آن گاه A_1B_1 از داخل زاویه MOP می گذرد و در نتیجه، یا S را نمی برد (در این صورت l دایره S را نمی برد، و نقطه های A و B وجود ندارند). یا کمان MN را در نقطه های A_1 و B_1 می برد. نقطه های برخورد PA_1 و PB_1 با l ، نقطه های مطلوبند.

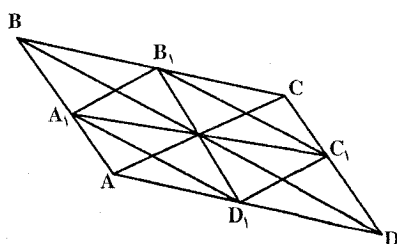
بررسی مشروح حالتی که A_1 و B_1 برهم منطبقند، یعنی خط A_1B_1 بر S در A_1 مماس است، به عهده خواننده گذاشته می شود. در این حال l بر S در A ، نقطه برخورد PA_1 و l ، مماس است، p قطبی P نسبت به خطهای OA و OA_1 است.

۹.۴.۱. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۱۰۳. نخست باید نقطه های وسط ضلعهای یک متوازی الاضلاع را برحسب موجوداتی که نگاره های آنها بر اثر تبدیل قطب و قطبی معلومند، تعریف کنیم (زیرا نگاره وسط یک



(ب)



(الف)

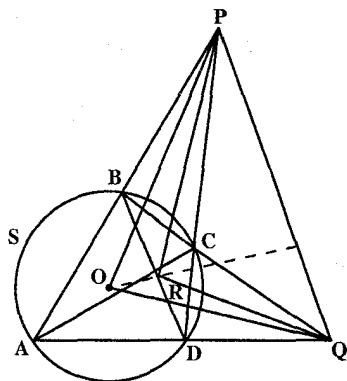
پاره خط در یک تبدیل قطب و قطبی بر ما معلوم نیست). تعریف زیر یکی از این تعریفها است:

وسطهای ضلعهای یک متوازی الاضلاع نقطه‌های برخورد ضلعها و میانخطهای آن است. میانخطها خطهایی هستند که از نقطه برخورد قطرها به موازات ضلعها کشیده می‌شوند. این تعریف، تعریفی است که ما می‌پذیریم. به موجب ویژگی (ب) ی تبدیل قطب و قطبی، متوازی الاضلاع $ABCD$ به چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود که محل برخورد قطرهایش بر O ، مرکز S ، منطبق است (شکل ب). رأسهای مقابل متوازی الاضلاع به ضلعهای مقابل چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود، قطرهای متوازی الاضلاع به نقطه‌های K و L ، محل برخورد جفت‌های ضلعهای مقابل چهارضلعی، و نقطه برخورد قطرهای متوازی الاضلاع به خط KL . به موجب ویژگیهای (ب) و (ج) از یک تبدیل قطب و قطبی، میانخطهای متوازی الاضلاع به نقطه‌های E و F ، محل برخورد خط KL با قطرهای $A'C'$ و $B'D'$ از چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌شود. این نکته‌ها ایجاب می‌کنند که وسطهای ضلعهای متوازی الاضلاع به خطهای EB' و ED' ، FA' و FC' بدل شوند، پس گزاره اصلی مایه پیدایش گزاره دوگان آن به شرح زیر می‌شود:

نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی که ضلعهایش بر خطهای FA' ، EB' ، FC' و ED' واقعند، بر نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی $A'B'C'D'$ منطبق است (شکل ب).

۱۰.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۰۴. الف. فرض می‌کنیم P و Q نقطه‌های برخورد ضلعهای چهارضلعی محاط در S باشند، و نقطه برخورد قطرهای آن. از قضیه ۱ نتیجه می‌شود که R قطب PQ است (شکل



که این امر قضیه ما را ایجاب می کند.
 ب. اگر A_1, B_1, C_1, D_1 نقطه های تماس ضلعهای چهارضلعی ABCD محیط بر دایره S باشد، آن گاه نقطه های برخورد قطرهای چهارضلعی ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ بهم منطبقند. همچنین خطهای واصل بین نقطه های برخورد ضلعهای مقابل چهارضلعیها بهم منطبقند. قضیه مورد بحث از قسمت (الف) نتیجه می شود.

۱.۵. قطب و قطبی در دایره

۱.۵.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۰۵. خطی است متقاطع با دایره که به فاصله $\frac{R}{3}$ از مرکز دایره واقع است؛ زیرا اگر A' پای

قطبی باشد، $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2$ است.

۱۰۶. فرض کنیم r شعاع دایره (O) و I محل برخورد OP و قطبی نقطه P نسبت به دایره باشد. داریم:

$$OI \times OP = r^2$$

$$OI \times (OI + IP) = r^2$$

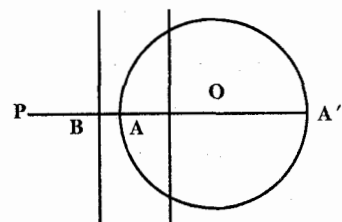
یا

$$OI^2 - r^2 = IO \times IP$$

و از آن جا

این رابطه نشان می دهد که I قوت های متساوی نسبت به دایره (O) و دایره به قطر OP دارد، پس قطبی نقطه P محور اصلی دو دایره مزبور است که باید از I بر OP عمود شود.

۱۰۷. چون Δ قطبی نقطه P است، تقسیم (PMCD) توافقی است. پس تصویرهای چهار نقطه روی AB تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، یعنی تقسیم (PQEF) نیز توافقی است؛ بنابراین قطبی F نسبت به دایره به قطر PQ خط CE و قطبی E نسبت به دایره مزبور خط DF می‌باشد.



۱۰۸. فرض کنید P' پای قطبی نقطه P و B وسط PP' باشد (شکل). کافی است ثابت کنیم که B پای محور اصلی نقطه P و دایره (O) است و یا ثابت کنیم:

$$BP^2 = BA \times BA'$$

رابطه بالا محقق است؛ زیرا P و P' نسبت به AA' مزدوج توافقی بوده و B وسط PP' است.

به همین ترتیب ثابت می‌شود که صفحه قطبی نقطه P نسبت به کره (O) در تجانس به مرکز P و با نسبت ۲ متناظر با صفحه اصلی نقطه P و کره (O) است.

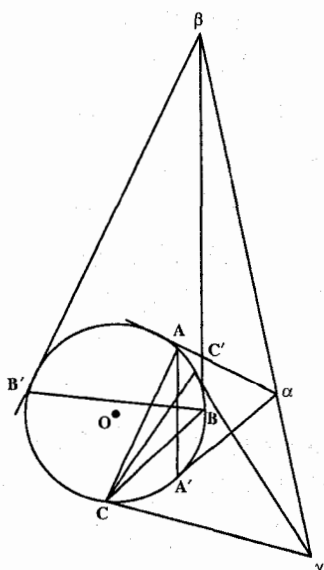
۱.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۵.۱. نقطه‌ها همخطند

۱۱۱. چون A' وسط کمان BC واقع است، پس AA'

نیمساز داخلی زاویه $\hat{BAC}$ است و به همین دلیل BB' و CC' بترتیب نیمسازهای داخلی زاویه‌های $\hat{ABC}$ و $\hat{ACB}$ می‌باشند، و چون سه نیمساز داخلی یک مثلث هم‌رسند، پس AA' ، BB' و CC' در یک نقطه مانند I هم‌رسند.

از طرفی چون از α مماسهای αA و $\alpha A'$ را بر دایره رسم نموده و نقطه‌های تماس را به هم وصل کرده‌ایم؛ پس قطب AA' و به همین دلیل β قطب BB' و γ قطب CC' بوده که چون AA' ، BB' و CC' هم‌رسند، قطبهای آنها که عبارت از α ، β و γ می‌باشند، بر یک استقامت واقعند.



۱۱۲. این مسأله به مسأله زیر تبدیل می شود:

فرض می کنیم، a, a_1, b, b_1, c

c_1 مماسهای رسم شده بر یک دایره

S از نقطه‌های K، L و M واقع بر

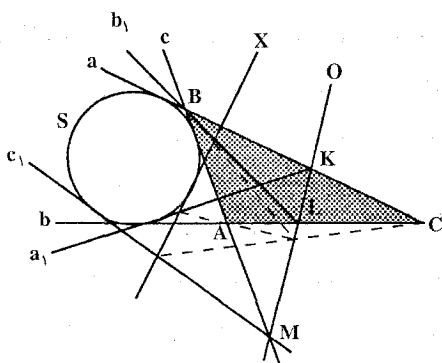
یک خط O باشد و x مماسی دلخواه

بر S ، در این صورت خطهای واصل

بین رأسهای مثلث حاصل از a ، b و

c و نقطه‌های متناظر a_1 ، b_1 و c_1

در یک نقطه واقع بر O برخورد می کنند.



۱.۵.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۵.۳.۱. خطها هم رسند

۱۱۳. فرض کنید خط‌های قطبی نقطه داده شده P نسبت به دودسته دایره مفروض (U) ، به طور

مثال (A) و (B)، یکدیگر را در Q قطع کنند. در این صورت، دایره (PQ) که PQ قطر

آن است با (A) و (B) متعامد است؛ پس (PQ) با هردایره دیگری از (U)، به طور مثال

(C) متعامد است، و بنابراین، P و Q نسبت به (C) مزدوجند؛ پس خط قطبی P نسبت

به (C) نیز از Q می‌گذرد و قضیه ثابت می‌شود.

تبصره. دایره (PQ) به دسته دایره مزدوج دسته دایره (U)، یعنی دسته دایره (W) متعلق

است: پس Q روبه روی قطری P ، در دایره‌ای است که از P می‌گذرد و به دسته دایره

(W) متعلق است. این راهی برای تعیین نقطه Q است.

همچنین می‌توان مشاهده کرد که چون دایره (P) از نقطه P می‌گذرد و به دسته دایره

مفروض (U) تعلق دارد، با (PQ) متعامد است، خط PQ در P بر (P) مماس است، و

Q متقارن P نیست به نقطه برخورد این مماس با محور اصلی (U) است. این راه

دیگری برای تعیین نقطه Q است.

۱. ۵. ۳. ۲. خطها برهم عمودند

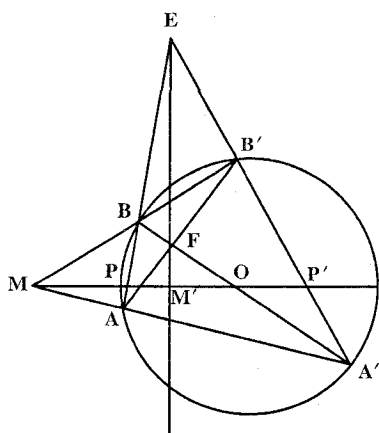
۱۱۴. در متوازی الاضلاع ADPE قطرها منصف یکدیگرند، یعنی: $IP = IA$ ، پس اگر از E

خط EH را موازی AP رسم کنیم، دستگاه (E-HDPA) توافقی است، و چنانچه

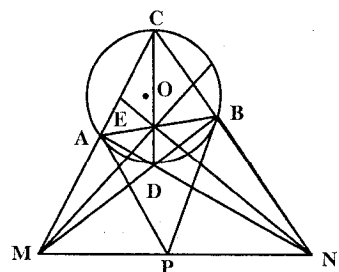
خط AL را موازی ED رسم کنیم، دستگاه (A · LPDB) که شعاعهایش نظیر به نظیر موازی شعاعهای دستگاه توافقی (E · APDE) می باشند، توافقی خواهد بود، در نتیجه نقطه M مزدوج توافقی P نسبت به CB است، و در نتیجه خط AL قطبی P نسبت به دایره (O) می باشد و از آن جا AL و در نتیجه موازیش ED بر OP عمود خواهد بود.

۱.۵.۳. خط از نقطه ثابتی می گذرد

۱۱۵. چنانچه از نقطه E، محل برخورد AB و CD بر OP عمود کنیم، این خط قطبی نقطه P نسبت به خطهای EBA و EDC و یا دایره (O) است. و در نتیجه (PIHO) تشکیل یک تقسیم توافقی می دهند. چون دایره (O) و نقطه P ثابت است، OP و قطبی P نسبت به دایره و در نتیجه I پای قطبی و نقطه های O و P ثابت بوده، و از آن جا H ثابت است و می توان نتیجه گرفت که H مزدوج توافقی D نسبت به PI ثابت بوده و یا به عبارت دیگر، CD از نقطه ثابت H می گذرد.

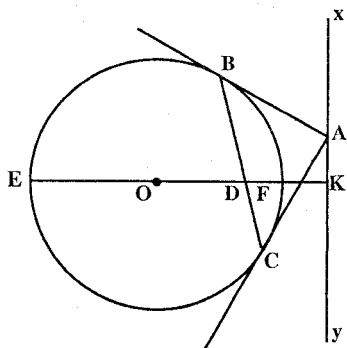
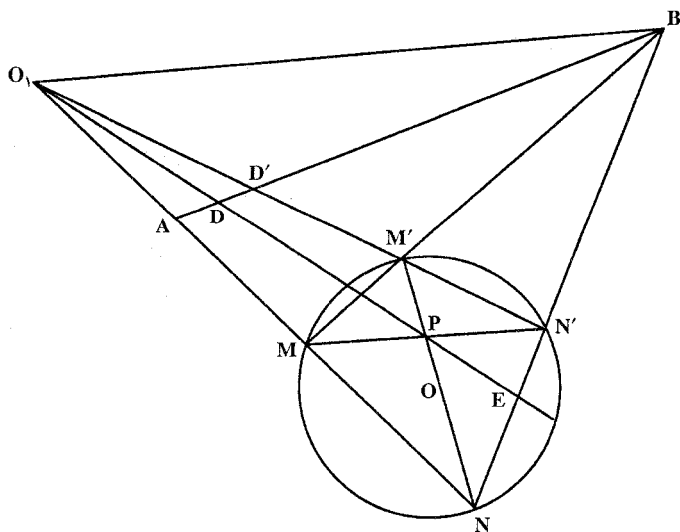


۱۱۶. فرض کنیم قطبی M نسبت به دایره (O)، خط EF باشد. اگر MP خط EF را در M' و A'B' را در P' قطع کند، دستگاه (E · MFAA') توافقی است و تقسیم (MM'PP') توافقی می باشد. در این تقسیم سه نقطه M, P و M' ثابتند، پس P' نیز نقطه ثابتی است و A'B' حول آن حرکت می کند.

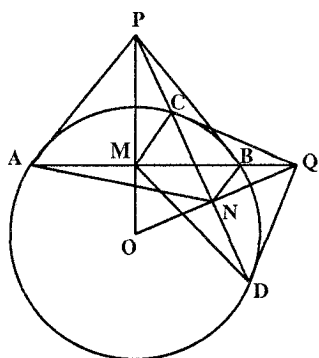


۱۱۷. خط NE قطبی نقطه M نسبت به دو خط NA و NC و در نتیجه نسبت به دایره (O) می باشد و همچنین خط ME قطبی N نسبت به دو خط MB و MC و در نتیجه نسبت به دایره است و از آن جا خط MN قطبهای دو خط ME و NE را به هم وصل می کند، قطبی نقطه برخورد آنها می باشد، پس خط MN قطبی نقطه E واقع بر AB می باشد.

وقتی نقطه‌های C و D بر محیط دایره (O) تغییر نمایند، نقطه E بر خط ثابت AB تغییر می‌نماید، و چون قطبهای کلیه نقطه‌های واقع بر یک خط بر قطب آن خط می‌گذرد، پس وقتی C و D تغییر نمایند، MN قطبی E تغییر نموده، لیکن پیوسته از قطب خط AB نسبت به دایره (O) می‌گذرد و برای تعیین آن در نقطه‌های A و B ، دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. نقطه برخوردشان، P واقع بر MN بوده، و این نقطه ثابت است. ۱۱۸. DP قطبی نقطه B نسبت به دایره O است. چون B ثابت است، قطبی آن نیز نسبت به دایره ثابت است؛ پس D نقطه‌ای است ثابت. از طرفی دستگاه (O, NN', EB) توافقی است؛ چون AB شعاعهای این دستگاه را قطع کرده است. پس چهار نقطه B, D, D', D' و A تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند. چون سه نقطه A, D و B از این تقسیم توافقی ثابت است، پس D' نقطه‌ای است ثابت.



۱۱۹. می‌دانیم قطبهای نقطه‌هایی که بر یک خط راست واقعند، از قطب آن خط می‌گذرند. BC قطبی نقطه متغیر A واقع بر خط xy است، پس BC از قطب xy می‌گذرد و قطب x نقطه‌ای است مانند D که روی قطر EF ، عمود بر xy واقع است.



۱.۵.۳.۴ خط نیمساز است

۱۲۱. محل برخورد CD را با OM، نقطه P و محل برخورد AB را با ON، نقطه Q می‌نامیم. AB و OP که برهم عمودند، نیمسازهای زاویه CMD می‌باشند. پس دستگاه (M·PBCD) توافقی است و P قطب AB می‌باشد؛ چون CD از P می‌گذرد، پس قطب CD روی AB، قطبی P، قرار دارد؛ یعنی نقطه Q قطب CD است، و دستگاه (N·ABCQ) توافقی می‌باشد. در این دستگاه دو شعاع NC و NQ برهم عمودند. بنابراین این دو شعاع نیمسازهای زاویه ANB می‌باشند.

۱.۵.۳.۵ خط مماس بر دایره است

۱۲۲. ثابت کنید فاصله این خط تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

۱.۵.۴.۵ زاویه

۱.۵.۴.۱ اندازه زاویه

۱۲۳. قطبهای نقطه‌های A و B بترتیب بر OA و بر OB عمودند.

۱.۵.۴.۲ رابطه بین زاویه‌ها

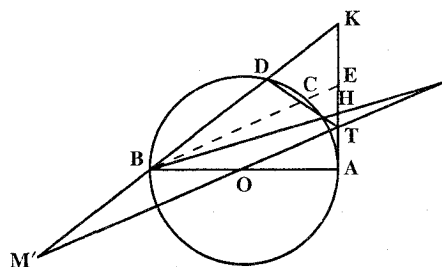
۱۲۴. قطعه مماسی که به وسیله دو مماس ثابت a و b از یک مماس متغیر سوم بر دایره جدا می‌شود، از مرکز دایره به زاویه ثابتی دیده می‌شود.

۱.۵.۵.۵ پاره خط

۱.۵.۵.۱ رابطه بین پاره خطها

۱۲۵. فرض می‌کنیم Δ موازی با AB، قطبی I نسبت به دایره O باشد. محل برخورد Δ را

با MN نقطه R و محل برخورد آن را با MP و NQ، نقطه S می نامیم. قطبی نقطه I از S می گذرد؛ پس تقسیم (RIMN) توافقی است. از آن جا دسته خطهای (SM, SN, SI, SR) متساویند؛ چون AB موازی با شعاع SR است، نقطه I وسط uV خواهد بود که به وسیله شعاعهای SM و SN قطع شده است.



۱۲۶. BE را به موازات OT رسم می کنیم (شکل). برای این که ثابت کنیم O وسط MM' است، کافی است ثابت کنیم دستگاه (B·AEHK) توافقی است و یا این که تقسیم AEHK توافقی

است و چون T وسط AE است، پس کافی است ثابت کنیم $TA^2 = TH \cdot TK$. اما $TA^2 = TC \times TD$ ، و از طرف دیگر نسبت به زوج (BK و BH) و مماس در نقطه B متباینند، پس CD و مماس در نقطه A نسبت به زوج مزبور متباینند. به عبارت دیگر DCHK قابل محاط شدن در دایره است و خواهیم داشت:

$$TC \times TD = TH \times TK ;$$

$$TA^2 = TH \times TK$$

بنابراین:

۱۲۷. از نقطه T محل برخورد مماسهای بردایره در نقطه های A و B خطی بر PO عمود می کنیم. اگر Q پای عمود باشد، TQ قطبی P نسبت به دایره است؛ زیرا قطب نقطه P نسبت به دو خط TM' و TB از نقطه برخورد آنها، یعنی نقطه T می گذرد. همچنین نسبت به دایره (O)، و چون بر OP عمود است، پس TQ قطبی P نسبت به دایره است و در نتیجه نقطه های (PIAB) تشکیل تقسیم توافقی داده و دستگاه (T·PQAB) توافقی است و چون خط D موازی شعاع TQ، سه شعاع دیگر TM، TM' و TP را قطع نموده، پس $PM = PM'$ است.

۱۲۸. خط BD قطبی نقطه E نسبت به دایره (O) است. در نتیجه نقطه های (EDCA) تشکیل یک تقسیم توافقی داده و از آن جا دستگاه (P·DECA) توافقی است. و چون BD موازی شعاع PA رسم شده، به وسیله سه شعاع دیگر به دو قسمت مساوی تقسیم می شود؛ یعنی $BI = ID$ است.

۱۲۹. راه اول. می دانیم، اولاً مماس مشترک دو دایره در یک نقطه واقع بر محور اصلی دو دایره متقاطعند که آن را مرکز تجانس دو دایره می نامند.

ثانیاً. اگر S مرکز تجانس دایره‌های (O) و (O') باشد، T'I' و TI قطبهای S نسبت به دایره‌های O و O' می‌باشند.

ثالثاً. محور اصلی دو دایره از وسط مماس مشترک دو دایره می‌گذرد، در نتیجه:

$$MT = MT'$$

$$\frac{MT}{MT'} = \frac{IH}{I'H}$$

چون $\Delta TIT' \sim \Delta T'I'H$ است، و داریم:

نتیجه می‌شود که $I'H = I'H$ ؛ یعنی قطبهای مرکز تجانس مستقیم دو دایره از محور اصلی آنها به یک فاصله‌اند و به همین طریق نسبت به مرکز تجانس معکوس دو دایره ثابت می‌کنیم.

راه دوم. اگر H وسط II' باشد، ثابت می‌کنیم که H پای محور اصلی دو دایره روی خط‌المركزین است.

چون S مرکز تجانس دو دایره است، پس:

$$\frac{O'S}{OS} = \frac{R'}{R} \quad \text{یا} \quad \frac{O'S}{OO'} = \frac{R'}{R-R'}$$

$$O'S = \frac{R' \cdot d}{R-R'} \quad \text{یا}$$

$$OS = OO' + O'S = d + \frac{R'd}{R-R'} = \frac{Rd}{R-R'} \quad \text{و}$$

و از طرفی چون D قطبی S نسبت به دایره (O) است، داریم:

$$OI \cdot OS = R^2 \quad \text{یا} \quad OI = \frac{R^2}{OS} = \frac{R(R-R')}{OO'}$$

$$O'I' = \frac{R'(R-R')}{OO'} \quad \text{و}$$

$$OI' = OO' + \frac{R'(R-R')}{OO'} \quad \text{و یا}$$

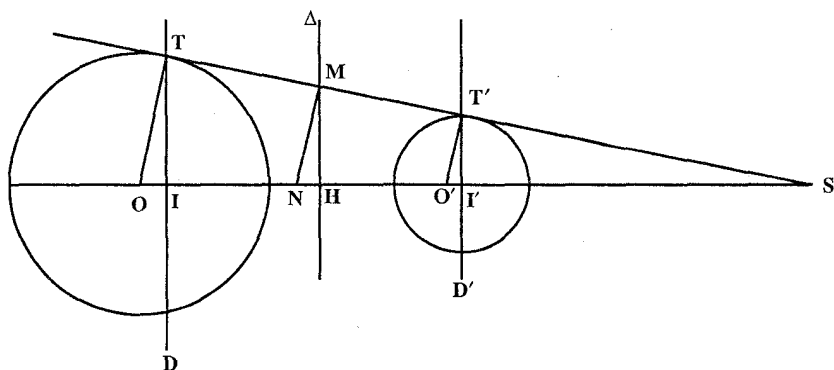
$$OH = \frac{OI + OI'}{2} = \frac{OO'}{2} + \frac{R(R-R')}{2OO'} + \frac{R'(R-R')}{2OO'} \quad \text{و یا}$$

و اگر N وسط OO' باشد،

$$OH = ON + \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$$

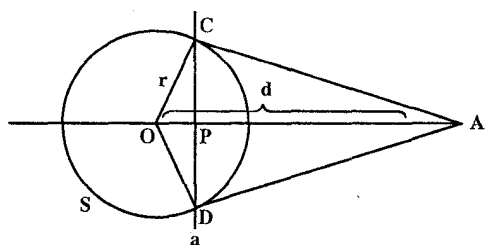
$$NH = \frac{R^2 - R'^2}{2OO'} \quad \text{یا}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که H پای محور اصلی دو دایره است و چون H وسط II'

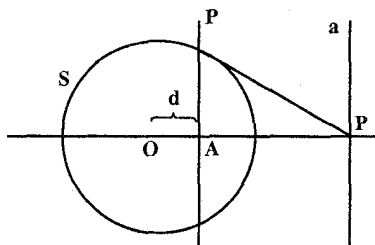


۱.۵.۶. رابطه‌های متری

۱۳۰. اگر A در بیرون دایره S ($d > 1$) باشد و AC و AD مماسهای رسم شده از A بر S باشند، آن گاه a، قطبی نقطه A، بر CD منطبق است و $a \perp OA$. فرض می‌کنیم P نقطه برخورد CD و OA باشد (شکل الف). چون مثلثهای OCA و OPC متشابهند، $OP = OC^2/OA = 1/d$ یا $OA/OC = OC/OP$ که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



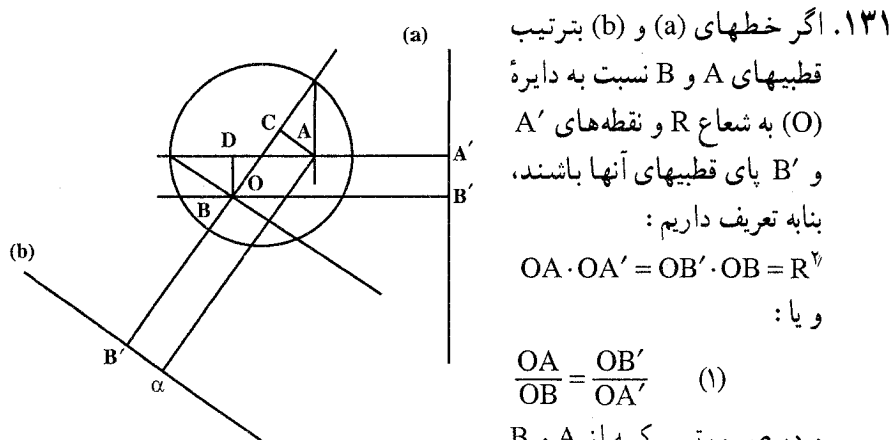
(الف)



(ب)

اگر A بر S ($d=1$) باشد، قضیه بدیهی است. اگر A در داخل S ($d<1$) باشد، P خطی است گذرنده بر A و عمود بر OA ، و P قطب p است، پس P بر خط OA ، در بیرون S واقع است (شکل (ب)). مانند بالا نتیجه می‌گیریم که $OA = \sqrt{OP}$ یا $OP = \sqrt{OA} = \sqrt{d}$.

قطبی A ، عمودی است که از P بر OA رسم می‌شود. بنابراین OP برابر فاصله O از a است، اما این فاصله درست $1/d$ است. یادداشت. به همین طریق، می‌توانیم ثابت کنیم که، اگر فاصله A از O برابر d و شعاع دایره r باشد، فاصله a ، قطبی A ، از O برابر r^2/d است.



از ملاحظه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} \quad (2)$$

از ملاحظه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{OC}{OD} = \frac{OB' + OC}{OA' + OD} = \frac{CB'}{DA'} = \frac{A\alpha}{B\beta}$$

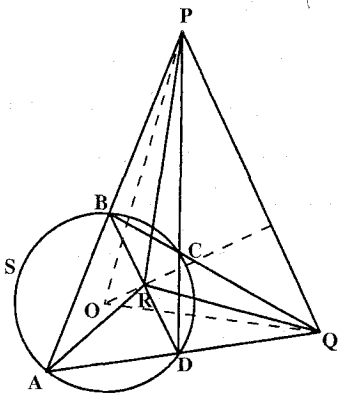
۱۳۲. خط BC که نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از I بر دایره را به هم وصل کرده، قطبی I نسبت به دایره است. در نتیجه قطب کلیه خطهای گذرنده بر I ، بر قطبی I واقع است، پس قطب IO بر BC قرار دارد، و همچنین نقطه O قطب خط AO است و در نتیجه قطب OI بر خط AO قرار دارد. پس A قطب خط IO نسبت به دایره (ω) بوده و نقطه‌های $(APBC)$ تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند، و از آنجا دستگاه $(I \cdot APBC)$ توافقی بوده و چون هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، تشکیل تقسیم توافقی می‌دهد، پس $(AOMN)$ یک تقسیم توافقی است و داریم:

$$\frac{2}{OA} = \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$$

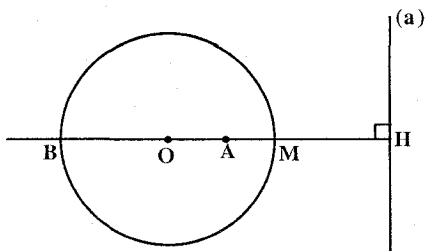
و چون A و O ثابت هستند، $\frac{2}{OA}$ و از آنجا $\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON}$ ثابت است.

۷.۵.۱. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند

۱۳۳. اگر نقطه R بر خورد قطرها، و P و Q نقطه‌های برخورد ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی محاطی $ABCD$ باشند، قطبی معکوس مثلث PQR نسبت به دایره بر خودش منطبق است، یعنی قطب هر ضلع آن رأس مقابل به آن ضلع و قطبی هر رأسش، ضلع روبه‌روی آن است.

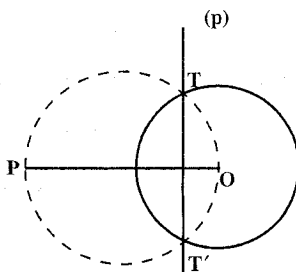


۸.۵.۱. رسم شکلهای

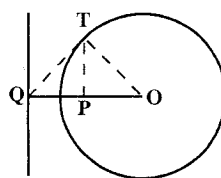


۱۳۴. از مرکز دایره به خط مفروض عمود می‌کنیم و مزدوج توافقی پای عمود نسبت به دو سر قطر ایجاد شده به وسیله خط عمود را به دست می‌آوریم. این نقطه قطبی خط داده شده است.

۱۳۵. اولاً. P خارج دایره است (شکل (الف)): دایره‌ای به قطر OP رسم می‌کنیم تا دایره O را در دو نقطه T و T' قطع کند؛ این دو نقطه، نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از نقطه P بر دایره O هستند (چرا؟)؛ پس TT' قطبی P نسبت به دایره O است (چرا؟).



(الف)



(پ)

(ب)

ثانیاً. P روی دایره است؛ مماس بر دایره در P را رسم می کنیم.

ثالثاً. P داخل دایره است؛ از آن، عمودی بر OP اخراج می کنیم تا دایره را در T قطع کند (شکل (ب))؛ در نقطه T مماسی بر دایره رسم می کنیم تا امتداد OP را در Q قطع کند؛ از Q خط (p) را بر OQ عمود می کنیم.

۱۳۶. دو نقطه A و B (شکل) را روی یک قطر

در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم دو وتر
گذرنده بر A و B در نقطه M واقع بر محیط
دایره متقاطع باشند. برای این که دو وتر
متساوی باشند، لازم و کافی است که

فاصله‌های OA' و OB' آنها از مرکز دایره به یک اندازه باشد و به عبارت دیگری از نیمسازهای زاویه بین دو وتر از O بگذرد، و در این صورت نیمساز دیگر، یعنی MI ، مماس بر دایره در نقطه M خواهد بود. پس دستگاه $(M.ABOI)$ توافقی است. بنابراین بایستی نقطه I ، مزدوج توافقی O را نسبت به AB رسم نمود و از این نقطه مماسی بر دایره رسم کرد.

برای M دو جواب قرینه نسبت به AB به دست می‌آید و برای این که مسأله ممکن باشد، باید $OI \geq r$ باشد.

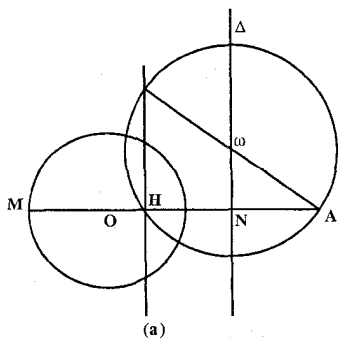
اگر محوری روی AB در نظر بگیریم، داریم:

$$\frac{1}{OJ} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$$

۹.۵.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

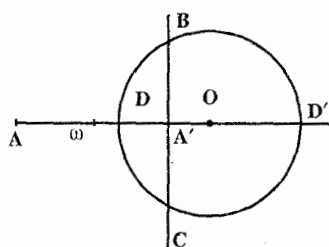
۱۳۷. اگر (ω) یکی از دایره‌های گذرنده بر نقطه A و

عمود بر دایره (O) باشد، قطری از دایره (O) که از A می‌گذرد، به وسیله دایره (ω) به نسبت توافقی تقسیم می‌شود. چنانچه دایره (ω) ضمن تغییر پیوسته از A گذشته و عمود بر دایره (O) باشد. قطری از دایره (O) که از A می‌گذرد پیوسته ثابت بوده و در نتیجه مزدوج توافقی A نسبت به MN دو سر قطر دایره (O)، یعنی نقطه



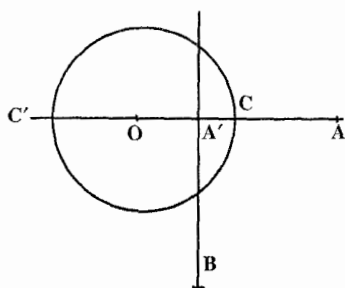
H ثابت بوده و بر دایره‌های (O) واقع است، زیرا در تقسیم توافقی (AHMN) سه نقطه ثابت است. پس H نیز ثابت خواهد ماند و این نقطه پای قطبی نقطه A نسبت به دایره (O) می‌باشد. یعنی تمام دایره‌های گذرنده بر نقطه A و عمود بر دایره (O) از پای قطبی نقطه A نسبت به دایره (O) می‌گذرند.

۱۳۸. زیرا تمام دایره‌هایی که از A می‌گذرند، B و C نسبت به هریک از آنها مزدوجند، دایره‌هایی می‌باشند که از A گذشته و بر دایره به قطر BC عمودند. اما همان‌طوری که می‌دانیم، تمام این دایره‌ها از پای قطبی A نسبت به دایره به قطر BC می‌گذرند.



۱۳۹. برای تعیین دایره‌ای که قطبی نقطه مفروض A نسبت به آن خط مفروض BC باشد، لازم و کافی است که عمود AA' رسم شده از A بر BC، دایره را در قطر قطع کند و این قطر به وسیله تقسیم توافقی شود، و اگر omega وسط AA'، و D و D' دو سر قطر مزبور فرض شوند،

باید $\omega A'^2 = \omega D \times \omega D'$ و برای این که این رابطه محقق باشد، لازم و کافی است دایره به قطر DD' متعلق به دستگاه دایره‌ای به قاعده AA' باشد که نقطه اصلی آن، omega، به قوت $\omega A'^2$ است (شکل).

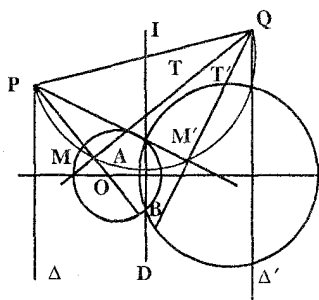


۱۴۱. A و B نسبت به دایره (O) مزدوجند. B روی قطبی A نسبت به دایره واقع است. فرض کنیم محل برخورد OA با قطبی A نسبت به دایره بوده و C و C' فصل مشترک دایره با OA باشند. دایره به قطر AB از A و A' می‌گذرد و CC' را به توافق تقسیم می‌کند؛ پس این دایره بر دایره (O) عمود است. بعکس

فرض کنیم AB قطری از یک دایره عمود بر دایره (O) باشد. اگر A' محل دیگر برخورد OA با دایره اول و CC' قطری از دایره (O) گذرنده بر A باشد، A و A' نسبت به CC' مزدوج توافقی می‌باشند و بعلاوه $\hat{BA'A} = 1^d$ ؛ پس BA' قطبی A و در نتیجه A و B نسبت به دایره (O) مزدوجند (شکل).

۱۴۲. بله، و این در صورتی است که دو دایره مساوی باشند.

۱۴۳. اگر P نقطه دلخواهی از Δ و خطهای T و T' قطبیه‌ای آن نسبت به دایره‌های (O) و



(O') باشد که در نقطه Q متقاطعند، چنانچه P بر Δ تغییر نماید، T و T'، و در نتیجه Q تغییر نموده، لیکن پیوسته $\hat{M}' = \hat{M} = 90^\circ$ بوده و دایره به قطر PQ، اولاً از M و M' گذشته، ثانیاً این دایره بر دایره‌های (O) و (O') عمود است؛ زیرا پای قطبی مزدوج قطب انعکاس است، نسبت به دو سر

قطری از دایره که از قطب انعکاس گذشته باشد، و از طرف دیگر می‌دانیم که دایره‌هایی که بر دو دایره مفروض عمود باشد، مرکزش بر محور اصلی دو دایره واقع است. و از آنجا مرکز دایره به قطر PQ بر خط D محور اصلی دو دایره واقع بوده و از آنجا نقطه Q قرینه P نسبت به I، مرکز دایره عمود بر دایره‌های (O) و (O') می‌باشد و چون I بر محور اصلی واقع است، می‌توان گفت Q قرینه P نسبت به یکی از نقطه‌های محور اصلی دو دایره است، پس مکان Q خط Δ' قرینه Δ نسبت به محور اصلی دو دایره می‌باشد.

۱۰.۵.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱.۱۴۴. چون چهار نقطه تقسیم توافقی (ABCD) بر یک استقامت می‌باشند، قطبهای آنها هم‌رسند و نقطه هم‌رسی آنها خط واصل بین آن چهار نقطه است. اگر نقطه M قطب خط AD باشد، قطبهای A، B، C و D از M گذشته و بر خط واصل بین آن نقطه‌ها و مرکز دایره عمودند. و چون دستگاه (O.ABCD) توافقی است، دستگاه (M.xyzt) که شعاعهایش نظیر به نظیر بر شعاعهای دستگاه توافقی (O.ABCD) عمود است، توافقی خواهد بود.

۲. اگر دستگاه (M.xyzt) توافقی باشد، قطبهای شعاعهای این دستگاه بر خطی راست واقع است که این قطبی نقطه هم‌رسی آنها می‌باشد. پس اگر A، B، C و D بترتیب قطبهای شعاعهای Mx، My، Mz و Mt باشند، این خطها بترتیب بر OA، OB، OC و OD عمود بوده و چون دستگاه (M.xyzt) توافقی است، پس دستگاه (O.ABCD) که شعاعهایش بر شعاعهای دستگاه اول عمود است، توافقی می‌باشد، و از آنجا نقطه‌های (ABCD) تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند.

۱۴۵. محل برخورد AB و Bx را Q می‌نامیم (Bx مماس در B بر دایره است). M' وسط

$A'C'$ خواهد بود؛ یعنی M باید روی قطبی Q نسبت به دایرة C باشد، یعنی M روی خط TB است. T محل برخورد تماس وارد از Q بر C است، ثانیاً خط AC بر نقطه Q ، قطب BM نسبت به دایره، می‌گذرد. همچنین MC بر P که قطب AC نسبت به دایره است می‌گذرد؛ پس از نقطه‌های P, M, Q و B می‌گذرد.

۱۴۶. ۱. مکان E و F قطبی A نسبت به دایرة (O) است.

۲. دایرة AMN خط OA را در نقطه ثابت B قطع می‌کند، زیرا داریم:

$$OM \cdot ON = OA \cdot OB = \text{ثابت}$$

۳. وتر $M'N'$ خط OA را در نقطه ثابت C قطع می‌کند، زیرا اگر D محل برخورد EF با

OA باشد، دستگاه $(F, OCAD)$ توافقی است و نقطه C مزدوج توافقی O نسبت به A و D می‌باشد.

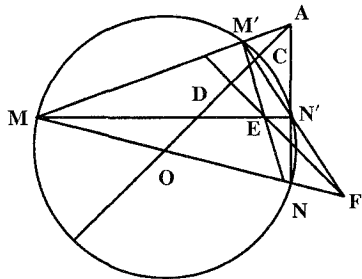
۱۴۷. ۱. وقتی BC به موازات خود تغییر کند، نقطه H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC بر خطی مستقیم مانند D ، گذرنده بر A و عمود بر BC تغییر می‌نماید. و چون قطبیهایی کلیه نقطه‌های واقع بر یک خط هم‌رس بوده و از قطب آن خط می‌گذرند، پس قطبیهایی نقطه H ، محل برخورد ارتفاعهای مثلث از نقطه P ، قطب خط D می‌گذرند.

۲. چون قطب هر خط بر خطی واقع است که از مرکز دایره بر آن خط عمود می‌شود، پس وقتی A بر دایرة (O) تغییر می‌نماید، D به موازات خود و یا عمود بر BC تغییر نموده و نقطه P قطب آن، بر خطی که از (O) بر D عمود یا موازی BC رسم می‌شود، تغییر می‌نماید. یا به عبارت دیگر مکان P خطی است مستقیم که از (O) ، مرکز دایره، موازی BC رسم می‌شود.

۱۴۸. ۱. چون M و M' نسبت به O توافقی یکدیگرند، پس دایرة به قطر $M'M$ بر دایرة O عمود است، و چون بر A می‌گذرد، پس بر F می‌گذرد و F پای قطبی A نسبت به O است؛ پس MM' تحت زاویه قائمه از نقطه ثابت F دیده می‌شود.

۲. فرض می‌کنیم H, H' و K تصویر F روی D, D', MM' و F روی دایرة محیطی مثلث AMM' خواهد بود. نقطه‌های H, H' و K روی خط سیمسون از F دیده می‌شوند؛ پس پوش MM' سهمی به کانون F و خط HH' بر رأس آن مماس است.

۱۴۹. ۱. زاویه‌های $\hat{OAM}$ و $\hat{ODM}$ هریک 90° می‌باشند، پس مکان M خطی است که از



D بر OD عمود شود.

۲. اگر D' پای قطبی D نسبت به دایره (O) باشد، MP قطبی D' خواهد بود و چون همواره AB قطبی M است، پس AB همواره از نقطه D' می‌گذرد و حول این نقطه حرکت می‌کند.

۱۵۰. ۱. مثلث قائم الزاویه OIT طوری است که $IT = \frac{IO}{۲}$ و یکی از زاویه‌های آن ۶۰° است (زاویه I). پس:

$$OJ = OT \sin \frac{\pi}{۳} = OI \sin \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow \frac{OJ}{IO} = \sin ۲ \frac{\pi}{۳} = \frac{۳}{۴}$$

۲. (a) نقطه‌های O و A نسبت به دایره (C) مزدوجند، و دایره به قطر OA بر دایره (O) عمود است.

(b) دایره به قطر OA پیوسته از J می‌گذرد ($\hat{OJA} = \frac{\pi}{۲}$) و چون $\frac{OJ}{OI} = \frac{۳}{۴}$ ، بنابراین I یک دایره متجانس دایره به قطر OA در تجانس ($O, \frac{۴}{۳}$) را طی می‌کند (شکل (الف)).
بنابراین مکان I دایره‌ای است به قطر OE که در آن E با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{OE} = \frac{۴}{۳} \vec{OA}$$

(c) چون $I\hat{O}T = \frac{\pi}{۶}$ و $OT = OI \cos \frac{\pi}{۶} = OI \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ، از I به T با یک همسانی $(O, \frac{\pi}{۶}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ می‌رسیم.

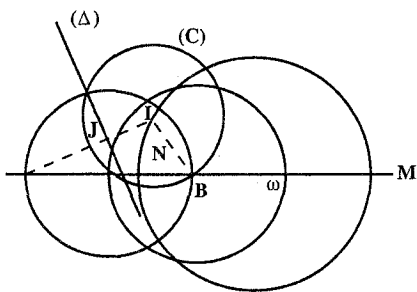
و مکان T از مکان I با این تبدیل نتیجه می‌شود؛ یعنی آن دایره‌ای است به قطر OF که در آن OF به وسیله رابطه‌های زیر داده می‌شود:

$$(\vec{OA}, \vec{OF}) = \frac{\pi}{۶}, \quad OF = OE \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

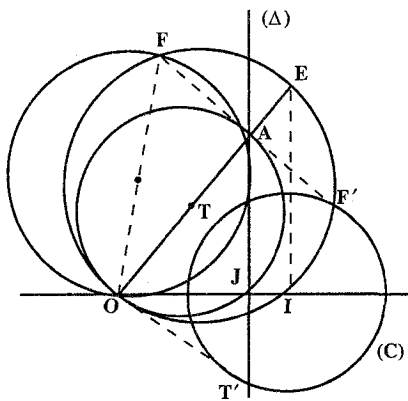
(نقطه F از برخورد مماس در A بر مکان J و دایره به قطر OE به دست می‌آید). مکان

نقطه T' از مکان I، به واسطه همسانی $(O, -\frac{\pi}{۶}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ نتیجه می‌شود؛ یعنی دایره به

قطر OF' که در آن F' قرینه F است، نسبت به OA (دایره در شکل رسم نشده).



(u)



(الف)

۳. $\frac{IB}{IO} = \frac{1}{2}$ (a)، بنابراین I مکان نقطه‌هایی را طی می‌کند که نسبت فاصله‌های آنها از دو

نقطه O و B مساوی ۲ است (شکل (ب))؛ یعنی دایره به قطر MN به طوری که

$$\frac{MO}{MB} = -\frac{NO}{NB} = \gamma$$

مرکزش ω به واسطه رابطه

$$O_{\omega} = \frac{OM + ON}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}(\gamma OB + \frac{\gamma}{\gamma} OB) = \frac{\gamma}{\gamma} OB$$

و شعاعش از رابطه :

$$\rho = \frac{OM - ON}{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} OB$$

به دست می آید. مکان J از قبل در تجانس $(0, \frac{3}{4})$ به دست می آید؛ پس مکان J، دایره

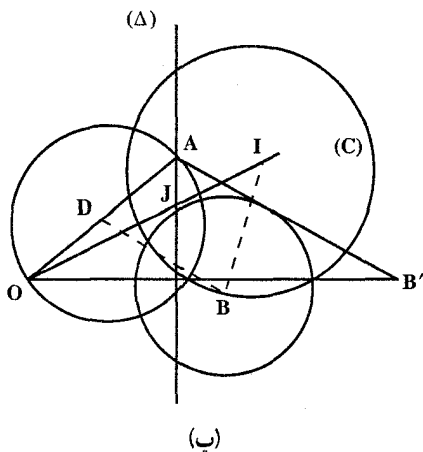
به مرکز B و به شعاع $\frac{OB}{2}$ می باشد.

(b) (Δ) پوشش یک هذلولی است - (H) - است به کانون O و دایره اصلی مکان J .

۴. دایره مفروض است، اگر ما نقطه J را بدانیم. ما دو مکان از این نقطه را داریم:

(a) دایره به مرکز B و به شعاع $\frac{OB}{2}$.

(b) دایره به قطر OA.



مسأله ممکن است، اگر دو دایره دارای نقطه‌های مشترک یا اگر:

$$\left| OD - \frac{OB}{2} \right| \leq DB \leq OD + \frac{OB}{2} ;$$

$$\left| \frac{OA}{\gamma} - \frac{OB}{\gamma} \right| \leq DB < \frac{OA}{\gamma} + \frac{OB}{\gamma} \quad : \text{یا}$$

برای نمایش هندسی این نامساوی، B' را قرینه O نسبت به B اختیار می‌کنیم:

$$AB' = 2DB$$

و می توانیم بنویسیم :

$$|OA - OB| \leq AB' \leq OA + OB \quad : \text{b.}$$

و نامساویهای زیر نتیجه می شود:

$$OB \leq OA + AB'$$

$$AO - AB' \leq OB \Rightarrow AB' - AO \leq OB$$

$OA + AB' \geq OB'$ در مثلث OAB' داریم :

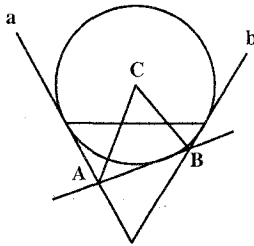
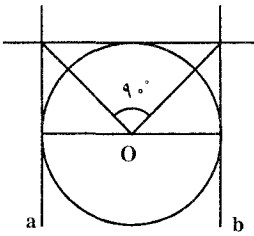
چون $OB' = 2OB$ ، نامساوی اول همواره برقرار است. دوتای دیگر را می‌توان به صورت $|AO - AB'| \leq OB$ نوشت. این نامساوی بیان می‌کند که نقطه A نایستی داخل هذلولی به کانون O و B' و محور قاطع OB ، یعنی هذلولی پوش (Δ) قرار گیرد (شکل (ب)).

پس: اگر A خارج هذلولی باشد، دو جواب وجود دارد. و اگر A روی هذلولی باشد، یک جواب وجود دارد.

۱۵۱. خط b_1 قطبی نقطه B_1 نسبت به دایره α است، و غیره. نقطه C_1 قطب خط B_1B_2 .

نسبت به دایره β است، و غیره.

۱۵۲. الف. یک تبدیل قطب و قطبی سه نقطه A ، B و C را به سه خط a ، b و c تبدیل می کند که چون AB قطر دایره است، a و b موازی اند و پاره خطی که از c ، که بین a و b محصور است، از O به زاویه قائمه دیده می شود.

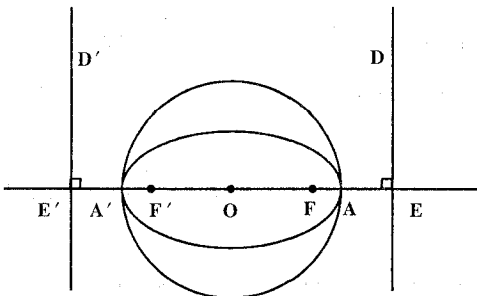


ب. قطعه مماسی که به وسیله دو مماس ثابت a و b از یک مماس متغیر سوم بر دایره جدا می شود، از مرکز دایره به زاویه ثابتی دیده می شود.

۶.۱. قطب و قطبی در مقطعهای مخروطی و شکلهای دیگر

۱.۶.۱. قطب خط، قطبی نقطه

۱۵۵. بیضی به کانونهای F و F' و قطر بزرگ $AA' = 2a$ را در نظر می گیریم و دایره اصلی آن، یعنی دایره به قطر AA' را رسم می کنیم. مزدوج توافقی کانون F نسبت به دو رأس A و A' را به دست می آوریم و E می نامیم. در این نقطه، خط D را بر AA' عمود می کنیم. این خط که خط هادی وابسته به کانون F نامیده می شود، قطبی کانون F نسبت به دایره اصلی بیضی است. به طور مشابه قطبی کانون F' نسبت به دایره اصلی بیضی، خط هادی بیضی وابسته به کانون F' است.



۲.۶.۱. نقطه‌های: همخط، همدایره، همصفحه، ...

۱.۲.۶.۱. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۱۵۶. این نقطه‌ها در صفحه قطبی نقطه A نسبت به کره (O) قرار دارند.

۳.۶.۱. خطهای یا صفحه‌های: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۶.۱. صفحه‌ها بر یک خط می‌گذرند

۱۵۷. دستگاه کره‌های تعریف شده با صفحه

اصلی π و کره (O) را در نظر

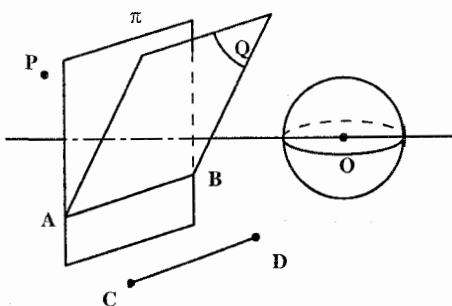
می‌گیریم. فرض می‌کنیم صفحه Q

صفحه اصلی نقطه P و کره (O)

باشد. اگر Q_1 صفحه اصلی کره متغیر

(O_1) متعلق به دستگاه کره‌ها و نقطه

P باشد؛ Q و Q_1 روی صفحه اصلی



(O_1)، یعنی صفحه π متقاطع می‌شوند. فرض می‌کنیم AB فصل مشترک باشد.

در این صورت صفحه π قطبی P نسبت به (O_1) از خط CD که متناظرش AB در

تجانس به مرکز P و با نسبت تجانس ۲ می‌باشد، خواهد گذشت.

۴.۶.۱. زاویه

۱.۴.۶.۱. اندازه زاویه

۱۵۸. همان گونه که از شکل صورت مسأله برمی‌آید، مجانب u که قطبی نقطه U است بر ضلع

OU از مثلث قائم‌الزاویه OAU عمود است. بنابراین زاویه $\hat{A} = \theta$ از این مثلث در

رابطه روبه‌رو صدق می‌کند:

$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{OA}{AU} = \frac{OA}{r} = \varepsilon$$

برای هذلولی متساوی‌القطرین $\theta = 45^\circ$ و $\varepsilon = \sqrt{2}$ می‌باشد.

۵.۶.۱. پاره خط

۱.۵.۶.۱. اندازه پاره خط

۱۵۹. با استفاده از این ویژگی که در هر منحنی مقطع مخروطی، خط هادی نظیر یک کانون، قطبی آن کانون نسبت به منحنی می باشد، مسأله را حل کنید.

۶.۶.۱. رابطه های متری

۱۶۰. داریم:

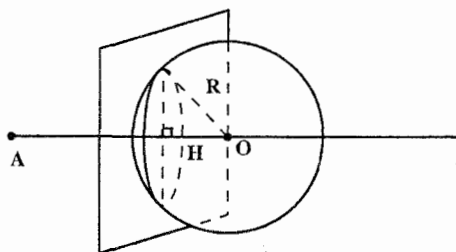
$$OP + O_1P = \varepsilon_1 PK + \varepsilon_1 K_1P = \varepsilon_1 K_1K$$

که K_1K فاصله دو خط هادی است.

۷.۶.۱. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۱۶۱. در صورتی که آن منحنی، مکان هندسی قطبهای مماسهای بر (α) و یابوش قطبیهای نقطه های واقع بر α باشند.

۸.۶.۱. رسم شکلها



۱۶۲. فرض می کنیم مسأله حل شده و کره

(O) جواب مسأله باشد. مرکز این

کره روی خطی است که از نقطه A

بر صفحه P عمود می شود. پای این

عمود را نقطه H می نامیم. در

این صورت داریم:

$$OH.OA = R^2 \quad (۱)$$

$$OA - OH = AH = \text{مقدار معلوم} \quad (۲)$$

از رابطه های (۱) و (۲)، دو پاره خط OA و OH مشخص می شوند. بنابراین نقطه O

مشخص می گردد و کره را می توان رسم کرد.

۹.۶.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۶۳. خط بینهایت l قطبی نقطه O مرکز دایره ω است، پس هر نقطه از مقطع مخروطی که در بینهایت باشد، قطب (نسبت به دایره ω) یک مماس بر دایره α است که از O می‌گذرد. بنابراین بر حسب آن که O داخل α ، روی α یا خارج α باشد، تعداد نقطه‌های بینهایت مقطع 0 ، 1 یا 2 می‌باشد.

۱۶۴. خط هادی سهمی قطبی نقطه A است و هر نقطه از این خط قطب قطری از دایره α است و مماسهایی که از این نقطه بر سهمی رسم شوند، قطبهای دوسر قطر نظیر می‌باشند. هر دو نقطه دوسر هر قطر از دایره α بر دو ضلع یک زاویه قائمه به رأس O واقعند. بنابراین قطبهای آنها برهم عمودند.

۱۰.۶.۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۶۵. دایره اصلی بیضی دایره‌ای به مرکز O (مرکز بیضی) و به شعاع a ، و دایره فرعی بیضی، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع b است. با توجه به این مطلب داریم:

الف. مزدوج توافقی نقطه F نسبت به دو رأس A و A' از بیضی را به دست می‌آوریم و E می‌نامیم. خط D که در نقطه E بر AA' عمود می‌شود، قطبی نقطه F نسبت به دایره اصلی بیضی است. فاصله این خط از نقطه F برابر است با $FE = \frac{b^2}{c}$ ، زیرا داریم:

$$OF \cdot OE = OA^2 = OA'^2 \Rightarrow c \cdot OE = \frac{a^2}{c} \Rightarrow FE = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

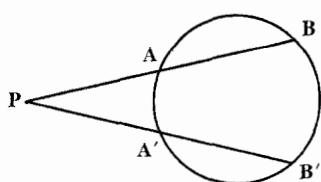
ب. مزدوج توافقی نقطه F نسبت به دو نقطه N و N' دو سر قطر دایره به مرکز O و به شعاع b (دایره فرعی بیضی) را E_1 می‌نامیم. خط D_1 که در E_1 بر NN' عمود شود، قطبی نقطه F نسبت به دایره فرعی بیضی است. برای این خط داریم:

$$OF \cdot OE_1 = b^2 \Rightarrow OE_1 = \frac{b^2}{c}$$

پ. با توجه به این که دو خط D و D' هر دو بر AA' یا NN' عمودند، باهم موازی می‌باشند.

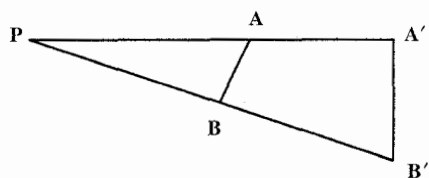
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲. انعکاس

۱.۲. تعریف و قضیه



۱۶۶. هرگاه A' (شکل) منعکس A و B' منعکس B با یک قوت انعکاس و قطب P باشد، چون داریم $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$ ، دایره‌ای که بر A, A' و B, B' بگذرد، بر B' هم خواهد گذشت (به چه دلیل؟)

نکته. اگر خط AB از قطب انعکاس بگذرد، نقطه‌های A' و B' هم روی خط AB واقع می‌شوند، یعنی دو نقطه A و B و نقطه‌های منعکشان هم‌خطند.



۱۶۷. اگر A' و B' بترتیب منعکسهای A و B باشند (شکل)، چون چهارضلعی $AA'B'B$ محاطی است، دو مثلث PAB و $PA'B'$ متشابه‌اند (چرا؟)،

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{PA'}{PB}$$

پس:

حال اگر صورت و مخرج طرف دوم این تساوی را در PA ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{PA \cdot PA'}{PA \cdot PB} = \frac{|a|}{PA \cdot PB}$$

$$A'B' = \frac{|a| \cdot AB}{PA \cdot PB}$$

و از آن‌جا حاصل می‌شود:

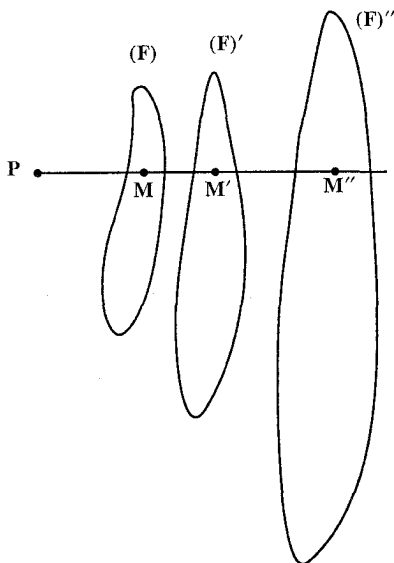
۱۶۸. فرض می‌کنیم که M نقطه‌ای غیر مشخص از شکل (F) و M' منعکس آن در انعکاسی با قوت a و M'' منعکس دیگر آن در انعکاسی به همان قطب P و با قوت a' باشد (شکل) بنا به تعریف:

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = a \quad (۱)$$

$$\overline{PM} \cdot \overline{PM''} = a' \quad (۲)$$

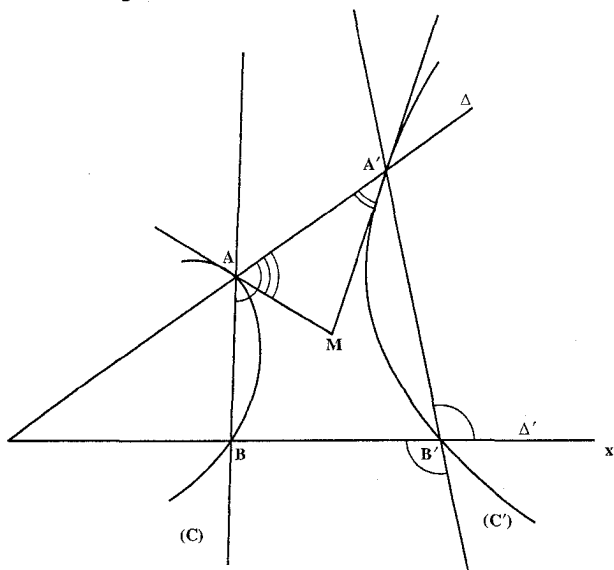
چون این دو رابطه را عضو به عضو بر هم تقسیم کنیم، خواهیم داشت: $\frac{\overline{PM'}}{\overline{PM''}} = \frac{a}{a'}$ ؛

یعنی M' مجانس M'' ، نسبت به مرکز تجانس P ، با نسبت تجانس $\frac{a}{a'}$ می‌باشد؛ یا



M'' مجانس M' ، نسبت به همان مرکز، با نسبت تجانس $\frac{a'}{a}$ می باشد و چون نظیر این رابطه ها برای تمام نقطه های دو شکل F' و F'' برقرار است، دو شکل مذکور با آن نسبتها مجانس یکدیگرند.

۱۶۹. فرض می کنیم که C' منعکس C باشد (شکل)؛ دو قاطع Δ و Δ' که بر قطب انعکاس می گذرند، C و C' را بترتیب در A و A' و در B و B' قطع می کنند. AB و $A'B'$



را وصل می کنیم و امتداد می دهیم. چون چهار نقطه A, A', B و B' بر روی یک دایره اند، $\hat{BAA'} = \hat{A'B'x}$ ، یعنی یک زاویه بین AB و خط Δ مساوی است با یک زاویه بین $A'B'$ و خط Δ' . حال اگر خط Δ' را در حول P دوران داده بتدریج به Δ نزدیک کنیم، تساوی دو زاویه مذکور همواره محفوظ است؛ اما اگر B ، ضمن تغییر مکان بر منحنی C ، آن قدر به A نزدیک شود که با آن مشتبه گردد، یعنی قاطع AB در حول A آن قدر بچرخد که B بر A منطبق شود، قاطع AB در آن وضع، به مماس بر منحنی C در نقطه A تبدیل می شود و در همان حال، B' که روی منحنی C' تغییر مکان می دهد، بر A' منطبق و قاطع $A'B'$ نیز به مماس بر C' در نقطه A' تبدیل خواهد شد و Δ' هم بر Δ منطبق می شود و زاویه های BAA' و $A'B'x$ که همواره با هم مساوی بودند، به زاویه های بین Δ و مماسهای بر دو منحنی در A و A' تبدیل می شوند؛ بنابراین: $\hat{MAA'} = \hat{MA'A}$.

با توجه به این که جهت این دو زاویه مختلف است، قضیه بالا را می توان چنین بیان کرد: مماسهای بر دو منحنی منعکس در دو نقطه منعکس A و A' ، نسبت به عمود منصف AA' ، قرینه یکدیگرند. از این جا می توان دریافت که اگر در A تقعر منحنی C به طرف قطب باشد، در A' تحدب C' به طرف قطب است و بعکس.

۱۷۰. منحنیهای (C) و (γ) و منعکسهایشان (C') و (γ') را در نظر می گیریم (شکل): A یکی از نقطه های برخورد دو منحنی، A' منعکس A و Ax مماس بر (γ) ، Ay مماس بر (C) ، $A'x'$ مماس بر (γ') و $A'y'$ مماس بر (C') فرض می شود؛ می دانیم که:

$$\hat{xAA'} = \hat{x'A'A}$$

$$\hat{yAA'} = \hat{y'A'A}$$

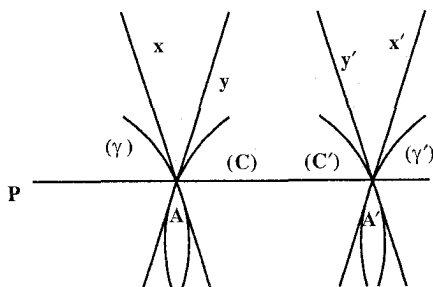
و

از تفریق این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\hat{xAA'} - \hat{yAA'} = \hat{x'A'A} - \hat{y'A'A}$$

$$\hat{xAy} = \hat{x'A'y'}$$

یعنی:



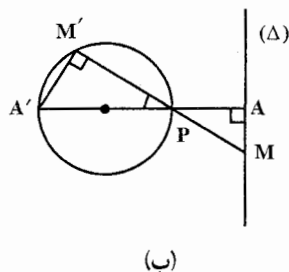
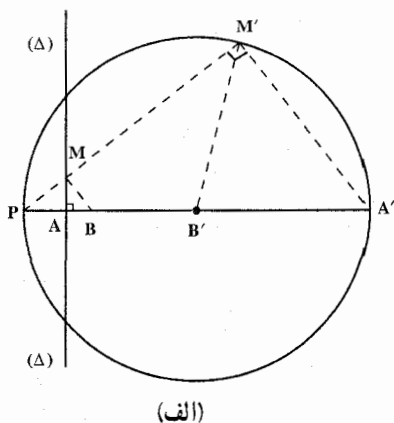
۱۷۱. زیرا که اگر خط Δ (شکل) بر قطب P بگذرد، منعکس هر نقطه A از آن، بر روی امتداد PA یعنی بر روی همان خط است.



۱۷۲. فرض کنید A پای عمودی باشد که از P بر خط مفروض Δ رسم می‌شود؛ فرض کنید M نقطه دلخواهی از Δ باشد و A' و M' منعکس A و M باشند (شکل الف). خطهای AM و AM' نسبت به خطهای PAA' و PMM' پادموازی‌اند؛ پس $\hat{A'M'M} = \hat{M'AP} = 90^\circ$ و مکان هندسی M' دایره (PA') است که PA' قطری از آن است.

راه دیگر. فرض کنید B متقارن P نسبت به Δ و B' منعکس B باشد (شکل الف). چهار نقطه B, B', M, M' همدایره‌اند، پس دو مثلث PBM و $PB'M'$ متشابه‌اند و چون PMB متساوی‌الساقین است، داریم $B'M' = B'P$ ؛ پس نقطه متغیر M' از نقطه ثابت B' فاصله ثابتی برابر $B'P$ دارد و قضیه ثابت می‌شود. چند نکته. ۱. دو اثبات ارائه شده دو راه برای ترسیم دایره منعکس یک خط، ارائه می‌کنند.

۲. در شکل (الف) هر دو نقطه متناظر یک طرف مرکز انعکاس O قرار دارند، که نشان می‌دهد ثابت انعکاس k مثبت و دایره انعکاس (P) حقیقی است. ولی اثباتهای ارائه شده به ازای k منفی نیز معتبرند (شکل ب).



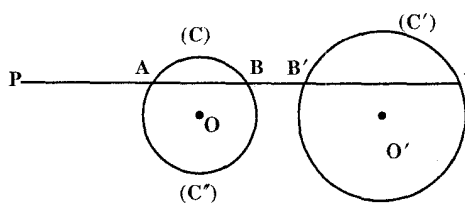
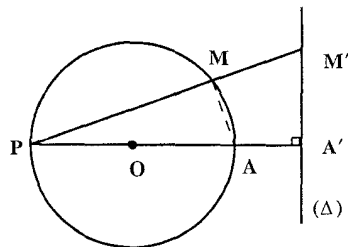
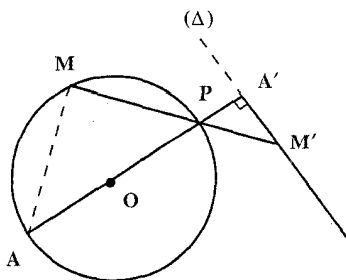
۳. اگر دایره انعکاس حقیقی باشد، خط مفروض محور اصلی این دایره و دایره منعکس این خط در واقع داریم (شکل الف):

$$\overline{AP} \cdot \overline{AA'} = \overline{AP}(\overline{AP} + \overline{PA'}) = \overline{AP}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PA'} = \overline{AP}^2 - \overline{PA} \cdot \overline{PA'}$$

$\overline{AP} \cdot \overline{AA'}$ قوت A نسبت به دایرة (PA') و $\overline{PA} \cdot \overline{PA'}$ قوت A نسبت به دایرة انعکاس (P) است، زیرا $\overline{PA} \cdot \overline{PA'}$ با مربع شعاع (P) برابر است؛ پس گزاره بیان شده ثابت می شود.

۴. داریم: $k = PB \cdot PB' = 2PA \cdot PB'$ پس شعاع PB' از دایرة انعکاس (PA') برابر $(k:2PA)$ است.

۱۷۳. دایرة O را که بر قطب انعکاس P می گذرد، در نظر می گیریم و A' منعکس A، انتهای قطر گذرنده بر P، را به دست می آوریم (شکل)؛ حال اگر M' منعکس یک نقطه غیر مشخص M از دایره باشد، چهار نقطه A، A' ، M و M' بر محیط یک دایره واقعند و $M'A'A$ که مکمل یا مساوی زاویه قائمه AMM' است، برابر 90° است؛ پس $M'A'$ بر PA' عمود است؛ یعنی منعکس هر نقطه از دایره روی خطی است که از A' بر PA عمود شده باشد.



۱۷۴. فرض می کنیم که شکل

(C') منعکس دایرة (C) نسبت

به قطب P با قوت a باشد

(شکل)؛ هرگاه قوت نقطه P را

نسبت به دایرة (C) مساوی P

فرض کنیم، منعکس این دایره با قطب P و قوت P بر خود آن خواهد بود؛ زیرا که منعکس هر نقطه دایره بر روی همان دایره است؛ این منعکس را (C'') می نامیم؛ حالا برای دایرة (C) نسبت به قطب P دو منعکس به دست آورده ایم، یکی با قوت a که شکل (C') است و دیگری با قوت r که دایرة (C'') است و به طوری که می دانیم این دو منعکس، مجانس یکدیگرند؛ پس شکل (C') مجانس دایرة (C'') است با نسبت

تجانس $\frac{a}{r}$ ، یعنی دایره‌ای است که فاصله مرکز آن O' ، از نقطه P ، مساوی $OP \times \frac{a}{r}$ و شعاعش مساوی با حاصلضرب شعاع دایره (C) در $\frac{a}{r}$ می‌باشد. به این ترتیب: منعکس دایره‌ای که بر قطب انعکاس نگذرد، مجانس آن هم هست و قطب انعکاس و مرکز تجانس بر یکدیگر منطبقند.

چند نکته. ۱. مرکز انعکاس یک مرکز تشابه دایره مفروض و دایره منعکس آن است. ۲. دو نقطه منعکس A و A' دو نقطه پاد همشکل در دو دایره منعکس هستند. نقطه A' دایره (O') را در جهتی خلاف جهت حرکت نقطه A بر روی دایره (O) ، می‌پیماید. ۳. اگر R و R' شعاع دایره‌های (O) و (O') باشند، داریم (شکل):

$$R':R = \overline{PA'}:\overline{PB} = \overline{PA}:\overline{PA'} = \overline{PA}:\overline{PB} = k:r$$

$$R' = R(k:r)$$

پس،

۴. اگر ثابت انعکاس با قوت مرکز انعکاس نسبت به دایره مفروض برابر باشد، منعکس دایره، خود آن دایره خواهد بود، زیرا در این صورت A' بر B منطبق است. وقتی ثابت انعکاس مثبت و در نتیجه دایره انعکاس حقیقی است، نتیجه به دست آمده را می‌توان این طور بیان کرد: دایره‌ای متعامد با دایره انعکاس، بر خودش منعکس می‌شود.

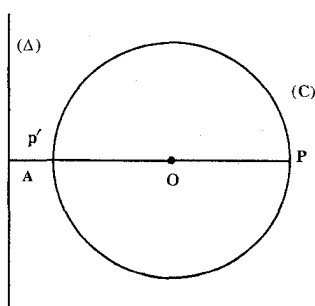
۱۷۵. می‌دانیم که خط و دایره نسبت به یکدیگر، ممکن است سه وضع داشته باشند:

اول. خط خارج دایره باشد.

دوم. خط دایره را قطع کند.

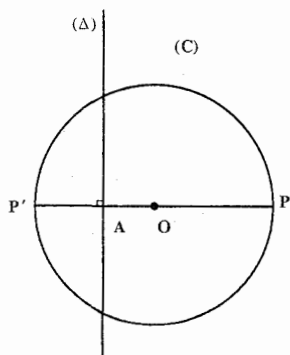
سوم. خط بر دایره مماس باشد.

اینک قضیه را در هر سه حالت ثابت می‌کنیم.



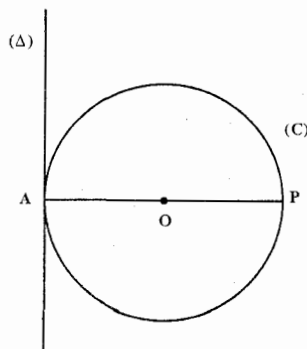
اول. خط Δ خارج دایره است (شکل). از مرکز دایره خطی بر Δ عمود می‌کنیم تا آن را در A و دایره را در P و P' قطع کند؛ حال اگر P را قطب انعکاس اختیار کنیم، به سهولت معلوم می‌شود که خط Δ منعکس مثبت دایره (C) و (C) منعکس مثبت Δ است با قوت $\overline{PA} \times \overline{PP'}$ ؛ و اگر P' را قطب انعکاس اختیار کنیم، Δ منعکس منفی (C)

و (C) منعکس منفی Δ است با قوت $\overline{P'A} \times \overline{P'P}$ ؛ پس Δ و (C) به دو طریق مثبت و منفی منعکس یکدیگرند.



دوم. خط دایره را قطع می کند (شکل). باز از مرکز دایره عمودی بر Δ رسم می کنیم تا خط و دایره را در A، P و P' قطع کند؛ اگر P را قطب انعکاس فرض کنیم، به آسانی دیده می شود که (C) منعکس Δ و Δ منعکس (C) است با قوت $\overline{PA} \times \overline{PP'}$ ؛ و اگر P' را قطب اختیار کنیم، خط منعکس دایره و دایره منعکس خط است با قوت $\overline{P'A} \times \overline{P'P}$ ؛ پس خط و دایره با دو قوت، منعکس مثبت یکدیگرند.

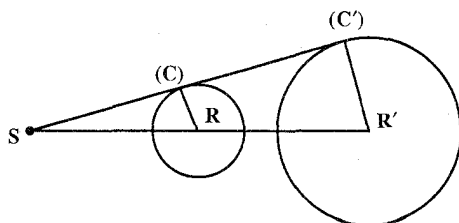
سوم. خط با دایره مماس است (شکل). عمودی که از O بر خط Δ رسم شود، بر نقطه تماس A می گذرد؛ در این حال فقط می توان P را قطب انعکاس اختیار کرد و Δ و (C) را با آن قطب و قوت PA^2 منعکس مثبت یکدیگر دانست. A را نمی توان قطب انعکاس گرفت، زیرا که قوت انعکاس صفر می شود.



۱۷۶. در حقیقت، دو دایره به هر وضع که در صفحه قرار داشته باشند، مجانس مستقیم و مجانس معکوس یکدیگرند. حال اگر S یکی از مرکزهای تجانس دو دایره باشد (شکل) و خط المרכזین، دو دایره را در A، B، A' و B' قطع کند و خط غیرمشخص دیگری که بر S می گذرد، دایره ها را در N، M، N' و M' تلاقی کند، برای اثبات قضیه کافی است، ثابت کنیم که M و M' با قوت $SA \times SA'$ منعکس یکدیگرند؛ می دانیم که AM مجانس $B'N'$ و موازی با آن است؛ پس $\hat{AMN} = \hat{BN'M'}$ ؛ اما چون $\hat{B'N'M'}$ مکمل $\hat{M'A'B'}$ است، بنابراین $\hat{M'A'A}$ و $\hat{M'MA}$ مکمل یکدیگرند و چهار نقطه A، M، A' و M' روی یک دایره واقعند و $SM \cdot SM' = SA \cdot SA'$ ، یعنی M' منعکس M است با قوت $SA \times SA'$.

نکته. وقتی که دو دایره بر هم مماس باشند، نقطه تماس، مرکز تجانس آنها هست، اما قطب انعکاس آنها نیست؛ زیرا که در این صورت قوت انعکاس صفر می شود.

۱۷۷. هرگاه S مرکز تجانس و قطب انعکاس دایره های (C) و (C') باشد (شکل) و قوت انعکاس (C) و (C') را a و قوت نقطه S نسبت به (C) را P و نسبت به (C') را P' و



فرض کنیم، از طرفی می دانیم که نسبت تجانس (C') به (C) برابر $\frac{a}{P}$ و نسبت تجانس

(C) و (C') برابر $\frac{a}{P'}$ می باشد و از طرف دیگر، نسبت تجانس (C') به (C) برابر $\frac{R'}{R}$

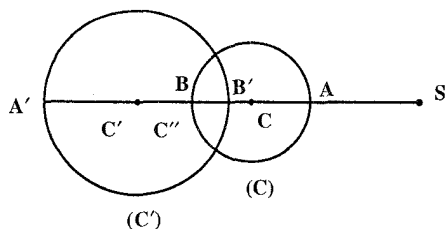
و نسبت تجانس (C) به (C') برابر $\frac{R}{R'}$ می باشد؛ پس

$$\frac{R}{R'} = \frac{a}{P'} \quad (۲) \quad \text{و} \quad \frac{R'}{R} = \frac{a}{P} \quad (۱)$$

حال اگر رابطه های ۱ و ۲ را عضو به عضو در هم ضرب کنیم، نتیجه می شود:

$$\frac{a}{P'} \times \frac{a}{P} = \frac{R}{R'} \times \frac{R'}{R} = ۱$$

و از آن جا: $a = \sqrt{PP'}$



۱۷۸. در انعکاس مفروض با قطب S و قوت

k ، منعکس دایره (C) را که بر مرکز

انعکاس نگذشته است، دایره (C')

می گیریم (شکل)؛ چنانچه

خط المرکزین دو دایره، محیط دایره

(C) را در A و B و محیط دایره (C') را در A' و B' قطع کند (A' منعکس A و B' منعکس B است) و نقطه C'' منعکس مرکز دایره (C) در این انعکاس باشد، داریم:

(۱) $SC \cdot SC'' = k$ و (۲) $\overline{SA} \cdot \overline{SA'} = k$ و (۳) $\overline{SB} \cdot \overline{SB'} = k$

چون (۴) $\overline{SC} = \overline{SA} + \overline{SB}$ است (زیرا بر طبق رابطه شال می توان نوشت:

$$\overline{SC} = \overline{SA} + \overline{AC} \quad \text{و} \quad \overline{SC} = \overline{SB} + \overline{BC} \quad \text{و نیز} \quad \overline{AC} + \overline{BC} = ۰).$$

پس با استفاده از رابطه های ۱، ۲ و ۳، رابطه ۴ چنین می شود:

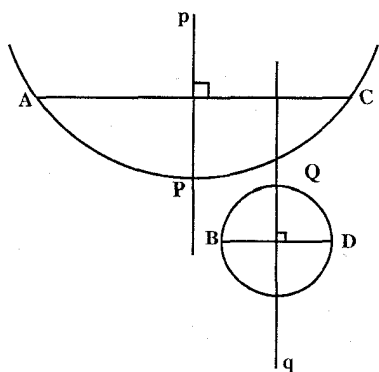
$$\frac{۲k}{\overline{SC''}} = \frac{k}{\overline{SA'}} + \frac{k}{\overline{SB'}}$$

$$\frac{۲}{\overline{SC''}} = \frac{۱}{\overline{SA'}} + \frac{۱}{\overline{SB'}}$$

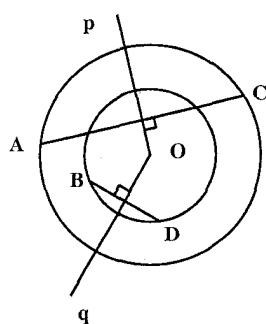
و یا

و این رابطه نشان می‌دهد که C'' مزدوج توافقی S است نسبت به دو نقطه A' و B' و قضیه ثابت است.

۱۷۹. عمود منصف پاره خط AC را با p و عمود منصف پاره خط BD را با q نشان می‌دهیم. p و q نمی‌توانند بر هم منطبق باشند، بنابراین یا در یک نقطه O متقاطعند و یا با هم موازی‌اند، اگر p و q در O متقاطع باشند، مطابق با شکل (الف) دایره‌های به مرکز O و به شعاعهای OA و OB متداخلند و اولی بر A و C و دومی بر B و D می‌گذرد. اگر p با q موازی باشد، در این صورت AC نیز با BD موازی است، مطابق با شکل (ب). نقطه‌های p و Q بترتیب بر p و q و به یک فاصله از خطهای موازی AC و BD وجود دارند. دایره‌ای که بر A ، C و P می‌گذرد با دایره‌ای که بر B ، D و Q می‌گذرد، نقطه مشترک نخواهند داشت.



(ب)



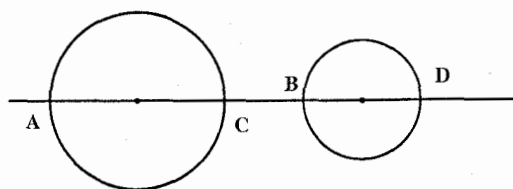
(الف)

تعریف. جفت نقطه‌های A و C را نسبت به جفت نقطه‌های B و D جداساز نامیم، هرگاه چهار نقطه A ، B ، C و D یا بر یک خط و یا بر یک دایره واقع باشند و پاره خط یا کمان AC یکی و فقط یکی از دو نقطه B و D را در برداشته باشد، به عبارت ساده‌تر هر یک از جفتها بین نقطه‌های جفت دیگر جدایی بیندازند. رابطه مزبور را بنا به قرارداد به صورت زیر نشان می‌دهند:

$$|AC| \quad |BD|$$

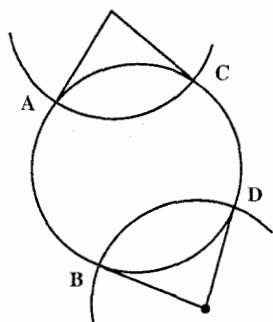
این رابطه را به هفت صورت دیگر می‌توان نوشت، مانند: $|BD| \quad |AC|$ یا $|AC| \quad |DB|$.

نکته. هرگاه چهار نقطه A ، B ، C و D بر یک خط L بر یک دایره واقع باشند، اما جفت نقطه‌های A و C نسبت به جفت نقطه‌های B و D جداساز نباشند، بسادگی می‌توان دو دایره بدون نقطه مشترک رسم کرد که یکی بر A و C و دیگری بر B و D بگذرد؛



(پ)

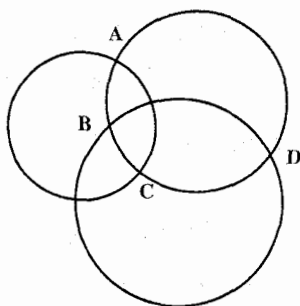
در حالتی که این چهار نقطه
بر یک خط واقع باشند، مانند
شکل (پ) کافسی است
دایره‌های به قطرهای AC و
BD را رسم کنیم؛ هرگاه
چهار نقطه A, B, C و D به



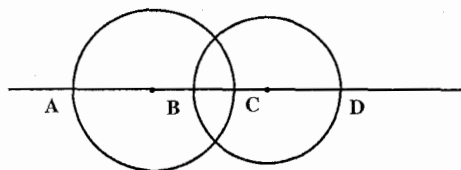
(ت)

شرط مذکور بر یک دایره واقع باشند، مانند شکل (ت)
مماسهایی که در A و C بر دایره رسم کنیم و همچنین
مماسهایی که در B و D بر آن رسم کنیم، مرکزهای
دایره‌هایی متمایز را به دست می‌دهند. هرگاه، داشته باشیم
 $|AC| = |BD|$ ، در این صورت هر دایره که بر A و C
بگذرد، از دو نقطه B و D یکی در درون آن و دیگری
در برون آن واقع خواهد شد. بنابراین، هر دایره که بر
A و C بگذرد با هر دایره که بر B و D بگذرد، متقاطع
خواهد بود. صورت نقیض قضیه قبلی بدین معنی است

که هرگاه دایره‌ای دلخواه که بر دو خط مفروض می‌گذرد با دایره دلخواه دیگر که بر دو
نقطه مفروض دیگر می‌گذرد، حداقل در دو نقطه مشترک باشد، آن چهار نقطه مفروض
باید بر یک خط و یا بر یک دایره واقع باشند (شکلهای (ث) و (ج)). در چنین حالتی، دو



(ج)



(ث)

جفت نقطه‌های مفروض هر کدام نسبت به دیگری جداساز می‌باشد. با توجه به آن چه
گفته شد، می‌توانیم بدون قید آن که چهار نقطه بر یک خط یا بر یک دایره واقع باشند،
تعریف مفهوم جداسازی Separation را به شرح زیر بیان کنیم:

دو جفت نقطه‌های (A, C) و (B, D) را نسبت به یکدیگر جداساز می‌گوییم هرگاه هر دایره گذرنده بر A و C با هر دایره گذرنده بر B و D حداقل در دو نقطه مشترک باشد؛ که این دو دایره یا متقاطعند و یا منطبقند، باید گفت که به نوع دیگری و بدون ارتباط دادن هیچ دایره‌ای می‌توان جداسازی را تعریف کرد.

۱۸۰. اثبات این قضیه هر چند که نیاز به یادآوری‌هایی دارد اما حائز اهمیت است، نخست حالتی را در نظر می‌گیریم که چهار نقطه بر یک خط واقع باشند، در این صورت با استفاده از ویژگیهای برداری فرض می‌کنیم که:

$$\vec{AD} = x, \quad \vec{BD} = y, \quad \vec{CD} = z$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$\vec{AB} = x - y, \quad \vec{BO} = y - z, \quad \vec{AC} = x - z$$

$$\vec{AB} \times \vec{CD} + \vec{BC} \times \vec{AD} = (x - y)z + (y - z)x$$

بنابراین:

$$= (x - z)y = \vec{AC} \times \vec{BD} \quad (۱)$$

هرگاه داشته باشیم $|\vec{BD}|$ ، $|\vec{AC}|$ ، مانند شکل (الف)، پاره خط AC فقط یکی از دو

نقطه B یا D را در بردارد و بنابراین نسبتهای $\vec{AB}:\vec{BC}$ و $\vec{AD}:\vec{DC}$ مختلف‌العلامتند

و در نتیجه حاصلضربهای $\vec{AB} \times \vec{DC}$ و $\vec{BC} \times \vec{AD}$ نیز مختلف‌العلامتند و بنابراین

حاصلضربهای $\vec{AB} \times \vec{CD}$ و $\vec{BC} \times \vec{AD}$ هم علامت می‌باشند. در چنین حالتی رابطه

(۱) برای اندازه‌های هندسی بردارها نیز محقق خواهند بود. اما اگر جفت A, C نسبت

به جفت B, D جداساز نباشد، مانند شکل (ب)، علامتهای گفته شده تغییر خواهند

کرد؛ مثلاً حاصلضربهای $\vec{AB} \times \vec{CD}$ و $\vec{BC} \times \vec{AD}$ مختلف‌العلامت می‌باشند. در این

حالت وقتی اندازه‌های هندسی بردارها را در نظر بگیریم، از رابطه (۱) برمی‌آید که مقدار

مثبت $\vec{AC} \times \vec{BD}$ که با تفاضل دو مقدار مثبت $\vec{AB} \times \vec{CD}$ و $\vec{BC} \times \vec{AD}$ برابر است،

از مجموع این دو مقدار مثبت کوچکتر خواهد بود، یعنی داریم:

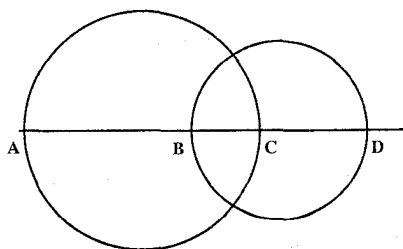
$$\vec{AB} \times \vec{CD} + \vec{BC} \times \vec{AD} > \vec{AC} \times \vec{BD}$$

بنابراین برای حالتی که چهار نقطه بر یک خط واقع باشند، حکم قضیه ثابت شده است.

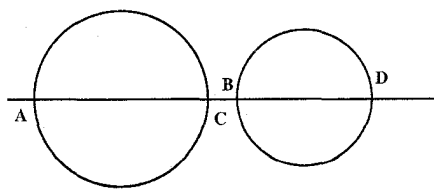
برای حالتی که چهار نقطه بر یک خط واقع نباشند، از بین آنها دست کم سه نقطه تشکیل

مثلث می‌دهند. مثلاً مثلث ABC ، و چهارمین نقطه، یعنی D ، یا بر یکی از ضلعهای این

مثلث واقع است و یا داخل یا خارج آن قرار خواهد داشت. در هر صورت بنابه قضیه



(الف)



(ب)

بظلمیوس و عکس آن خواهیم داشت :

$$AB \times CD + BC \times AD \geq AC \times BD$$

تساوی فقط وقتی برقرار است که چهار نقطه بر یک دایره واقع باشند.

۱۸۱. نسبت ناهمساز چهار نقطه غیر مشخص A, B, C و D که جدا از هم و به همین ترتیب مفروضند، عبارت است از عدد (ABCD) که برحسب فاصله‌های دو به دوی این نقطه‌ها به صورت فرمول زیر تعریف می شود :

$$(ABCD) = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC} \quad \left(\text{یا} \quad \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB} \right)$$

هرگاه طرفین رابطه‌ها $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$ را که برای چهار نقطه واقع در یک صفحه برقرار است، بر $AC \cdot BD$ تقسیم کنیم، با توجه به تعریف بالا نتیجه خواهد شد که : این ارتباط بین نسبت‌های ناهمساز و (جداسازی) امکان آن را به وجود می آورد که برعکس آن چه که قبلاً عمل کردیم، عمل کنیم ؛ یعنی به جای آن که جداسازی را برحسب دایره‌ها تعریف کنیم، اکنون دایره‌ها را برحسب جداسازی تعریف کنیم ؛ زیرا سه نقطه متمایز A, B و C یک دایره (یا یک خط) منحصر به فرد را مشخص می کنند و می توان آن را متشکل از همان سه نقطه و همه نقطه‌های X دانست، به قسمی که :

$$BC \mid |AX|, \quad CA \mid |BX|, \quad AB \mid |CX|$$

۱۸۲. داریم :

$$(A'B'C'D') = \frac{\overline{A'C'} \times \overline{B'D'}}{\overline{A'D'} \times \overline{B'C'}} = \frac{\frac{k^2 \cdot \overline{AC}}{\overline{OA} \cdot \overline{OC}} \times \frac{k^2 \cdot \overline{BD}}{\overline{OB} \cdot \overline{OD}}}{\frac{k^2 \cdot \overline{AD}}{\overline{OA} \cdot \overline{OD}} \times \frac{k^2 \cdot \overline{BC}}{\overline{OB} \cdot \overline{OC}}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} = (ABCD)$$

از این ویژگی نیز برمی آید که در انعکاس، ویژگی جداسازی بین دو جفت نقطه محفوظ می ماند، یعنی انعکاس نسبت ناهمساز چهار نقطه را محفوظ می دارد.

۱۸۳. زیرا با توجه به قضیه‌ها از رابطه $|BD| \cdot |AC|$ نتیجه می‌شود که:

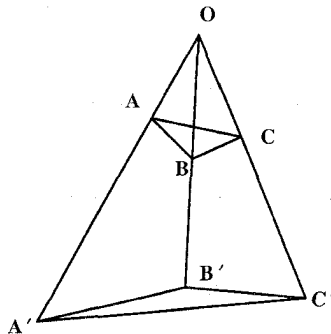
$$(A'D'B'C') + (A'B'D'C') = (ADBC) + (ABDC) = 1$$

بنابراین داریم: $|B'D'| \cdot |A'C'|$

۱۸۴. فرض کنید $OABC$ چهارضلعی مفروض (شکل) و A' ، B' و C' نقطه‌های منعکس

A ، B و C در انعکاس (k و O) باشند. داریم:

$$\frac{AB}{OA \cdot OB} = \frac{A'B'}{k}, \quad \frac{BC}{OB \cdot OC} = \frac{B'C'}{k}, \quad \frac{AC}{OA \cdot OC} = \frac{A'C'}{k}$$



حال اگر $OABC$ محاطی نباشد، نقطه‌های A' ، B' و C' همخط نیستند؛ پس،

$$A'B' + B'C' > A'C' \quad (1)$$

$$\frac{AB}{OA \cdot OB} + \frac{BC}{OB \cdot OC} > \frac{AC}{OA \cdot OC} \quad (2)$$

پس،

$$AB \cdot OC + BC \cdot OA > AC \cdot OB \quad (3)$$

یا

ولی اگر $OABC$ محاطی باشد، نقطه‌های A' ، B' و C' همخطند؛ پس در (۱) و (۲)

و (۳) علامت $>$ باید با علامت تساوی (=) عوض شود.

۱۸۵. فرض کنید دایرة PQT در نقطه T بر دایرة محیطی

(O) از مثلث ABC مماس داخلی باشد (شکل) و

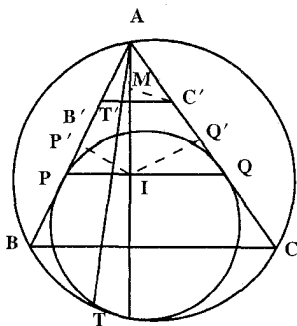
در نقطه‌های P و Q بر ضلعهای AB و AC مماس

باشد. فرض کنید I نقطه وسط PQ باشد. اگر B' و

C' منعکسهای B و C ، در انعکاس (A, AI)

باشند، خط $B'C'$ منعکس (O) است و خط AT

خط $B'C'$ را در T' منعکس T قطع می‌کند.



فرض کنید P' و Q' منعکسهای P و Q باشند، داریم $AP \cdot AP' = AI^2$ و چون مثلث AIP در رأس I قائمه است، نقطه P' پای عمودی است که از I بر وتر AP رسم می شود. مطلب مشابهی در مورد Q' صادق است. حال چون دایره $P'Q'T'$ منعکس دایره PQT است، و در نتیجه در T' بر $B'C'$ مماس است، I مرکز دایره محاطی خارجی مثلث $AB'C'$ نسبت به A است. دایره $IB'C'$ خط IA را در M، مرکز دایره محاطی داخلی مثلث $AB'C'$ ، قطع می کند و در چهار ضلعی محاطی $IB'MC'$ داریم:

$$\widehat{B'IM} = \widehat{B'C'M} = \frac{1}{2} \widehat{B'C'A} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$$

زیرا خطهای BC و $B'C'$ نسبت به AB و AC پاد موازی اند. خطهای BI و $B'I$ نیز نسبت به AB و AI پاد موازی اند، زیرا نقطه های B' و I منعکسهای B و I هستند؛ پس،

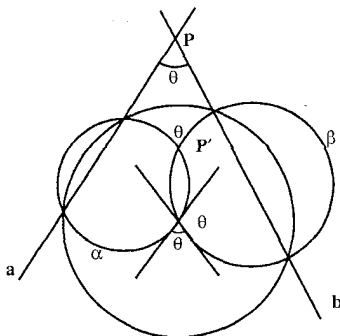
$$\widehat{ABI} = \widehat{B'IA} = \widehat{B'IM} = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$$

و I مرکز دایره محاطی داخلی ABC است.

اثبات در حالت مماس خارجی نیز مشابه همین اثبات است.

۱۸۶. با مطرح ساختن دایره ها مطرح شدن زاویه ها خود به خود به میان می آید. زاویه بین دو دایره متقاطع همان زاویه ای است که مماسهای رسم شده بر آن دو دایره در یکی از نقطه های تقاطعشان با یکدیگر می سازند؛ زیرا به علت تقارن نسبت به خط الممرکزین، زاویه های دو دایره در دو نقطه تقاطعشان با یکدیگر برابرند. برای بررسی این که آیا در انعکاس نسبت به یک دایره به مرکز O، زاویه ها تغییر می کنند یا نه، دو خط a و b در نظر می گیریم که در P با هم برخورد کرده و با یکدیگر زاویه θ می سازند، در انعکاس نسبت به دایره به مرکز O خط a به دایره α تبدیل می شود که بر O می گذرد و مماس بر این دایره در O با a موازی است. خط b نیز به دایره β تبدیل می شود که بر O

می گذرد و مماس بر آن در O با b موازی است. زاویه بین دو مماس که با θ برابر است بنا به تعریف زاویه بین دو دایره α و β می باشد. دو دایره α و β در نقطه دیگر P' که منعکس نقطه P است نیز متقاطعند و زاویه بین دو دایره در P' با زاویه بین آنها در O برابر بوده و همان θ است. هرگاه a و b در O برخورد کرده



باشند، منعکس هر کدام بر خودش واقع است و تغییرناپذیری θ باز هم ثابت است. هرگاه a و b بر دایره‌هایی که از p می‌گذرند، مماس باشند، این دایره‌ها پس از انعکاس به مماسهای α و β در P' تبدیل می‌شوند.

۱۸۷. هرگاه در شکل، انعکاسی در نظر بگیریم که

قطب آن بر P واقع بوده و A و A' منعکسهای یکدیگر باشند، در این صورت داریم:

$$k^2 = \overline{OA} \times \overline{OA'} = \overline{OB} \times \overline{OB'} = \overline{OT}^2$$

بنابراین هر قاطع، مانند OBB' که بر O بگذرد، دایره را در دو نقطه منعکس یکدیگر

قطع می‌کند و علاوه نقطه تماس هر مماسی که از D بر دایره رسم شود، مانند T نقطه تماس OT ، منعکس خودش می‌باشد که روی دایره انعکاس ω واقع است.

۱۸۸. A, B, C و D (شکل) چهار نقطه

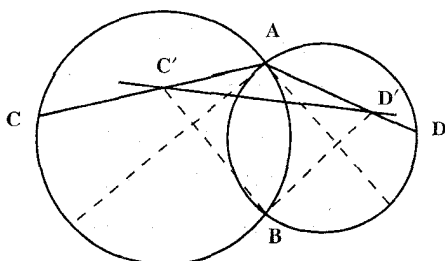
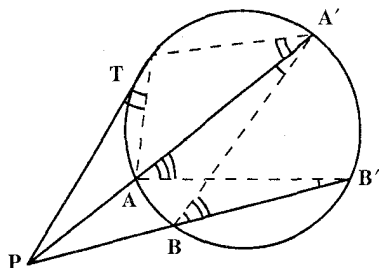
مفروضند. فرض کنید که دو دایره ABC و ABD متعامد باشند. در انعکاسی که $(A$ و $AB)$ دایره انعکاس آن است، نقطه B به خودش و دایره‌های ABC و ABD به دو خط

راست تبدیل می‌شوند. این دو خط در B بر هم عمودند و به ترتیب از منعکسهای C و D ، یعنی نقطه‌های C' و D' می‌گذرند.

دایره CDA به خط $C'D'$ و دایره CDB به دایره $C'D'B$ تبدیل می‌شود. چون

$\widehat{C'BD'}$ قائمه است، خط $C'D'$ قطری از دایره $C'D'B$ است و بنابراین، بر دایره عمود است، پس می‌توان نتیجه گرفت که دایره‌های (CDA) و (CDB) متعامدند و قضیه ثابت می‌شود.

روش دیگر. در انعکاس $(P$ و $C)$ که در آن P قوت نقطه C نسبت به دایره ABD است، دایره ABD به خودش تبدیل می‌شود و خطهای CA ، CB و CD این دایره را در A' ، B' و D' (منعکسهای نقطه‌های A ، B و D) نیز قطع می‌کنند. دایره CAB به خط راست $A'B'$ تبدیل می‌شود و این خط یک قطر دایره ABD است، زیرا دایره‌های ABC و ABD بنابر فرض بر هم عمودند. دایره‌های CDA و CDB به خطهای



$D'A'$ و $D'B'$ تبدیل می‌شوند. این دو خط بر هم عمودند؛ پس دایره‌های CDA و CDB نیز بر هم عمودند.

۱۸۹. در شکل (الف) مثلث ABC، مثلث میانه‌ای آن $A'B'C'$ ، دایرهٔ محاطی داخل آن به مرکز I که در X بر BC مماس است، دایرهٔ محاطی خارجی داخل زاویهٔ A به مرکز I_a که در X_a بر BC مماس است و بالاخره B_1C_1 مماس مشترک داخلی دیگر این دو دایره مشاهده می‌شود. دایرهٔ ω به قطر XX_a نیز رسم شده است و B_1C_1 با BC، $A'B'$ و $A'C'$ بترتیب در S، B'' و C'' برخورد کرده است. دایرهٔ ω بر هر یک از دایره‌های به مرکز I و I_a عمود است، پس هر یک از دایره‌ها در انعکاس به دایرهٔ ω منعکس خودش می‌باشد. اکنون ثابت خواهیم کرد که در همین انعکاس خط B_1C_1 منعکس دایرهٔ نه نقطه است. با فرض این که S نصف محیط مثلث ABC باشد، داریم:

$$BX = X_aC = s - b$$

و از آن جا نتیجه می‌شود که A' وسط BC مرکز دایرهٔ ω است و طول قطر این دایره برابر است با:

$$XX_a = a - 2(s - b) = b - c$$

(نامگذاری رأسهای مثلث را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که این مقدار مثبت باشد.) چون دایرهٔ نه نقطه بر A' مرکز دایرهٔ ω می‌گذرد، پس منعکس آن نسبت به این دایره خطی است مستقیم. ثابت می‌کنیم که این خط بر B'' و C'' (و در نتیجه بر B_1 و C_1) می‌گذرد، یعنی ثابت می‌کنیم که B'' و C'' منعکسهای نقطه‌های B' و C' می‌باشند. نقطهٔ S بر خط Π_a یعنی بر نیمساز زاویهٔ A_1 واقع است، پس ضلع BC را به نسبت دو ضلع دیگر مثلث ABC تقسیم می‌کند و داریم:

$$CS = \frac{ab}{b+c} \quad \text{و} \quad SB = \frac{ac}{b+c}$$

با محاسبهٔ نصف تفاضل این دو مقدار داریم:

$$SA' = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

$$BC_1 = AC_1 - AB = AC - AB = b - c \quad \text{همچنین می‌دانیم که:}$$

$$CB_1 = BC_1 = b - c$$

مثلثهای $SA'B''$ و SBC_1 و همچنین مثلثهای $SA'C''$ و SCB_1 با هم متشابه‌اند و نتیجه می‌شود:

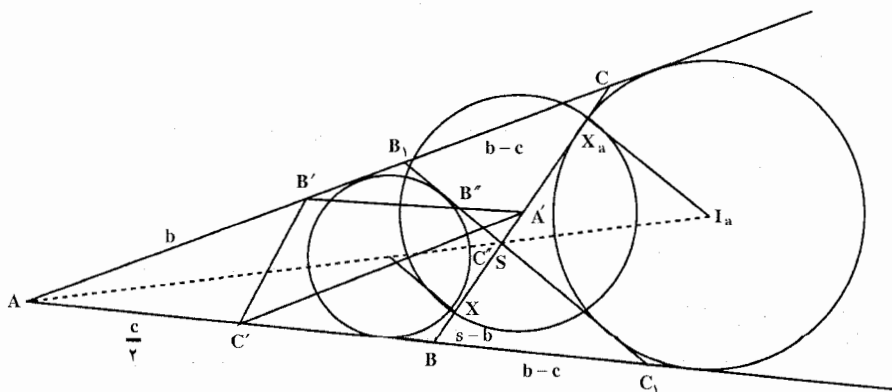
$$\frac{A'B''}{b-c} = \frac{A'B''}{BC_1} = \frac{SA'}{SB} = \frac{b-c}{2c}$$

$$\frac{A'C''}{b-c} = \frac{A'C''}{CB_1} = \frac{SA'}{SC} = \frac{b-c}{2b}$$

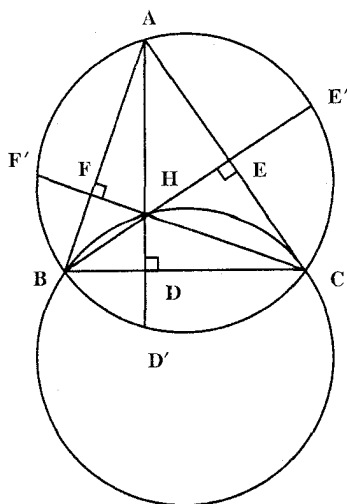
$$A'B' \times A'B'' = \frac{c}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2c} = \left(\frac{b-c}{2} \right)^2$$

$$A'C' \times A'C'' = \frac{b}{2} \cdot \frac{(b-c)^2}{2b} = \left(\frac{b-c}{2} \right)^2$$

چون $\frac{b-c}{2}$ شعاع دایره ω است، پس نسبت به دایره ω نقطه‌های B'' و C'' به ترتیب منعکسهای نقطه‌های B' و C' می‌باشند. بنابراین در انعکاس نسبت به دایره ω هر یک از دایره‌های محاطی به مرکزهای I_a و I_a منعکس خودش می‌باشد و خط B_1C_1 منعکس دایره نه نقطه است، و چون این خط بر دو دایره مزبور مماس است، پس دایره نه نقطه نیز بر دو دایره مزبور مماس می‌باشد. با روش مشابه ثابت می‌شود که دایره نه نقطه بر هر یک از دو دایره محاطی خارجی دیگر مثلث نیز مماس است. دایره نه نقطه بر نقطه‌های D ، E و F (شکل ب) می‌گذرد که این نقطه‌ها عبارتند از نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل چهارگوشه $ABCH$ ، به عبارت دیگر، چهار مثلث ABC ، BCH ، CAH و ABH دارای یک دایره نه نقطه‌اند، اما دایره‌های محاطی آنها متفاوتند. بنابراین چهارگوشه ارتفاعی مجموعه شانزده دایره را مشخص می‌کند که همه بر دایره DEF مماس می‌باشند.



(الف)



(ب)

۱۹۰. برای چنین تبدیلی کافی است که مرکز دایره انعکاس یکی از نقطه‌های حد O یا P از دسته دایره غیر متقاطع $\alpha\beta$ انتخاب شود. هرگاه، α داخل β واقع باشد، هر دایره انعکاس به مرکز O (یا P) دایره α را به بزرگترین (یا کوچکترین) دایره‌های هم‌مرکز تبدیل خواهد کرد. هرگاه مرکز دایره انعکاس را ثابت نگاه داشته اما شعاع آن را تغییر دهیم که در نتیجه یک جفت دیگر دایره‌های هم‌مرکز را جانشین جفت دایره‌های هم‌مرکز خواهیم ساخت که نسبت بین شعاعهای آنها محفوظ خواهد ماند و در نتیجه این تبدیل معادل است با حاصل ترکیب تبدیل اول با یک تجانس. همچنین، هر دایره انعکاس به مرکز P یک جفت دایره هم‌مرکز را به جفت دیگر دایره‌های هم‌مرکز تبدیل خواهد کرد که شعاعهای آنها بر نسبت عکس خواهند بود.

هرگاه α و ω دو دایره دلخواه متمایز باشند، منعکس α نسبت به ω به دسته دایره‌های $\alpha\omega$ تعلق خواهد داشت: هر دو دایره دلخواهی که بر هر یک از دو دایره α و ω عمود باشند، بر منعکسهای آنها نیز عمود خواهند بود. اگر منعکس α را β بنامیم، دایره ω را دایره «نیمساز» دو دایره α و β می‌نامیم (در این مورد اصطلاح «دایره متشابه انعکاسی» نیز به کار می‌رود، اما اصطلاح «نیمساز» مناسبتر است (اصطلاح نیمساز در این جا به این مناسبت است که اگر α ، β و ω جزء یک دسته دایره باشند و α و β نسبت به ω منعکس یکدیگر باشند، در حالتی که α و β متقاطعند، بسادگی ثابت می‌شود که دایره ω نیمساز دو دایره α و β است. اگر سه منحنی C_1 ، C_2 و C_3 از

یک نقطه بگذرند و مماس رسم شده در این نقطه بر C_1 نیمساز زاویه بین مماسهای رسم شده در این نقطه بر C_7 و C_8 باشد، منحنی C_1 نیمساز دو منحنی C_7 و C_8 در نقطه تقاطع آنها نامیده می شود. حال اگر منحنیها دایره باشند و یک دایره در هر دو نقطه تقاطع نیمساز دو دایره دیگر باشد، این دایره را به طور مطلق نیمساز دو دایره دیگر می گویند.))
دایره β به دسته دایره $\alpha\omega$ و دایره ω به دسته دایره های $\alpha\beta$ تعلق خواهد داشت. اکنون در مرحله ای هستیم که به اثبات قضیه زیر بپردازیم:

قضیه. هر دو دایره دلخواه حداقل یک دایره نیمساز دارند؛ اگر دو دایره غیر متقاطع یا مماس باشند، دایره نیمساز آنها منحصر به فرد است؛ اگر دو دایره متقاطع باشند، دارای دو دایره نیمساز عمود بر یکدیگر خواهند بود؛ زیرا دو دایره که متقاطع باشند توسط انعکاس به دو خط متقاطع تبدیل می شوند که این دو خط متقاطع دارای دو نیمساز عمود بر هم می باشند. در تبدیل عکس نتیجه می شود که دو دایره متقاطع دارای دو دایره نیمساز عمود بر یکدیگرند که این دو دایره بر نیمسازهای زاویه های بین مماسهای رسم شده بر دو دایره متقاطع در نقطه های تقاطع آنها مماس می باشند. دو دایره α و β که بر هم مماس باشند توسط انعکاس به دو خط متوازی تبدیل می شوند و در نتیجه بیش از یک دایره نیمساز ندارند.

هرگاه دو دایره α و β نقطه مشترک نداشته باشند، می توان توسط انعکاس آنها را به دو دایره هم مرکز به شعاعهای مثلاً a و b تبدیل کرد. در این صورت این دو دایره نسبت به دایره به شعاع $\sqrt{ab}$ و هم مرکز آنها منعکس یکدیگر می باشند و با تبدیل انعکاسی عکس نتیجه می شود که دو دایره غیر متقاطع α و β فقط یک دایره نیمساز دارند. اگر α و β دو دایره متساوی باشند، دایره نیمساز آنها همان محور اصلی آنها می باشد.

۱۹۳. فرض کنید (P) و (Q) دو دایره دلخواه از دسته دایره هم محور (E) باشند، که مزدوج دسته دایره هم محور مفروض (F) است. فرض کنید هر دایره (C) از دسته دایره (F) به دایره (C')، که بر منعکسهای (P) و (Q) (یعنی (P') و (Q')) عمود است، تبدیل شود؛ پس (C') دسته دایره هم محور (F') را تعیین می کند.

بحث. یکی از دو دسته دایره هم محور مزدوج (E) و (F)، مثلاً (F)، دو نقطه اساسی A و B دارد که نقطه های حدی دسته دایره دیگر (E) هستند. دایره های منعکس (F)، یعنی دایره های (F') از منعکسهای A و B، یعنی A' و B' می گذرند.

دایره های (E) به دایره های یک دسته دایره هم محور (E')، تبدیل می شوند که مزدوج (F') است؛ پس نقطه های A' و B' نقطه های حدی (E') هستند.

اگر یکی از نقطه‌های A و B، مثلاً A را مرکز انعکاس بگیریم، دایره‌های (F) به خط‌های راستی تبدیل می‌شوند که از B'، منعکس B، می‌گذرند؛ هر دایره (E') بر خط‌هایی که از B' می‌گذرند عمود است، یعنی B' مرکز مشترک همه دایره‌های (E') است.

نتیجه. در انعکاس، دو نقطه وارون نسبت به یک دایره مفروض، به دو نقطه وارون نسبت به دایره منعکس دایره مفروض، تبدیل می‌شوند. نقطه‌های حدی A و B نسبت به هر دایره‌ای از (E)، مثلاً (M)، وارون یکدیگرند، و نقطه‌های A' و B' نسبت به (M')، منعکس (M)، وارون یکدیگرند.

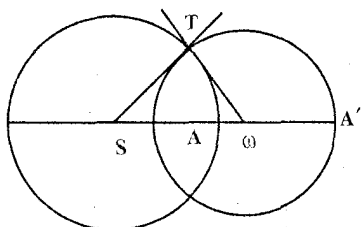
۱۹۴. فرض کنید (C) و (C') دو دایره منعکس باشند و فرض کنید (S) دایره انعکاس باشد. اگر (S) و (C) دو نقطه مشترک داشته باشند، دایره (C') از این دو نقطه می‌گذرد، زیرا نقطه‌های (S) روی خودشان منعکس می‌شوند.

اگر (S) و (C) نقطه مشترک نداشته باشند، یک دسته دایره هم محور نامقاطع را تعیین می‌کنند که دو نقطه حدی L و L' دارد. این نقطه‌ها که نسبت به (S) وارون یکدیگرند، به یکدیگر منعکس می‌شوند و چون نسبت به (C) وارون یکدیگر هستند، نسبت به (C') وارون یکدیگرند؛ پس (S)، (C) و (C') به یک دسته دایره هم محور تعلق دارند.

نتیجه. اگر دو دایره نسبت به یک دایره دیگر، به عنوان دایره انعکاس، منعکس هم باشند، آن‌گاه این دایره، دایره تشابه آن دو دایره است. مرکز دایره سوم (S) مرکز تشابه دو دایره (C) و (C') است و (S) با (C) و (C')، هم محور است، بنابراین گزاره بیان شده، درست است.

۱۹۵. رأس A و پای ارتفاع AD از مثلث ABC نسبت به دایره قطبی (H) از مثلث ABC وارون یکدیگرند؛ گزاره‌های مشابهی برای دو نقطه B و E و همچنین، برای دو نقطه C و F برقرارند؛ پس دایره محیطی $ABC = (O)$ و دایره نه نقطه $DEF = (N)$ نسبت به (H) منعکس یکدیگرند؛ پس (O)، (N) و (H) هم محورند. نقطه برخورد مماسهایی که از B و C بر (O) رسم می‌شوند، قطب BC نسبت به (O) است؛ پس اگر این نقطه برخورد را L بنامیم، L و نقطه وسط BC، A'، نسبت به (O) وارون یکدیگرند. گزاره‌های مشابهی نیز برای دو نقطه M و B' و همچنین دو نقطه N و C' برقرارند، پس دایره محیطی $LMN = (T)$ از مثلث مماسی و $A'B'C' = (N)$ نسبت به (O) منعکس یکدیگرند و در نتیجه، (O)، (T) و (N) هم محورند. در نتیجه چهار دایره (O)، (N)، (H) و (T) هم محورند.

نتیجه. مرکز دایرة محیطی مثلث مماسی روی خط اوایلر مثلث مفروض قرار دارد.



۱۹۷. اگر A' منعکس A به قطب S و قوت k باشد،

داریم $SA \cdot SA' = k$ و چنانچه از S مماس

ST را بر دایرة به قطر AA' رسم کنیم، بنا به

تعریف دایرة به مرکز S و شعاع ST دایرة

انعکاس است؛ زیرا:

$$R_{(S)} = ST = \sqrt{SA \cdot SA'} = \sqrt{k}$$

$P_{S(w)} = \overline{SA} \cdot \overline{SA'} = \overline{ST}^2 = R^2$ ، یعنی قوت مرکز دایرة انعکاس (دایرة به مرکز

S و شعاع دایرة ST) نسبت به دایرة به قطر AA' مساوی مربع شعاع دایرة (S) است،

پس دو دایره بر هم عمودند.

۱۹۹. بر دایرة انعکاس قرار دارند.

۲.۲. انعکاس در: نقطه، خط، زاویه، ...

۱.۲.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۰۰. فرض کنیم O قطب انعکاس و k قوت انعکاس باشد. اگر A' ، B' و C' منعکسهای A ،

B و C و $BC = a$ و $AC = b$ و $AB = c$ و $B'C' = a'$ و $C'A' = b'$ و $A'B' = c'$

باشند، داریم:

$$a' = \frac{ka}{OB \cdot OC} ; b' = \frac{kb}{OC \cdot OA} ; c' = \frac{kc}{OA \cdot OB}$$

و برای این که مثلث $A'B'C'$ متساوی الاضلاع شود، لازم است:

$$\frac{a}{OB \cdot OC} = \frac{b}{OC \cdot OA} = \frac{c}{OA \cdot OB}$$

$$\frac{OB}{OC} = \frac{c}{b} , \quad \frac{OC}{OA} = \frac{a}{c}$$

و یا

چنانچه A' و A'' ، و B' و B'' پای نیمسازهای زاویه‌های A و B باشند، O در محل

تلاقی دایره‌هایی به قطرهای $A'A''$ و $B'B''$ است. بنابراین، برای O دو جواب به دست

می آید که نقطه‌های مشترک سه دایرهٔ آپولونیوس متعلق به مثلث ABC می‌باشند. اگر A ، B و C بر یک استقامت باشند، به همین نتیجه می‌رسیم.

۲۰۱. الف. فرض می‌کنیم $AC \parallel BD$ و علاوه بر آن چهار نقطهٔ مفروض بر یک دایرهٔ γ واقع باشند. دو دایرهٔ β و α را در نظر می‌گیریم که بر دایرهٔ γ عمود باشند و α بر A و C و β بر B و D بگذرد و نقطه‌های برخورد این دو دایره را با L و O نشان می‌دهیم. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز L دایره‌های α و β به دو قطر از دایرهٔ γ تبدیل می‌شوند به گونه‌ای که $A'B'C'D'$ یک مستطیل به مرکز O' خواهد بود.

ب. فرض می‌کنیم $AB \parallel CD$ یا $AD \parallel BC$ و دایره‌های γ ، α و β را به گونهٔ بالا در نظر می‌گیریم، اما این بار دو دایرهٔ α و β متقاطع نمی‌باشند. نقطه‌های حد دسته دایره‌های α و β را با L و O نشان می‌دهیم، یعنی L و O نقطه‌های برخورد γ با خط‌المركزین α و β می‌باشند. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز L دو دایرهٔ α و β به دو دایرهٔ به مرکز مشترک O' تبدیل می‌شوند. چون $A'C'$ و $B'D'$ (که روی یک خط واقعند) قطرهای دو دایرهٔ هم مرکز می‌باشند، پس $A'B'C'D'$ یک متوازی‌الاضلاع به وضع خاص می‌باشد.

پ. وقتی A ، B ، C و D روی یک دایره واقع نباشند، چهار دایرهٔ متمایز ABC ، ACD ، ABD و BCD را معین می‌کنند. یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های ABC و ACD را که جداسازی بین B و D را پدید می‌آورد با μ نشان می‌دهیم. همچنین یکی از دو دایرهٔ نیمساز دایره‌های ABD و BCD را که جداسازی بین A و C را پدید می‌آورد با ν نشان می‌دهیم. دو دایرهٔ μ و ν در L و O برخورد می‌کنند. در انعکاس نسبت به دایرهٔ به مرکز L دایره‌های ABC و ACD به دو دایرهٔ متساوی $A'B'C'$ و $A'C'D'$ تبدیل می‌شوند که μ' محور اصلی آنها بین B' و D' جداسازی پدید می‌آورد به گونه‌ای که: $A'\hat{B}'C' = C'\hat{D}'A'$. همچنین در انعکاس مزبور دایره‌های ABD و BCD به دو دایرهٔ متساوی $A'B'D'$ و $B'C'D'$ تبدیل می‌شوند که ν' محور اصلی آنها جداسازی بین A' و C' را پدید می‌آورد و داریم:

$$D'\hat{A}'B' = B'\hat{C}'D'$$

بنابراین $A'B'C'D'$ یک متوازی‌الاضلاع است. یادداشت. در هر یک از حالت‌های بالا، جفت نقطهٔ (L, O) به نام ژاکوبن جفتهای نقطه‌های (A, C) و (B, D) موسوم است.

۲.۲.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۲.۲. جای نقطه

۲۰۲. اگر A مبدأ محور فرض کنیم، چون بنا به فرض: چهار نقطه A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، داریم:

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \quad (1)$$

در صورتی که D'، B' و C' بترتیب منعکسهای D، B و C با قطب A و قوت k باشند، داریم:

$$AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = AD \cdot AD' = k$$

$$\frac{1}{AB} = \frac{AB'}{k}, \quad \frac{1}{AC} = \frac{AC'}{k}, \quad \frac{1}{AD} = \frac{AD'}{k} \quad \text{و یا}$$

چنانچه رابطه‌های اخیر را در رابطه (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{2AB'}{k} = \frac{AC'}{k} + \frac{AD'}{k}$$

و چنانچه طرفین این رابطه را در k ضرب کنیم نتیجه می‌شود:

$$2AB' = AC' + AD'$$

یعنی B' وسط C'D' است.

۲.۲.۲.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند

۲۰۳. اگر ABCD تقسیم توافقی و نقطه‌های A'، B'، C' و D' بترتیب منعکسهای نقطه‌های A، B، C و D نسبت به قطب انعکاس O واقع بر خط AB و قوت انعکاس k باشند

داریم:

$$(\overline{OA} + \overline{OB})(\overline{OC} + \overline{OD}) = 2(\overline{OA} \cdot \overline{OB} + \overline{OC} \cdot \overline{OD}) \quad (1)$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = \overline{OD} \cdot \overline{OD'} = K \quad (2)$$

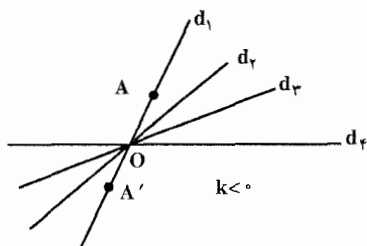
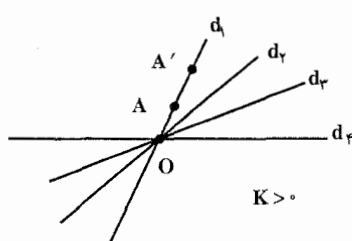
$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow (\overline{OA'} + \overline{OB'})(\overline{OC'} + \overline{OD'}) = 2(\overline{OA'} \cdot \overline{OB'} + \overline{OC'} \cdot \overline{OD'})$$

$\Rightarrow$ تقسیم توافقی است (A'B'C'D')

۳.۲.۲. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۲.۲. خطها همرسند

۲۰۴. منعکس هر خط راست نسبت به قطب انعکاسی که روی آن خط قرار دارد، خود آن خط است و چون نقطه همرسی دسته خط روی تمام خطهای آن قرار دارد، پس دسته خط منعکس که همان دسته خط داده شده است، همرسند.



۴.۲.۲. زاویه

۱.۴.۲.۲. اندازه زاویه

۲۰۵. با توجه به ثابت بودن زاویه‌های مثلث ABP ثابت کنید زاویه بین مماسهای رسم شده بر دو دایره در یکی از دو نقطه M یا P برابر مقدار ثابتی است.

۵.۲.۲. پاره خط

۱.۵.۲.۲. اندازه پاره خط

۲۰۶. با توجه به دستور $A'B' = \frac{k^2 \cdot AB}{OA \cdot OB}$ داریم:

$$A'B' = \frac{4 \times 12}{8 \times 6} = 1 \text{ cm}$$

۲۰۷. می دانیم که شعاع دایرة انعکاس جذر قوت انعکاس است، یعنی :

$$R = \sqrt{k} \Rightarrow \frac{3}{7} = \sqrt{k} \Rightarrow k = \frac{9}{49}$$

از طرفی داریم :

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$$

$$\Rightarrow \frac{9}{8} \cdot \overline{OA'} = \frac{9}{49} \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{8}{49}$$

۲۰۸. داریم :

$$\sqrt{k} = \frac{9}{5} \Rightarrow k = \frac{81}{25} \quad \text{قوت انعکاس}$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k \Rightarrow OA \cdot \frac{6}{7} = \frac{81}{25} \Rightarrow OA = \frac{149}{50}$$

۶.۲.۲. رابطه های متري

۲۰۹. چنانچه $\overline{OA} = a$ ، $\overline{OB} = b$ ، $\overline{OC} = c$ و $\overline{OD} = d$ به ترتیب طولهای نقطه های A ، B ،

C و D که تشکیل تقسیم توافقی می دهند باشند، در حالت کلی داریم :

$$2(ab + cd) - (a + b)(c + d) = 0 \quad (1)$$

و در صورتی که A' ، B' ، C' و D' که بترتیب به طولهای a' ، b' ، c' و d' باشند،

$\overline{OC'} = c'$ و $\overline{OD'} = d'$ می باشند، منعکسهای A ، B ، C و D به قطب (O) و قوت K

باشند، می توان نوشت :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = a \times a' = k \quad \text{یا} \quad a = \frac{k}{a'} \\ \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = b \times b' = k \quad \text{یا} \quad b = \frac{k}{b'} \\ \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = c \times c' = k \quad \text{یا} \quad c = \frac{k}{c'} \\ \overline{OD} \cdot \overline{OD'} = d \times d' = k \quad \text{یا} \quad d = \frac{k}{d'} \end{array} \right.$$

از مقایسه رابطه‌های اخیر و رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$2 \left(\frac{K}{a'b'} + \frac{K}{c'd'} \right) - \left(\frac{K}{a'} + \frac{K}{b'} \right) \left(\frac{K}{c'} + \frac{K}{d'} \right) = 0$$

$$2 \left(\frac{1}{a'b'} + \frac{1}{c'd'} \right) - \left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} \right) \left(\frac{1}{c'} + \frac{1}{d'} \right) = 0 \quad \text{و یا}$$

$$2(a'b' + c'd') - (a' + b')(c' + d') = 0 \quad \text{و یا}$$

و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که C' و D' مزدوجهای توافقی A' و B' می‌باشند.
 ۲۱. اولاً. رابطه $\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$ با ملاحظه این که $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD}$ و

$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$ می‌باشد، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC}(\overline{AC} + \overline{CD}) + \overline{CA}(\overline{BC} + \overline{CD})$$

$$(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) \overline{CD} + \overline{BC}(\overline{AC} + \overline{CA}) \quad \text{و یا}$$

اما چون $\overline{AC} + \overline{CA} = 0$ و بنابر رابطه اختصاصی شال: $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$ نیز صفر می‌باشد، پس عبارت:

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD} = 0$$

برای هر چهار نقطه بر روی یک خط مستقیم همواره صادق است. پس اگر نقطه D به بینهایت دور هم منتقل شود، رابطه باز هم صفر بوده و چنان که دیدیم به رابطه اختصاصی $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$ شال مبدل می‌شود.

ثانیاً. اگر به قطب نقطه دلخواه O و به قوت دلخواه k^2 شکل را منعکس کنیم رابطه کلی شال به رابطه:

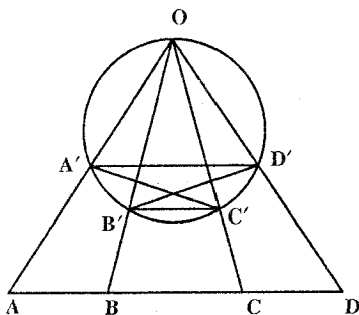
$$\overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'} + \overline{B'C'} \cdot \overline{A'D'} + \overline{C'A'} \cdot \overline{B'D'} = 0$$

بدل می‌شود که در آن A' ، B' ، C' و D' مرتباً منعکسهای A ، B ، C و D می‌باشند؛ زیرا منعکس خط جهت‌دار $ABCD$ دایره‌ای خواهد بود که بر نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' و O مرور می‌کند. (منعکس هر خط مستقیم دایره‌ای است که بر قطب انعکاس مرور می‌کند.) از تشابه مثلثهای OAB و $OA'B'$ حاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} \times \overline{OB}} = \frac{k^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \quad \text{و یا}$$

$$\overline{AB} = \frac{k^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \cdot \overline{A'B'} \quad \text{پس:}$$



و همچنین با تشابه مثلثهای دیگر مرتباً رابطه‌های :

$$\overline{BC} = \frac{k^2}{\overline{OB} \times \overline{OC}} \cdot \overline{B'C'} \quad \text{و} \quad \overline{CA} = \frac{k^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OC}} \cdot \overline{C'A'}$$

$$\overline{CD} = \frac{k^2}{\overline{OC} \times \overline{OD}} \cdot \overline{C'D'} \quad \text{و} \quad \overline{AD} = \frac{k^2}{\overline{OA} \cdot \overline{OD}} \cdot \overline{A'D'}$$

$$\overline{BD} = \frac{k^2}{\overline{OB} \times \overline{OD}} \cdot \overline{B'D'}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} + \overline{CA} \cdot \overline{BD}$$

پس :

$$= \frac{k^4}{\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD}} (\overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'} + \overline{B'C'} \cdot \overline{A'D'} + \overline{C'A'} \cdot \overline{B'D'}) = 0$$

خواهد بود. البته محور (خط جهت دار) به دایرة جهت دار تبدیل می‌شود و با رعایت جهت بر روی دایره ملاحظه می‌شود که از جمله داخل پراانتز طرف دوم جمله $\overline{C'A'} \cdot \overline{B'D'}$ منفی است، زیرا یکی از قوسهای این دو وتر در جهت عقربه‌های ساعت و دیگری در خلاف جهت عقربه‌های ساعت طی می‌شود، پس با ملاحظه جهت و تبدیل کلیه جمله‌ها به جمله‌های مثبت طرف دوم به صورت :

$$\overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'} + \overline{B'C'} \cdot \overline{A'D'} = \overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}$$

نوشته می‌شود که حکم قضیه بطلمیوس برای چهار ضلعی محاطی ABCD می‌باشد. اگر چهار نقطه A, B, C و D زوجین متوافق باشند، روشن است که $\overline{BC} \cdot \overline{DA} + \overline{BA} \cdot \overline{DB} = 0$ است، پس $\overline{B'C'} \cdot \overline{D'A'} + \overline{B'A'} \cdot \overline{D'B'} = 0$ خواهد بود. چهار ضلعی محاطی را در این صورت هارمونیک می‌نامند و با رعایت جهت رابطه $\overline{B'A'} \cdot \overline{D'B'} = \overline{B'C'} \cdot \overline{A'D'}$ به دست می‌آید. اگر قبول کنیم که $A'B'$ و $B'C'$ و ... همچون حامل عمل می‌کنند (این فرض خلاف حقیقت نیست، زیرا جمیع این

مقدارها به تبع جهت دایره و قوسهای آن همچون حامل عمل می کنند، رابطه دیگری نیز برای چهار ضلعی هارمونیک به دست می آید. به صورت $\overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'} = \overline{B'C'} \cdot \overline{B'D'}$ یعنی ضلعهای منتهی به دو رأس مجاور بر یک نسبتند. از این مقدمه می توان خواص چهارضلعی هارمونیک را بحث کرد و ما به همین اشاره اکتفا می کنیم.

تبصره. اگر چهار نقطه بر روی دایره‌ای ثابت باشند، مانند چهار نقطه A, B, C و D از نقطه متغیری مانند M به A, B, C و D وصل کنیم نسبت ناموزون چهار شعاع OA, OB, OC و OD چون به زاویه‌های این شعاعها مربوط است (و این زاویه‌ها ثابت می‌باشند چون قوسهای AB, BC و CD همه ثابتند) بنابراین با تغییر نقطه O این نسبت ناموزون تغییر نمی‌کند. بنابر تعریف این نسبت را نسبت ناموزون چهار نقطه A, B, C و D بر روی یک دایره نامیده می‌شود. چهار ضلعی هارمونیک هنگامی به دست می‌آید که شعاعهای MA, MB, MC و MD شعاعهای توافقی تشکیل دهند. از این تعریف نیز می‌توان خواص چهار ضلعی هارمونیک را به دست آورد.

۷.۲.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۲۱۲. به دو دایره متقاطع؛ نقطه دیگر تقاطع دو خط P_{∞} است.

۲۱۳. دو دایره عمودبرهم، یک دایره و یک خط گذرنده از مرکز آن.

۲:۲.۸. رسم شکلها

۲۱۴. از سه نقطه A ، B و C دایره‌ای مرور می‌دهیم.

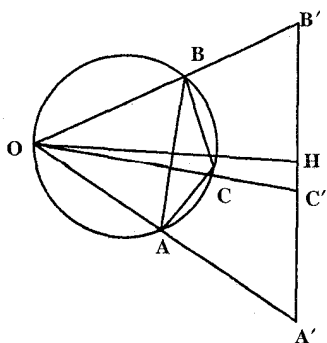
باید روی این دایره نقطه‌ای مانند O تعیین کنیم که

اگر قطب انعکاس اختیار شود، C'

منعکس C وسط $A'B'$ قرار گیرد. می دانیم:

$$B'C' = \frac{|K| \cdot BC}{OB \cdot OC}, \quad A'C' = \frac{|K| \cdot AC}{OA \cdot OC}$$

پس داشته باشیم $\frac{BC}{OB \cdot OC} = \frac{AC}{OA \cdot OC}$ یا



بنابراین برای تعیین O کافی است مکان نقطه‌هایی را رسم کنیم که نسبت $\frac{BC}{AC} = \frac{OB}{OA}$

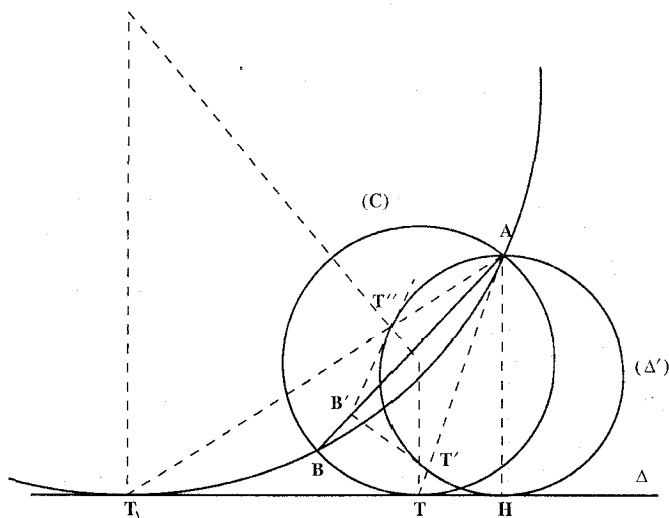
فاصله‌های آنها از A و B برابر $\frac{BC}{AC}$ باشد و محل برخورد این مکان و دایره محیطی مثلث ABC نقطه O خواهد بود.

۲۱۵. اگر $\overline{APQ}$ خط مطلوب گذرنده بر نقطه A و متقاطع با ضلعهای زاویه باشد، به نحوی که $AP \cdot AQ = a^2$ است. در این حالت Q منعکس P با قطب A و قوت a^2 خواهد بود و در نتیجه حل مسأله چنین است:

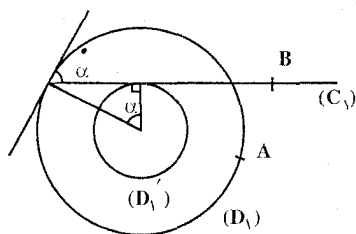
منعکس خط OY را با قطب A و قوت a^2 رسم می کنیم. چنانچه دایره (ω) منعکس خط OY باشد، محل برخوردش با خط OX نقطه P و نقطه تقاطع AP با خط OY نقطه Q است. به طوری که داریم: $AP \cdot AQ = a^2$ است.

۲۱۶. بحث. در صورتی که دایره (O) منعکس خط OY خط OX را در یک یا دو نقطه قطع کند، مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه متقاطع نباشند، مسأله جواب ندارد. هرگاه مسأله حل شده باشد و (C) دایره مطلوب در T بر خط Δ مماس باشد (شکل)، در صورتی که شکل را به وسیله انعکاس تبدیل کنیم، منعکس (C) بر منعکس Δ در T' ، منعکس T مماس خواهد بود. اما اگر قطب را یکی از نقطه‌های (C) بگیریم، منعکس (C) خطی است مستقیم و منعکس Δ دایره‌ای خواهد بود مماس بر آن خط مستقیم؛ پس مسأله را به این طریق حل می‌کنیم:

A را قطب انعکاس و مقداری دلخواه، مثلاً AH^2 ، را قوت انعکاس فرض می‌کنیم



(AH عمودی است که از A بر Δ رسم کرده‌ایم). منعکس خط Δ دایره Δ' است به قطر AH رسم شود. حال B' منعکس B را به دست می‌آوریم و از B' بر دایره Δ' مماس $B'T'$ را رسم کرده AT' را رسم می‌کنیم تا Δ را در T قطع کند. دایره‌ای که بر A, B و T بگذرد، دایره مطلوب است. مسأله در حالت کلی دو جواب دارد.



۲۱۷. فرض کنیم مسأله حل شده است و (C) دایره‌ای

باشد که از A، B گذشته و خط (D) را به زاویه α قطع کند (شکل). شکل را نسبت به

قطب انعکاس A و با قوت $\overline{AB^2}$ منعکس می‌کنیم. B بر منعکس خود منطبق است و منعکس (D) دایره (D_1) است که از A

می‌گذرد و منعکس (C) خط (C_1) است که از B می‌گذرد و دایره (D_1) را به زاویه α قطع می‌کند. کافی است خط (C_1) را رسم کنیم. می‌دانیم پوش خط‌هایی که دایره (D_1) را به زاویه α قطع می‌کنند، دایره (D'_1) است متحد‌المركز با (D_1) زاویه حاده فرض شده است). پس از نقطه B دو مماس بر دایره (D'_1) رسم می‌کنیم. منعکس این مماسها دایره‌هایی مطلوب می‌باشند. مسأله دو جواب و یا یک جواب دارد و یا غیرممکن است بر حسب آن که وضع B نسبت به دایره (D'_1) چگونه باشد. همین استدلال را وقتی که خط D را با یک دایره عوض کنیم می‌توان بیان نمود.

۲۱۸. اگر (C) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر M و مماس بر OX و OY باشد، چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، در نتیجه اگر منعکسهای خطهای OX و OY و دایرهٔ (C) را به قطب M و قوت دلخواه K رسم کنیم در این صورت:

اولاً. منعکس دایره (C) بر منعکسهای خطهای OX و OY مماس است.
ثانیاً. منعکس دایره (C) که از قطب انعکاس می‌گذرد، خطی است مستقیم و منعکسهای خطهای OX و OY دایره‌هایی مانند (ω) و (Γ) گذرنده بر M می‌باشند و Δ منعکس دایره (C) مماس مشترک دایره‌های (ω) و (Γ) می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

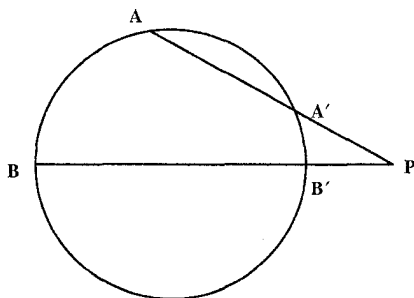
ابتدا دایره‌های (ω) و (Γ) منعکسهای خطهای OX و OY را قطب M و قوت دلخواه K رسم می‌نماییم و سپس خط Δ مماس مشترک آنها رسم می‌کنیم. منعکس خط Δ با قطب M و قوت K دایره مطلوب است.

بحث. چون دایره‌های (ω) و (Γ) از نقطهٔ M می‌گذرند متقاطع بوده و دارای دو مماس

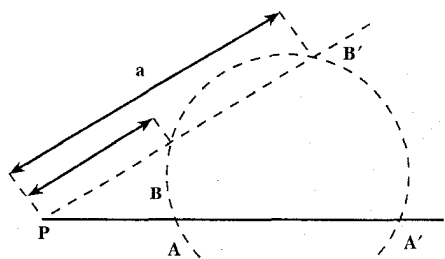
مشترک می‌باشند و مسأله پیوسته دارای دو جواب است.

۲۱۹. اگر P (شکل الف) قطب و a قوت انعکاس و A نقطه مفروض باشد و a را مثبت فرض کنیم، از P خطی دلخواه می‌کشیم و بر روی آن و در یک طرف P طولهای PB و PB' را بترتیب مساوی ۱ و a جدا می‌کنیم و بر A ، B و B' دایره‌ای می‌گذرانیم تا PA را در A' قطع کند؛ A' نقطه مطلوب، یعنی منعکس A است.

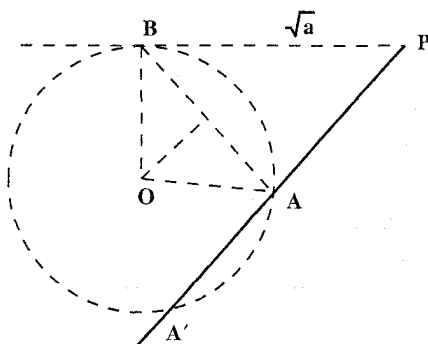
در صورتی که $a < 0$ باشد، $PB' = |a|$ را در جهت عکس PB جدا می‌کنیم. اگر a ، قوت انعکاس، مجذور کامل باشد، بر روی خطی که از P می‌گذرانیم (شکل پ) طول PB را مساوی جذر a جدا می‌کنیم؛ آن‌گاه از B عمودی بر BP اخراج می‌کنیم تا عمود منصف AB را در O قطع کند؛ دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OA رسم شود، PA را در A' قطع می‌کند و داریم: $PA \cdot PA' = PB^2 = a = a$ ؛ پس A' منعکس A است.



(الف)



(ب)



(پ)

۲.۲.۹. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲۲۰. فرض کنیم OAB مثلثی باشد که از D و ضلعهای

زاویه XOY تشکیل می‌شود. شکل را نسبت به

O و با قوت OH^2 مربع فاصله O

از D منعکس می‌کنیم. منعکس D دایره D به

قطر OH و منعکس دایره D محیطی

مثلث OAB خط $A'B$ است بنابه فرض زاویه

$\alpha A'OB'$ مساوی با $\alpha - \alpha^d$ (یعنی d)

قائم‌ه) است و پوش $A'B'$ دایره (ω) است که متحد‌المركز با دایره D به

قطر OH است (شکل). پوش دایره D محیطی مثلث AOB منعکس دایره

(ω) است که آن را رسم می‌کنیم، مرکز این دایره روی OH است و با خط OP یعنی

مماس رسم شده از قطب انعکاس O بر دایره (ω) در P' نیز مماس

است و داریم:

$$OP \cdot OP' = OH^2 = OC \times OC';$$

$$OC' = 2OP;$$

$$OP \cdot OP' = 2OC \times OP;$$

$$OP' = 2OC$$

اما

پس

و یا

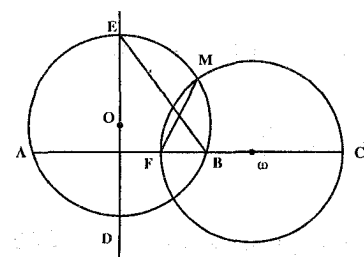
به این ترتیب P' به دست می‌آید. اگر I' (در شکل نیست) محل تلاقی OH با عمود

رسم شده از P' بر OP' باشد، پوش دایره D محیطی مثلث OAB دایره‌ای است به مرکز

I' و به شعاع $I'P'$.

۲۲۱. داریم:

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = K \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} = K \Rightarrow K = \frac{5}{9} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



۲۲۳. اگر نقطه دلخواهی از خط D عمود منصف

AB و (O) دایره محیطی مثلث ABE باشد،

داریم:

ثابت $\overline{CM} \cdot \overline{CE} - \overline{CB} \cdot \overline{CA}$ یعنی نقطه

M منعکس E با قطب C و

قوت ثابت $CA \cdot CB = K$ است، یا به عبارت دیگر مکان M منعکس خط D است و چون خط D از C قطب انعکاس نمی‌گذرد، در نتیجه منعکس خط D دایره‌ای است که از قطب انعکاس (نقطه C) گذشته و قطری از آن که از C می‌گذرد بر D عمود بوده و پاره خط AB را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند.

۲۲۴. اگر O قطب انعکاس باشد، بنابه فرض داریم:

$$(A'B', A'C') = 1 \text{ قائمه};$$

و یا

$$(A'B', OA) + (OA, A'C') = 1 \text{ قائمه}; \quad (۱)$$

اما AB و $A'B'$ نسبت به زوج (OA, OB) متباینند و داریم:

$$(A'B', OA) + (AB, OB) = 0;$$

$$(OA, A'C') + (OC, AC) = 0; \quad \text{و همچنین}$$

با جمع دو رابطه بالا و با استفاده از رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$(AO, OB) + (OC, AC) + 1 = 0;$$

با جمع (OB, OC) به طرفین رابطه بالا خواهیم داشت:

$$(OB, OC) = (AB, AC) + 1;$$

پس مکان O دایره‌ای است که از B و C می‌گذرد (شکل). فرض کنیم B_1 محل تلاقی AB و با عمود رسم شده از C بر AC باشد. B_1 روی دایره مزبور است، زیرا:

$$(B_1B, B_1C) = (AB, AC);$$

به همین ترتیب این دایره از محل تلاقی AC و عمود رسم شده از B بر AB می‌گذرد.

وقتی که A, B و C بر یک خط راست واقع باشند؛ $(AB, AC) = 0$ است، پس

۱ قائمه $(OB, OC) =$ و در این حالت مکان O دایره به قطر BC است.

۲.۲.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۲۲۵. ۱. چنانچه M نقطه‌ای از صفحه شکل و M' منعکس آن در انعکاس (S) و N و

N' بترتیب منعکسهای M و M' در انعکاس $(S_1 \text{ و } K_1)$ و A نقطه برخورد NN' با خط SS_1 باشد، در این صورت NN' منعکس دایره محیطی S_1MM' است. در صورتی که B محل تلاقی SS_1 با دایره محیطی S_1MM' باشد، داریم:

$$SM \cdot SM' = SB \cdot SS_1 = K = \text{مقدار ثابت}$$

که چون S_1 و S ثابت هستند، SB و در نتیجه نقطه B ثابت خواهد بود و چون NN' منعکس دایره S_1MM' است، می توان نوشت:

$$S_1B \cdot S_1A = S_1M \cdot S_1N = K_1 = \text{مقدار ثابت}$$

۲. اگر (O) مرکز دایره محیطی $MM'O'N$ به شعاع R در یک حالت خاص باشد، در نتیجه S_1A و از آن جا A ثابت است، یعنی NN' از نقطه ثابت A می گذرد.

$$\begin{cases} P_{S(O)} = SM \cdot SM' = SO^r - R^r = K \\ P_{S_1(O)} = S_1M \cdot S_1N = S_1O^r - R^r = K_1 \end{cases}$$

از کم کردن طرفین رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود :

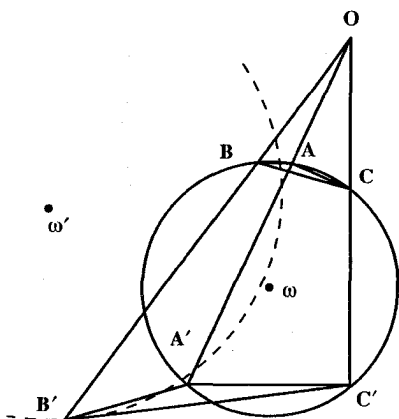
$$SO^{\gamma} - S_0O^{\gamma} = K - K_0 = \text{مقدار ثابت}$$

از ملاحظه این رابطه نتیجه می‌شود که مکان (O) که تفاضل مربعات فاصله‌هایش از دو نقطه ثابت S و S₁ مقداری است ثابت، خطی است مستقیم عمود بر S₁S که می‌توان پای عمود را از رابطه زیر به دست آورد :

$$IH = \frac{K - K_1}{2SS_1} = \frac{K_2}{2SS_2} \quad (I \text{ وسط } SS_1 \text{ و } H \text{ پای عمود است}).$$

۲۲۶. ۱. چنانچه (O) قطب انعکاس و K قوت انعکاس باشد، داریم:

$$\begin{cases} A'B' = \frac{|K| \cdot AB}{OA \cdot OB} \\ A'C' = \frac{|K| \cdot AC}{OA \cdot OC} \end{cases}$$



چنانچه مثلث $A'B'C'$ متساوی الساقین باشد، به نحوی که $A'B' = A'C'$ است، در این صورت، خواهیم داشت :

$$\frac{|K| \cdot AB}{OA \cdot OB} = \frac{|K| \cdot AC}{OA \cdot OC}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{OB}{OC} \quad \text{یا ثابت} \quad \frac{AB}{OB} = \frac{AC}{OC}$$

و یا

و چون مثلث ABC ثابت است، نقطه های B و C و نسبت $\frac{AB}{AC}$ ثابت است و از آن جا : ثابت

$\frac{OB}{OC}$ ، یعنی مکان (O) قطب انعکاس که فاصله هایش از دو نقطه ثابت B و C مقداری است

ثابت، دایره ای است که قطری از آن که بر BC می گذرد، پاره خط BC را به نسبت توافقی

تقسیم می کند و نقطه های تقاطعش پاهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه $\hat{A}$ است.

۲. در صورتی که بخواهیم مثلث متساوی الاضلاع باشد، یعنی داشته باشیم

$A'B' = BC = A'C'$ ، در این صورت چون می خواهیم : $A'B' = A'C'$ باشد، بنابه

حکم ۱. مکان (O) قطب انعکاس بر دایره ای به قطر پای نیمسازهای داخلی و خارجی

زاویه A روی BC است و برای این که $A'C' = B'C'$ باشد، مکان (O) قطب انعکاس

بایستی روی دایره ای به قطر پاهای نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه C باشد، پس

(O) روی محل تلاقی دو دایره مزبور است.

۳. بنا به خاصیت انعکاس چهارضلعیهای $ABB'A'$ و $ACC'A'$ محاطی است و

$\hat{A}_1 = \hat{B}$ و $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$ و چون $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$ فرض شده. لذا $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ$

است و از آن جا $\hat{B} + \hat{C} = 270^\circ$

است و در چهارضلعی $OBAC$

نتیجه می شود $\hat{A} + \hat{O} = 90^\circ$ یا

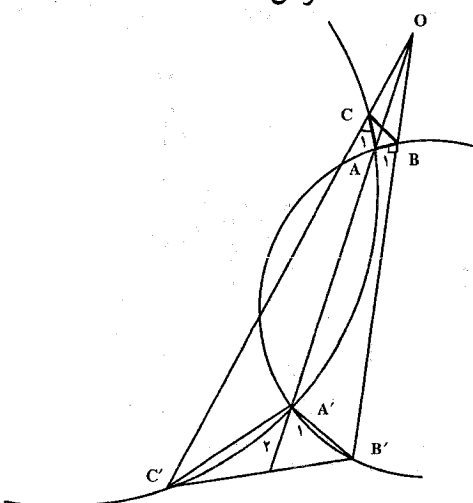
$\hat{O} = 90^\circ - \hat{A} = \alpha$ یعنی زاویه

$\hat{O}$ مقداری است ثابت و مکانش

کمان حاوی زاویه $\alpha = 90^\circ - \hat{A}$

و گذرنده بر نقطه های B و C

است.



۲۲۷. اول. خط AB نیمساز زاویه قائمه را در نقطه ثابتی قطع می کند. اگر سطح مثلثهای FOA و FOB را جمع کرده مساوی سطح مثلث OAB قرار دهیم خواهیم داشت:

$$OA \times OF \frac{\sqrt{2}}{2} + OB \times OF \frac{\sqrt{2}}{2} = OA \times OB$$

(زاویه های COA و COB هر کدام 45° می باشند) ولی از رابطه مفروض مسأله داریم:

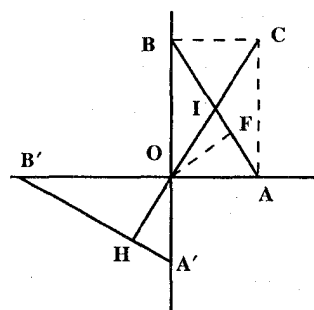
$$a(OA + OB) = OA \times OB$$

$$OF \frac{\sqrt{2}}{2} (OA + OB) = OA \times OB$$

پس:

معلوم می کند که $OF = a\sqrt{2}$ ، پس نقطه F ثابت است.

دوم. اگر ملاحظه شود که دو مثلث OAB و OA'B' نسبت به نیمساز دوم قرینه یکدیگرند، پس میانه مثلث OAB ارتفاع مثلث OA'B' می باشد، زیرا چون OI میانه OAB باشد، زاویه های OBI و BOI برابرند، پس امتداد OI زاویه HOA' را برابر

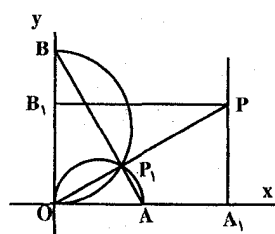


شکل IBO می دهد و چون IBO متمم BAO و پس متمم OA'B' است، پس خط OH ارتفاع OA'B' می باشد. از طرف دیگر روشن است که میانه OI مثلث OAB از نقطه C رأس مستطیل به قطر AB می گذرد، پس عمودی که از C بر A'B' فرود می آید از نقطه ثابت O می گذرد.

سوم. نیمدایره هایی به قطرهای OA و OB در نقطه P تلاقی می کنند. اگر شکل را به قطب O و قوتی دلخواه منعکس کنیم نیمدایره به قطر OA خطی مستقیم موازی

Oy به فاصله $OA_1 = \frac{k^2}{OA}$ و منعکس نیمدایره به قطر

OB خطی مستقیم موازی Ox به فاصله $OB_1 = \frac{k^2}{OB}$



خواهد بود. نقطه تلاقی این دو خط یعنی P_1 منعکس نقطه P می باشد. اگر مشاهده کنیم

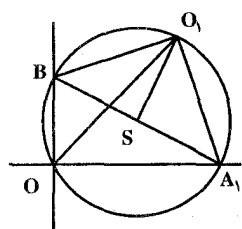
که $OA_1 + OB_1 = \frac{k^2}{a}$ مقداری است ثابت، پس مکان P خطی است مستقیم موازی

نیمساز خارج xOy، پس مکان P منعکس این خط دایره ای است که بر O مرور می کند

و مرکز آن بر نیمساز xOy قرار دارد.

چهارم. منعکس دایره محیطی مثلث OAB همان خط A_1B_1 قسمت قبل است که پایه‌های خطهای منعکس نیمدایره‌های به قطر OA و OB را به هم وصل می‌کند و این خط چنان است که:

$$OA_1 + OB_1 = \frac{k^2}{a}$$



مقداری است ثابت. چون دایره محیطی OB_1A_1 را رسم کنیم تا نیمساز xOy را در نقطه O_1 قطع کند مشاهده می‌شود که نقطه O_1 نقطه ثابتی است؛ زیرا اگر رابطه بطلیموس را برای چهارضلعی محاطی $O_1A_1OB_1$ بنویسیم خواهیم داشت:

$$O_1A_1 \cdot OB_1 + O_1B_1 \cdot OA_1 = A_1B_1 \cdot OO_1$$

ولی $O_1A_1 = O_1B_1$ زیرا قوسهای O_1A_1 و O_1B_1 برابرند (هر کدام 45°) و

$$OA_1 + OB_1 = \frac{k^2}{a} \text{ مقداری ثابت است، پس: } OO_1 = \frac{O_1A_1}{A_1B_1} \cdot \frac{k^2}{a} \text{ ولی } \frac{O_1A_1}{A_1B_1}$$

مقداری است ثابت، زیرا برابر است با $\frac{O_1A_1}{2SA_1}$ (S مرکز دایره محیطی OA_1B_1 یعنی

$$OO_1 = \frac{k^2 \sqrt{2}}{2a} \text{ ولى } \frac{O_1A_1}{SA_1} \text{ برابر } \frac{1}{\cos 45^\circ} \text{ یا } \sqrt{2} \text{ می باشد، پس } \frac{k^2 \sqrt{2}}{2a}$$

می باشد و نقطه O_1 نقطه ثابتی است ولی زاویه $B_1A_1O_1$ نیز مقداری ثابت برابر 45° می باشد، پس مسأله به یکی از مسأله‌های قبل برمی گردد؛ زاویه ثابت 45° (یعنی زاویه $B_1A_1O_1$) چنان حرکت می‌کند که رأس A_1 آن خط Ox را می‌پیماید و ضلع اول A_1O_1 آن بر نقطه ثابت O_1 مرور می‌کند. امتداد ضلع دوم A_1B_1 بر سهمی ثابتی که O_1 کانون آن است مماس می‌باشد.

پنجم. مماس مشترک دایره‌های قسمت ۳ یعنی خط M_1M_2 صاحب این خاصیت است که $O_1M_1 = O_1O$ و $O_2M_2 = O_2O$ می باشد، پس:

$$\frac{1}{O_1M_1} + \frac{1}{O_2M_2} = \frac{2}{a}$$

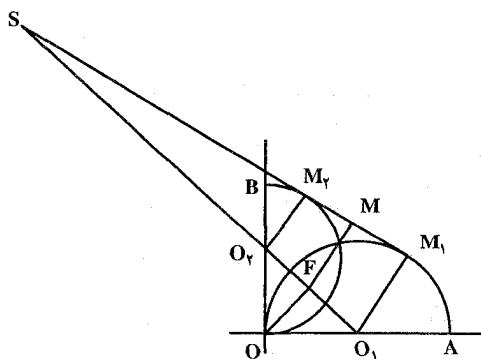
می باشد، زیرا $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{a}$ می باشد و O_1O و O_2O مرتباً نصف OA و OB

می‌باشند. از طرف دیگر چون خط O_1O_2 دارای همان خاصیت خط AB است، پس نقطه F که از تقاطع نیمساز xOy با O_1O_2 به دست می‌آید، نقطه ثابتی است. اگر عمود FM را بر M_1M_2 فرود آوریم، می‌شود ثابت کرد که FM طول ثابتی دارد. زیرا اولاً، اگر خط‌های M_1M_2 و O_1O_2 در نقطه S تلاقی کنند، نسبت قطعات $\frac{SO_2}{SO_1}$ برابر

$\frac{O_2M_2}{O_1M_1}$ است (به علت توازی O_2M_2 و O_1M_1) پس $\frac{SO_2}{SO_1} = \frac{OO_2}{OO_1}$ زیرا شعاع‌های:

$O_2M = OO_2$ و $O_1M = OO_1$ پس نقطه S بر روی نیمساز خارج xOy واقع است و نقطه‌های F و S نسبت به O_2 و O_1 مزدوج می‌باشند (همچنین M و S نسبت به M_1 و M_2 مزدوجند) پس لازم می‌آید که:

$$\frac{SO_1}{SO_2} = \frac{OO_1}{OO_2} \quad \text{و} \quad \frac{FO_1}{FO_2} = -\frac{OO_1}{OO_2}$$



باشد (خواص نیمسازهای داخل و خارج مثلث) حال از تشابه مثلث‌های SMF و MO_1S حاصل می‌شود

$$\frac{FM}{O_1M_1} = \frac{SF}{SO_1} \quad \text{و از تشابه}$$

مثلث‌های SMF و SM_2O_2

$$\text{رابطه:} \quad \frac{FM}{O_2M_2} = \frac{SF}{SO_2}$$

به دست می‌آید، چون دو رابطه را جمع کنیم حاصل می‌شود:

$$FM \left(\frac{1}{O_1M_1} + \frac{1}{O_2M_2} \right) = SF \left(\frac{1}{SO_1} + \frac{1}{SO_2} \right)$$

ولی چون نقطه‌های S, F, O_1 و O_2 مزدوجند، پس: $\frac{1}{SO_1} + \frac{1}{SO_2} = \frac{2}{SF}$ و چون

$$\frac{1}{O_1M_1} + \frac{1}{O_2M_2} = \frac{2}{a} \quad \text{پس:} \quad \frac{2FM}{a} = 2 \quad \text{و یا} \quad FM = a$$

همواره بر دایره‌ای به مرکز F و به شعاع a مماس می‌باشد.

۲۲۸. از روی شکل دیده می شود که :

$$\hat{A} + \hat{C} = \hat{O}AD - \hat{O}AB + \pi - \hat{O}CB + \pi - \hat{O}CD$$

و

$$\hat{A}' + \hat{C}' = \hat{O}A'B' - \hat{O}A'D' + \hat{O}C'B' + \hat{O}C'D'$$

چون چهارضلعیهایی نظیر $ABA'B'$ (متشکل از دو نقطه منعکس نسبت به هم) همه

$$\hat{O}AB = \hat{O}B'A' \quad \text{مطابق می باشند، پس:}$$

$$\hat{O}AD = \hat{O}D'A' \quad \text{و}$$

$$\hat{O}CB = \hat{O}B'C' \quad \text{و}$$

$$\hat{O}CD = \hat{O}D'C' \quad \text{و}$$

چون دو مقدار $\hat{A} + \hat{C}$ و $\hat{A}' + \hat{C}'$ را از هم کسر کنیم، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{C} - (\hat{A}' + \hat{C}') &= \hat{O}D'A' - \hat{O}B'A' + \pi - \hat{O}B'C' + \pi - \hat{O}D'C' - \\ &\quad \hat{O}A'B' + \hat{O}A'D' - \hat{O}C'B' - \hat{O}C'D' \end{aligned}$$

و با مراجعه به شکل ملاحظه می شود که :

$$\hat{O}D'A' + \hat{O}A'D' = \pi - \hat{A}'\hat{O}D' \quad \text{و} \quad \hat{O}B'A' + \hat{O}A'B' = \pi - \hat{A}'\hat{O}B'$$

$$\hat{O}B'C' + \hat{O}C'B' = \pi - \hat{B}'\hat{O}C' \quad \text{و} \quad \hat{O}D'C' + \hat{O}C'D' = \pi - \hat{C}'\hat{O}D'$$

$$\hat{A} + \hat{C} - (\hat{A}' + \hat{C}') = \pi - \hat{A}'\hat{O}D' - \pi + \hat{A}'\hat{O}B' + \hat{B}'\hat{O}C' + \hat{C}'\hat{O}D' \quad \text{پس:}$$

$$\hat{A} + \hat{C} - (\hat{A}' + \hat{C}') = \hat{A}'\hat{O}B' + \hat{B}'\hat{O}C' + \hat{C}'\hat{O}D' - \hat{A}'\hat{O}D' = 0 \quad \text{و یا}$$

پس $\hat{A} + \hat{C} = \hat{A}' + \hat{C}'$ و همچنین می شود ثابت کرد : $\hat{B} + \hat{D} = \hat{B}' + \hat{D}'$ (البته با در نظر گرفتن مجموع زاویه های چهارضلعی اگر شکل محدب باشد این رابطه اخیر خود به خود محقق است). از تشابه دو مثلث OAB و $OA'B'$ حاصل می شود :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{OA' \times OA}{OB \times OA}$$

و چون $OA \times OA' = k^2$ (قوت انعکاس) پس : $A'B' = \frac{k^2 \cdot AB}{OA \times OB}$ و همچنین

$$D'B' = \frac{k^2 \cdot DB}{OD \times OB} \text{ و } A'C' = \frac{k^2 \cdot AC}{OA \times OC}, \quad C'D' = \frac{k^2 \cdot CD}{OC \times OD}$$

را تشکیل دهیم، مشاهده می شود که :

$$\frac{AB \times CD}{AC \times BD} = \frac{A'B' \times C'D'}{A'C' \times B'D'}$$

اگر چهار نقطه A, B, C و D بر یک استقامت باشند، شکل $A'B'C'D'$ چهارضلعی محاطی خواهد بود و اگر خصوصاً نقطه های A, B, C و D دستگاه توافقی تشکیل دهند، در رابطه اخیر کسر طرف اول برابر (-1) است. در این صورت چهارضلعی $A'B'C'D'$ را چهارضلعی هارمونیک می نامند و صاحب خواصی است که در بعضی کتب هندسه مذکور است، مثلاً قطبی رأسهای پنجم و ششم چهارضلعی کامل نسبت به دایره محیطی چهارضلعی بر محل تلاقی قطرهای می گذرد و قطبی این نقطه اخیر قطر سوم است و دیگر خواص معروف. اگر شکل $DABC$ را منعکس کنیم مثلث $A_1B_1C_1$ به دست می آید و منعکس نقطه D در بینهایت دور خواهد بود، پس زاویه D صفر می شود، زیرا خطهای DA_1 و DC_1 (ضلعهای زاویه D) موازی می شوند و همچنین شکل $D'A'B'C'$ مثلث $A_1'B_1'C_1$ را به دست می دهد و منعکس D' در بینهایت دور و زاویه D' صفر خواهد بود. پس از رابطه: $\hat{D}_1 + \hat{B}_1 = \hat{D}'_1 + \hat{B}'_1$ حاصل می شود:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \quad (\text{زیرا } D_1 = D'_1 = 0) \text{ و رابطه:}$$

$$\frac{AB}{AC} \times \frac{CD}{BD} = \frac{A'B'}{A'C'} \times \frac{C'D'}{B'D'}$$

به علت اینکه D_1 و D'_1 در بینهایت دور قرار می گیرد به رابطه: $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A'_1B'_1}{A'_1C'_1}$ بدل می شود و دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A'_1B'_1C'_1$ در زاویه B_1 و B'_1 متساوی و در ضلعهای مجاور این زاویه متناسب خواهند بود، یعنی دو مثلث $A_1B_1C_1$ و $A'_1B'_1C'_1$ متشابه می باشند. اگر شکل اول $ABCD$ خط مستقیم می بود، با انعکاس به قطب D خط مستقیم دیگری حاصل می شد و چهارضلعی محاطی $D'A'B'C'$ با قطب D' مجدداً به خطی مستقیم دیگر تبدیل می شد، در این صورت زاویه های B_1 و B'_1 صفر می شدند و فقط تناسب $\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A'_1B'_1}{A'_1C'_1}$ به دست می آید.

۳.۲. انعکاس در مثلث

۱.۳.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۲۹. مثلث متساوی الساقین BO_1C را چنان رسم می‌کنیم که هر یک از دو زاویه B و C برابر

با $90^\circ - \hat{A} + \hat{D}$ باشد، همچنین مثلث متساوی الساقین CO_2A را چنان رسم می‌کنیم که هر یک از دو زاویه C و A برابر با $90^\circ - \hat{B} + \hat{E}$ باشد.

دایره‌های به مرکزهای O_1 و O_2 را رسم می‌کنیم که بر C بگذرد که در نقطه دیگری O برخورد خواهند داشت، نقطه O قطب انعکاس است و K قوت آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K^2 = \frac{OA \cdot OB \cdot DE}{AB}$$

۲.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۳۰. A'' و B'' منعکسهای A و B را با قطب

(O) و قوت $K = \overline{OC}^2$ تعیین می‌نماییم.

دایره‌های (C'_1) ، (C'_2) و (C'_3) بترتیب منعکسهای $\overline{CB''}$ ، $\overline{CA''}$ و $\overline{A''B''}$

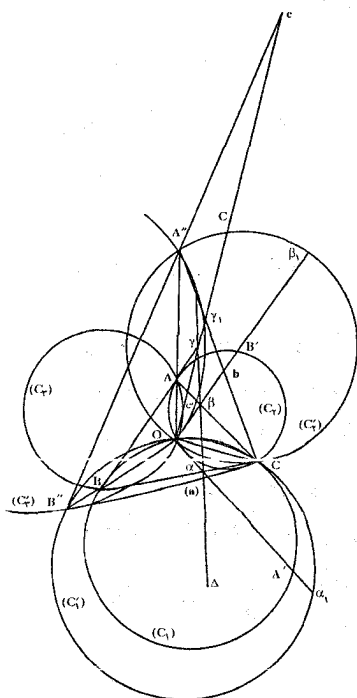
می‌باشند. چنانچه α_1 ، β_1 و γ_1 بترتیب

نقطه‌های برخورد $\overline{OA'}$ ، $\overline{OB'}$ و $\overline{OC'}$ با

دایره‌های (C'_1) ، (C'_2) و (C'_3) باشند،

نقطه‌های α_1 ، β_1 و γ_1 بترتیب منعکسهای

α ، β و γ بوده داریم:



$$O\alpha_1.O\alpha_1 = O\beta_1.O\beta_1 = O\gamma_1.O\gamma_1 = K = \overline{OC}^2 \quad (۱)$$

و چون α ، β و γ بر محور Δ واقعند منعکسهای آنها بر دایره‌ای قرار دارند که از (O) قطب انعکاس می‌گذرد، یعنی $O\alpha_1\beta_1\gamma_1$ بر یک دایره قرار دارند. اگر a ، b و c بترتیب نقطه‌های برخورد OA' ، OB' و OC' با CA'' ، CB'' و AB'' باشند، a ، b و c بترتیب منعکسهای A' ، B' و C' می‌باشند. چنانچه قوت نقطه‌های a ، b و c را بترتیب نسبت به دایره‌های (C'_1) ، (C'_2) و (C'_3) بنویسیم، داریم:

$$\begin{cases} P_{a(C'_1)} = aC. aB'' = aO. O\alpha_1 \\ P_{b(C'_2)} = bC. bA'' = bO. b\beta_1 \\ P_{c(C'_3)} = cA''. cB'' = cO. c\gamma_1 \end{cases}$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود طرف اول رابطه‌های بالا، قوت نقطه‌های a ، b و c نسبت به دایرهٔ محیطی مثلث $A''B''C$ و طرف دومشان قوت همان نقطه‌ها نسبت به دایرهٔ محیطی $O\alpha_1\beta_1\gamma_1$ بوده و در نتیجه چون a ، b و c نسبت به دو دایرهٔ $A''B''C$ و $O\alpha_1\beta_1\gamma_1$ متحدالقوت می‌باشند، بر محور اصلی آن دو دایره واقع می‌باشند، یعنی a ، b و c بر یک استقامت بوده که در نتیجه منعکسهای آنها (A' ، B' و C') بر یک دایره قرار دارند که از قطب انعکاس می‌گذرد و یا به عبارت دیگر A' ، B' و C' و O بر یک دایره قرار دارند.

۳.۳.۲. خطهای: موازی، هم‌مس، ...

۱.۳.۳.۲. خطها هم‌مسند

۲۳۱. مرکز ارتفاعی را به‌عنوان مرکز انعکاس برگزینید.

۲.۳.۳.۲. زاویه

۱.۴.۳.۲. اندازهٔ زاویه

۲۳۲. دو مثلث ABC و AB_1C_1 که نسبت به خط AS قرینه‌اند با هم برابرند و بنابر آن:

$$\hat{BSC}_1 = \hat{SBA} - \hat{SC}_1B = \hat{B} - \hat{C}$$

۵.۳.۲. پاره خط

۱.۵.۳.۲. رابطه بین پاره خطها

۲۳۴. ۱. اگر (O) دایره محیطی مثلث ABC و دایره های (ω)، (Δ) و (C) بترتیب دایره های

محیطی مثلثهای BHC، BHA و AHC باشند. چون $\hat{E}HK = \hat{B}HC$ و یا $\hat{B}HC + \hat{A} = 180^\circ$ است و دایره های (ω) و (O) از BC می گذرند و زاویه های BHC و $\hat{A}$ مکمل یکدیگر می باشند، پس دایره های (ω) و (O) و در نتیجه دایره های (O)، (ω)، (Δ) و (C) با هم برابرند.

۲. چون بنا به فرض: $HA.HA' = HB.HB' = HC.HC'$ است، می توان گفت A' ، B' و C' بترتیب منعکسهای A، B و C است با قطب H و قوت انعکاس.

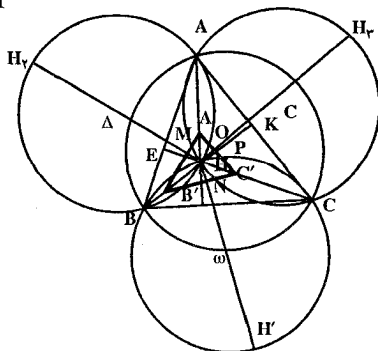
$$HA.HA' = HB.HB' = HC.HC' = K \quad (۱)$$

و در نتیجه $A'B'$ ، $B'C'$ و $A'C'$ بترتیب منعکسهای دایره های (ω)، (Δ) و (C) می باشند و از آنجا خطهای $A'B'$ ، $B'C'$ و $A'C'$ بترتیب بر قطرهای HH_1 ، HH_2 و HH_3 از دایره های (ω)، (Δ) و (C) عمود بوده و داریم:

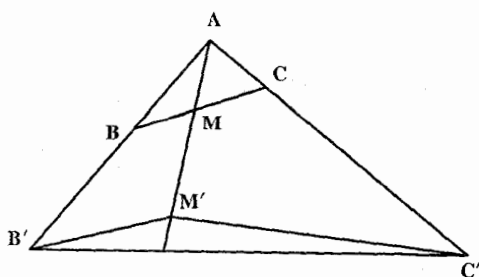
$$\begin{cases} HA.HA' = HM.HH_3 \\ HB.HB' = HN.HH_1 \\ HC.HC' = HP.HH_2 \end{cases}$$

از مقایسه این رابطه ها و فرض مسأله (رابطه (۱)) نتیجه می شود که $HM.HH_3 = HN.HH_1 = HP.HH_2$ (۲) و چون دایره های (O)، (ω)، (Δ) و (C) برابرند، قطرهایشان مساوی بوده و از آنجا رابطه (۲) به صورت زیر درمی آید:

$$HM = HN = HP$$



۶.۳.۲. رابطه‌های متریک



۲۳۵. در انعکاس به قطب انعکاس A و قوت انعکاس $k, k \neq 0$ منعکسهای ضلعهای AB, AC و میانه AM خطهای راستی است که بر AB, AC و AM قرار دارند. اگر منعکسهای نقطه‌های B, C و M در

انعکاس داده شده را بترتیب B', C' و M' بنامیم، داریم:

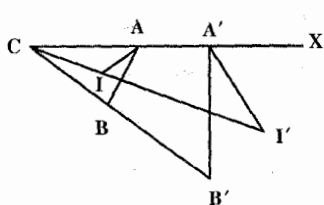
$$\overline{AB} \cdot \overline{AB'} = k \Rightarrow \overline{AB} = \frac{k}{\overline{AB'}}$$

$$\overline{AC} \cdot \overline{AC'} = k \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AB'} = \overline{AC} \cdot \overline{AC'} = \overline{AM} \cdot \overline{AM'} = k$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \frac{k}{\overline{AB'}} \text{ و } \overline{AC} = \frac{k}{\overline{AC'}} \text{ و } \overline{AM} = \frac{k}{\overline{AM'}}$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\overline{AB'}} + \frac{k}{\overline{AC'}} = \frac{3k}{\overline{AM'}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{AB'}} + \frac{1}{\overline{AC'}} = \frac{3}{\overline{AM'}}$$

۷.۳.۲. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند



۲۳۶. اگر I مرکز دایره محاطی مثلث ABC و I' مرکز دایره محاطی مثلث A'B'C' باشد دو مثلث CAI و CA'I' متشابه‌اند و $\hat{I}' = \hat{A}$ و $\hat{I} = \hat{A'}$

$$\hat{CA'I'} = \pi - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\hat{CA'I'} = \pi - \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{B}}{2} \text{ یا } \hat{CA'I'} = \pi - (\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2})$$

$$\hat{B'A'X} = \pi - \hat{B} \text{ و } \hat{I'A'X} = \pi - (\frac{\pi}{2} + \frac{\hat{B}}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{B}}{2}$$

$$I'\hat{A}'X = \frac{B'\hat{A}'X}{2}$$

بنابراین :

پس I' محل تلاقی نیمساز زاویه $\hat{C}$ و زاویه $B'\hat{A}'X$ است و در نتیجه مرکز دایره محاطی خارجی مثلث $CA'B'$ مماس به ضلع $A'B'$ است.

$$A'D = \frac{b^2 - c^2}{2a} \text{ و } A'S = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

۲۳۷. داریم :

۸.۳.۲. رسم شکلها

۲۳۹. می دانیم منعکس خط راستی که از قطب

انعکاس نگذرد، دایره ای است که بر قطب

انعکاس می گذرد. این دایره بر منعکس پای

عمودی که از قطب انعکاس بر آن خط رسم

می شود، می گذرد، بنابراین اگر پای عمودی

باشد که از G بر خط AB رسم می شود و H'

را منعکس نقطه H اختیار کنیم، دایره به قطر

GH' منعکس خط AB است. اما منعکس

پاره خط AB قوس $A'B'$ از این دایره است.

بنابراین، منعکسهای سه ضلع مثلث را رسم

می کنیم. سه کمان $A'B'$ ، $A'C'$ و $B'C'$

به دست می آید. مثلث منحنی الخط $A'B'C'$ منعکس مثلث ABC در انعکاس مشخص

شده است.

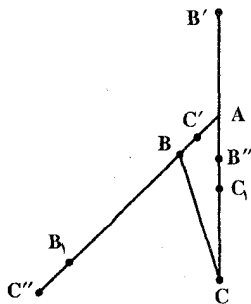
تبصره. به ازای مقدارهای مختلف k شکل حاصل را بررسی کنید.

۹.۳.۲. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۲۴۰. ابتدا ثابت می کنیم که دو دایره از سه دایره مثلاً دایره های $(B'B'')$ و $(C'C'')$ یکدیگر

را به زاویه ۱۲° قطع می کنند (شکل). دایره $(B'B'')$ از B می گذرد،

زیرا $B'\hat{B}B'' = 9^\circ$ و همچنین دایره $(C'C'')$ از C خواهد گذشت. این دو دایره را با

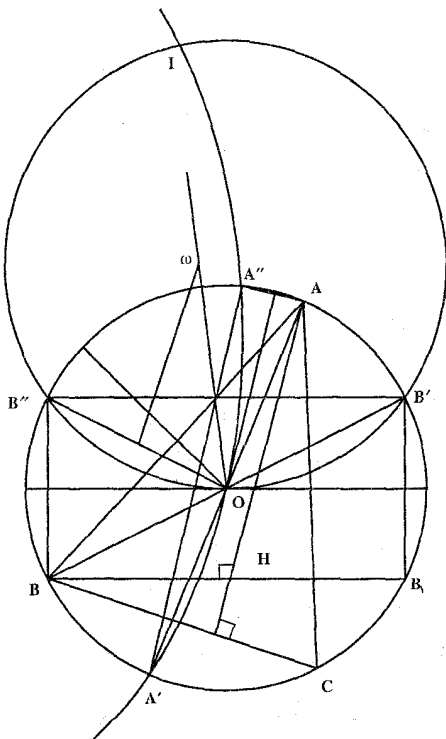


قطب A و با قوت دلخواهی منعکس می‌کنیم. فرض کنیم B_1 و C_1 منعکسهای B و C باشند. چون B' و B'' مزدوج AC می‌باشند. C_1 وسط قطعه منعکس $B'B''$ و در نتیجه مرکز دایره منعکس $(B'B'')$ است از طرف دیگر دایره منعکس $(B'B'')$ به مرکز C_1 از B_1 می‌گذرد و به همین ترتیب ثابت می‌شود که منعکس دایره $(C'C'')$ به مرکز B_1 از C_1 می‌گذرد. بنابراین منعکسهای دو دایره

$(B'B'')$ و $(C'C'')$ که به مرکزهای B_1 و C_1 می‌باشند، هر یک از مرکز دیگری می‌گذرد، پس یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. اگر M_1 یکی از این نقطه‌ها باشد، مثلث $M_1B_1C_1$ متساوی‌الاضلاع است، پس مماسهای در نقطه M_1 با هم زاویه 120° می‌سازند و چون انعکاس حفظ‌کننده زاویه‌ها است، دو دایره $(B'B'')$ و $(C'C'')$ یکدیگر را در نقطه M به زاویه 120° قطع می‌نمایند. اکنون ثابت می‌کنیم که دایره $(A'A'')$ نیز از نقطه تلاقی دایره‌های $(B'B'')$ و $(C'C'')$ می‌گذرد. چون M نقطه مشترک دو دایره اخیر است و می‌دانیم که دایره $(B'B'')$ مکان نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌های آنها از A و C برابر با $\frac{c}{a}$ است، پس: $\frac{MA}{MC} = \frac{c}{a}$ یا $a.MA = c.MC$ و به همین ترتیب، چون M روی دایره $(C'C'')$ نیز واقع است، پس $b.MB = a.MA$ از این دو رابطه نتیجه می‌شود که: $b.MB = c.MC$ و یا $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$ این رابطه نشان می‌دهد که M روی دایره $(A'A'')$ است.

۲.۳.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۲۴۱. اولاً. چنانچه B_1 قرینه B' نسبت به عمود منصف AC باشد، چهارضلعی $BB''B_1B'$ مستطیلی به مرکز (O) است. مرکز دایره محیطی مثلث متساوی‌الساقین $OB'B''$ روی عمود منصف $B'B''$ است و با توجه به طریقه تعیین $B''B'$ نتیجه می‌گیریم که $B'B''$ و در نتیجه BB_1 بر AC عمود است و لذا منعکس دایره محیطی مثلث $OB'B''$ (دایره ω) به قطب O و قوت $OB'^2 = OB^2 = R^2$ خطی است مستقیم که عمود بر عمود منصف $B'B''$ است و چون $OB'^2 = OB^2 = OB.OB'$ است، لذا نتیجه می‌گیریم که B منعکس B' از دایره محیطی $OB'B''$ است، پس BB_1 که ارتفاع h_b مثلث ABC



می‌باشد، منعکس دایره $OB'B''$ خواهد بود و به همین طریق ثابت می‌شود h_a و h_c بترتیب منعکسهای دایره‌های محیطی مثلثهای $OA'A''$ و $OC'C''$ می‌باشند که چون ارتفاعهای مثلث ABC در نقطه‌ای مانند H هم‌رسند، منعکسهای آنها یعنی دایره‌های محیطی مثلثهای $OA'A''$ ، $OB'B''$ و $OC'C''$ متقاطع بوده و نقطه تقاطعشان منعکس نقطه H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC می‌باشند که آن را I می‌نامیم.

ثانیاً. اگر A بر دایره محیطی مثلث ABC تغییر نماید، لیکن BC ثابت

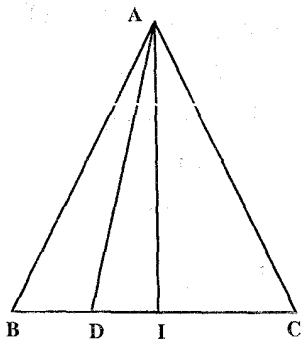
بماند، مکان نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC دایره‌ای است که این دایره قرینهٔ دایرهٔ (O) نسبت به BC می‌باشد یا به عبارت دیگر مکان H کمان درخور زاویهٔ $\alpha = \pi - \hat{A}$ گذرنده بر BC است، پس مکان I منعکس مکان H است و چون دایرهٔ مکان H از (O) نمی‌گذرد در نتیجه مکان I دایره‌ای است که از انعکاس دایرهٔ (H) با قطب (O) و قوت $OB^2 = OB'^2 = R^2$ به دست می‌آید.

۲۴۲. اگر AI ارتفاع مثلث باشد، مشاهده می شود که:

$$AB^{\gamma} - AD^{\gamma} = IB^{\gamma} - ID^{\gamma}$$

و بنابراین مساوی است با: $(IB - ID)(IB + ID)$ و یا $(IB - ID)(IB + CI)$ یعنی DB.CD که می‌توان با تغییر علامت عملهای BD.DC نوشت.

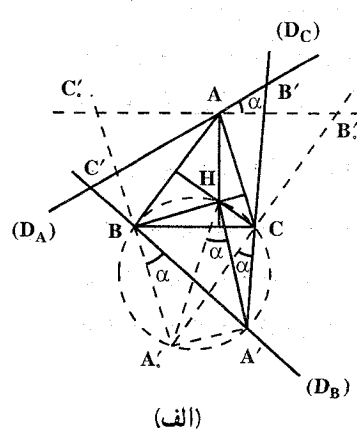
بنابراین $AB^2 = AD^2 + BD \cdot DC$. اگر
 $BC^2 + 2AD^2 = 4AB^2$ باشد، بنابراین
 $4B^2 + 2AD^2 = 4AB^2$ و $B^2 = AB^2$



$AD^2 = 2AI^2$ یعنی $AD^2 = 2(AB^2 - IB^2)$ و یا $2IB^2 + AD^2 = 2AB^2$ و چون $AD^2 = AI^2 + ID^2$ پس $AI = ID$ یعنی مثلث قائم الزاویه AID متساوی الساقین است، پس زاویه AD و BC برابر 45° می باشد. اگر بطور کلی $BC^2 + kAD^2 = 4AB^2$ باشد، چنین خواهیم داشت: $4IB^2 + kAD^2 = 4AB^2$ یعنی $kAD^2 = 4AI^2$ و یا $\frac{AI}{AD} = \frac{\sqrt{k}}{2}$ بنابراین $k < 4$ است و در این صورت اگر زاویه AD با BC برابر α

باشد، $\sin \alpha = \frac{\sqrt{k}}{2}$ می باشد. اگر نقطه های A و B ثابت بمانند، مکان نقطه C دایره ای

است به مرکز A و به شعاع AB و اگر $BD \cdot BC = a^2$ مقداری ثابت باشد، نقطه D منعکس مکان C را با انعکاسی به قطب B و قوت a خواهد پیمود و منعکس دایره ای به شعاع AB و به مرکز A با قطب B خطی مستقیم (زیرا B بر روی دایره مکان C قرار دارد) این خط مستقیم بر BA عمود است. اگر $BD \cdot DC$ مقداری ثابت باشد، بنابر رابطه اول: $AB^2 = AD^2 + BD \cdot DC$ طول AD ثابت باقی می ماند. مکان D دایره ای به مرکز A و به شعاع AD می باشد.



۲۴۳. هرگاه α در فاصله $(0, \pi)$ تغییر کند، مثلث

متغیر $A'B'C'$ تمام وضعهای ممکنه را اختیار می کند: در ازای $\alpha = \pi$ و $\alpha = 0$ مثلث متغیر

تبدیل به مثلث $A'B'C'$ و در ازای $\alpha = \frac{\pi}{2}$

تبدیل به نقطه H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC و مرکز دایره محیطی $A'B'C'$

می شود.

به صورت $(CA, D_B) = (AB, D_C) \mod \pi$

زیر نوشته می شود:

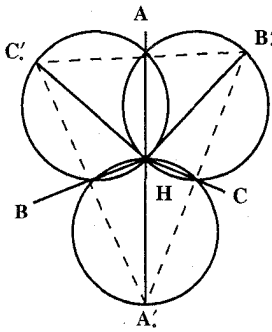
$$(BA', BA') = (CA', CA')$$

این تساوی نشان می دهد که چهار نقطه A', C, A' و A' Cocyclical می باشند، پس

A' روی دایره ثابت محیطی مثلث BCA' قرار دارد. زاویه های $A'BH$ و

$A'CH$ قائمه بود و نقطه H روی دایره مزبور واقع بود و نقطه متقاطر A'_H

می باشد. نقطه A' روی دایره ثابتی به قطر $A'H$ قرار دارد. α در



(ب)

فاصله $(\circ, \pi)$ تغییر می کند و خطی مانند D_B یک نیمدور حول B می چرخد و نقطه دیگر تقاطع این خط با دایره به قطر $A'H$ تمام این دایره را طی می کنند. مکان A' دایره به قطر HA' بوده (شکل ب) و همچنین مکان نقطه B' دایره به قطر HB' و مکان نقطه C' به قطر HC' است. از آنچه گفته شد نتیجه می شود (شکل الف):

$$(A'C, A'B) = (A'C, A'B) \bmod \pi$$

$$(A'B', A'C') = (A'B', A'C') \bmod \pi \quad \text{یعنی:}$$

$$(B'C', B'A') = (B'C', B'A') \bmod \pi \quad \text{و همچنین}$$

$$(C'A', C'B') = (C'A', C'B') \bmod \pi$$

زاویه های دو مثلث $A'B'C'$ و $A'B'C'$ متساوی اند و این دو مثلث مستقیماً متشابه یکدیگرند. مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC است در تجانسی که مرکزش نقطه G مرکز ثقل مشترک دو مثلث بوده و نسبت تجانس ۲- است (شکل پ) و مثلث $A'B'C'$

مستقیماً با مثلث ABC متشابه است و $\frac{A'B'}{AB}$ نسبت

تشابه مستقیم آنها است که ABC را به $A'B'C'$ تبدیل

می کند و این تشابه عبارت است از حاصلضرب تجانسی که ABC را به $A'B'C'$ تبدیل می کند و تشابه مستقیمی که $A'B'C'$ را به $A'B'C'$ بدل می نماید:

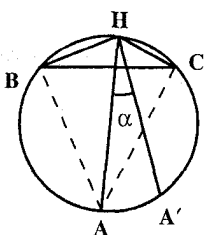
$$\frac{A'B'}{AB} = 2 \frac{A'B'}{A'B'}$$

می توان گفت که α که در فاصله $(\circ, \pi)$ تغییر می کند این دوره

تناوب معادل است که با دوره تناوب $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ در حالی که α

زاویه هسانی مستقیم Σ است که مثلث $A'B'C'$ را در مثلث $A'B'C'$ تغییر شکل می دهد. مرکز این همسانی نقطه H است که نقطه مشترک دایره های مکان $A'B'C'$ است. دایره هایی که

حاوی زاویه α بوده بترتیب از A' و A' ، B' و B' ، C' و

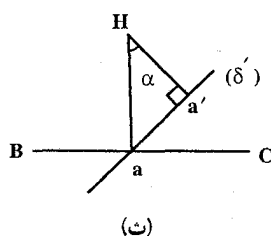


(ت)

C' می‌گذرند و نسبت این همسانی برابر است با (شکل ت): $\frac{A'B'}{A'B'} = \frac{HA'}{HA'} = \cos \alpha$ و بالاخره $\frac{A'B'}{AB} = 2 \cos \alpha$. اگر فاصله $(\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ مورد توجه نباشد، می‌توان نوشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = 2 |\cos \alpha| \quad \text{در مطالب بعد فرض می‌کنیم: } -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$$

ثانیاً. α زاویه (BC, D_A) ، (CA, D_B) و (AB, D_C) است که با شرطهای بالا اختیار می‌شود. همسانی $\Sigma(H; \alpha; \cos \alpha)$ مثلث $A'B'C'$ را به مثلث $A'B'C$ تبدیل می‌کند، دیدیم که H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC مرکز دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ می‌باشد. دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ در همسانی Σ تبدیل یافته دایره $(A'B'C')$ است که مرکزش H بوده و شعاع آن برابر است با: $HA' = HA' \cos \alpha$.

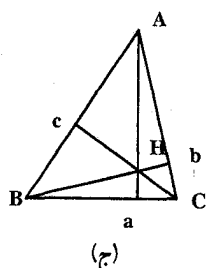


ثالثاً. فرض (δ') خط واصل بین وسطهای $A'B'$ و $A'C'$ باشد (شکل ث). (δ') در همسانی Σ تبدیل یافته خطی است که وسطهای $A'B'$ و $A'C'$ را به هم وصل می‌کند، یعنی خط BC . اگر a و a' تصویر نقطه H روی BC و (δ') باشند، بردار $\vec{Ha'}$ تبدیل یافته

بردار $\vec{Ha}$ در همسانی Σ است و داریم:

$$(\vec{Ha}, \vec{Ha'}) = \alpha \pmod{2\pi}, \quad \frac{Ha'}{Ha} = \cos \alpha;$$

رابطه‌های بالا نشان می‌دهند که مثلث Haa' در a' قائمه است، پس (δ') از نقطه ثابت a پای ارتفاع رأسهای A از مثلث ABC می‌گذرد (شکل ج). به همین ترتیب خطی که وسطهای $B'A'$ و $B'C'$ را به هم وصل می‌کند از پای ارتفاع رأس B و خطی که وسطهای $B'C'$ و $C'A'$ را به هم وصل می‌کند از پای ارتفاع رأس C از مثلث ABC می‌گذرد (شکل ج).



رباعاً. دیدیم که از مثلث ABC به مثلث $A'B'C'$ با یک تجانس به مرکز G و با نسبت -2 می‌توان رسید که آن را $H(G; -2)$ می‌نامیم. این تجانس یک همسانی مستقیم است به مرکز G و به زاویه π یا $(-\pi)$ و با نسبت 2 . از مثلث $A'B'C'$ به مثلث $A'B'C$ می‌توان با همسانی $\Sigma(H, \alpha, \cos \alpha)$ می‌توان رسید، پس از مثلث ABC به مثلث

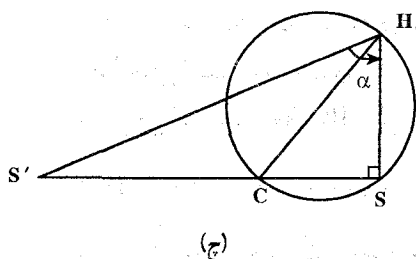
$A'B'C'$ با حاصلضرب دو همسانی مستقیم می توان رسید، یعنی با یک همسانی که مرکز S و زاویه اش $\alpha + \pi$ یا $(\alpha - \pi)$ و نسبت آن $2 \cos \alpha$ است. نقطه مضاعف از همسانی حاصلضرب بر حسب تغییراتش به شکل زیر مشخص می شود:

$$K(G; -2) \quad \Sigma(H; \alpha; \cos \alpha)$$

$$S \Rightarrow S' \Rightarrow S$$

S ، S' و G به قسمی قرار دارند که: $H. \overrightarrow{GS'} = 2 \overrightarrow{GS}$ ، S' و S به قسمی قرار دارند که

$$\begin{cases} (HS'; HS) = \alpha \pmod{2\pi} \\ \frac{HS}{HS'} = \cos \alpha \end{cases}$$



(چ)

این دو رابطه اخیر نشان می دهد که مثلث HSS' در رأس S قائمه است و رابطه مربوط به تجانس نشان می دهد که G روی قطعه خط SS' و در یک سوم آن از S واقع است. نقطه های ثابت H و G نقطه های متغیر S و S' (شکل چ) را تشکیل می دهند. زاویه های جهت دار

$\hat{S'HS}$ و $\hat{GHS}$ در یکجهت بوده و $\overrightarrow{SS'} = 3 \overrightarrow{SG}$ و $\tan \hat{GHS} = \frac{\tan \alpha}{3}$ و نقطه S

روی دایره ثابتی واقع است که قطر HG است. α در فاصله $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ و $\tan \alpha$ در

فاصله $(-\infty, +\infty)$ و $\tan \hat{GHS}$ نیز در همین فاصله و زاویه $\hat{GHS}$ در فاصله $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$

تغییر می کند و S تمام نقطه های دایره به قطر HG را می بیند. مکان S دایره به قطر HG

است. برای رسم S چون α در فاصله $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ مفروض است. زاویه φ را همجهت

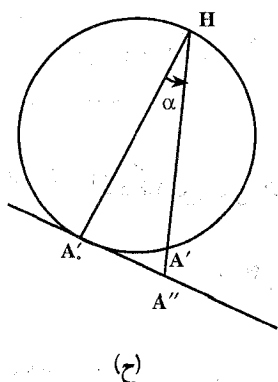
با α چنان می سازیم که $\tan \varphi = \frac{\tan \alpha}{3}$ و از مثلث قائم الزاویه $\hat{GHS}$ وتر GH و زاویه

جهتدار H که برابر است با φ معلوم است. مثلث به سهولت رسم می شود.

خامساً. نقطه A'' منعکس نقطه A' در انعکاس به مرکز H و به قوت HA' است. در

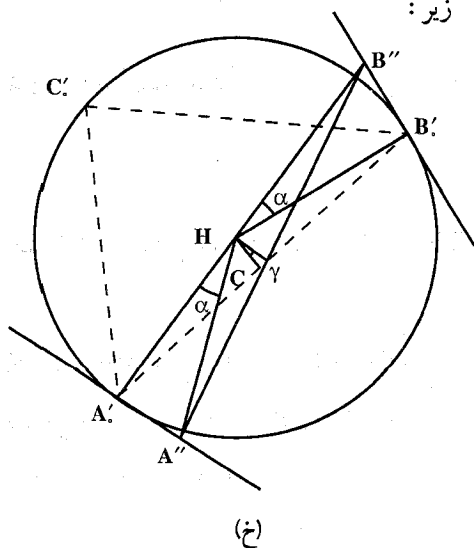
این انعکاس (شکل چ) نقطه A'' محل تقاطع خط HA' و منعکس دایره مکان A' یعنی دایره به قطر HA' می باشد؛ منعکس این دایره خطی است که در A' بر این دایره مماس بوده و ضمناً در A' بر دایره محیطی مثلث $A'B'C'$ مماس است و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} (HA', HA'') = \alpha \pmod{2\pi} \\ \frac{HA''}{HA'} = \frac{1}{\cos \alpha}; \end{cases}$$



و A'' تبدیل یافته A' در همسانی $\Sigma(H, \alpha, \frac{1}{\cos \alpha})$ می باشد. به همین ترتیب B'' منعکس B' در انعکاس بالا محل برخورد HB' با مماس دو نقطه B' بر دایره $(A'B'C')$ بوده و B'' تبدیل یافته B' در همسانی $\Sigma(H; \alpha; \frac{1}{\cos \alpha})$ و C'' منعکس C' در همان انعکاس محل برخورد HC' و خط مماس در C' بر دایره $(A'B'C')$ بوده و C'' تبدیل یافته C' در همسانی Σ می باشد. قطعه خط $A''B''$ تبدیل یافته $A'B'$ در این همسانی بوده و نقطه γ تبدیل یافته نقطه C وسط $A'B'$ است (شکل خ) رابطه های زیر:

$$\begin{cases} (\vec{HC}, \vec{H\gamma}) = \alpha \pmod{2\pi} \\ \frac{H\gamma}{HC} = \frac{1}{\cos \alpha}; \end{cases}$$



نشان می دهند که γ روی $A'B'$ واقع است و تمام آن را طی می کند وقتی که α از $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{4}$ تغییر کند. پوش $A''B''$ یک سهمی است که کانون آن H و مماس در رأس آن $A'B'$ است. همچنین پوش خطهای $B''C''$ و $C''A''$ سهمیهای به کانون H بوده که مماس در رأس آنها بترتیب $B'C'$ و $C'A'$ است. طریقه دیگری برای تعیین مکان γ . مثلث $HA''\gamma$ متشابه خود باقی می ماند (زیرا مثلث $HA''B''$ متشابه خود می ماند) (شکل خ). در همسانی به مرکز H و به زاویه $(\overrightarrow{HA''}; \overrightarrow{H\gamma})$ یا $(\overrightarrow{HA'}; \overrightarrow{HC})$ و با نسبت $\frac{H\gamma}{HA''} = \frac{HC}{HA'}$ نقطه A'' به نقطه γ تبدیل می شود. مکان A'' مماس در نقطه A' و مکان γ تبدیل یافته این مماس یعنی $A'B'$ است.

۴.۲. انعکاس در چندضلعی

۱.۴.۲. قطب انعکاس، قوت انعکاس

۲۴۶. قطب این انعکاس رأس A (محل برخورد BB' و DD') و قوت انعکاس برابر $AC^2 = 2a^2$ است. زیرا منعکس C بر خودش منطبق است و داریم:

$$AC^2 = AB \cdot AB' = AD \cdot AD'$$

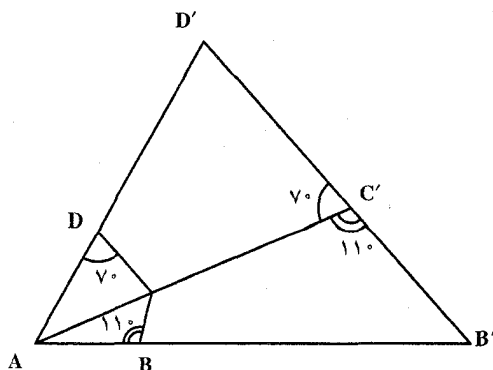
۲.۴.۲. نقطه های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۴.۲. نقطه ها همخطند

۲۴۷. چهارضلعیهای $BB'C'C$ و $DCC'D'$ محاطی اند و داریم: $\hat{CC'D'} = \hat{ADC}$ و $\hat{B'C'C} = \hat{ABC}$ از آن جا:

$$B'C'D' = B'C'C + CC'D' = \hat{ABC} + \hat{ADC}$$

اما به دلیل محاطی بودن چهارضلعی $ABCD$ ، $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ$ است، پس $B'C'D' = 180^\circ$ یعنی نقطه های B' ، C' و D' همخطند.



۳.۴.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۴.۲. خطها موازی اند

۲۴۸. چون $OA = OC'$ و $OB = OD$ است، پس $OC' = OA'$ و $OD' = OB'$ و $\angle A'OB' = \angle C'OD' = 90^\circ$ است، پس دو مثلث $OA'B'$ و $OC'D'$ هم‌نهشتند، از آن‌جا، $\hat{B}' = \hat{D}'$ است، پس $A'B' \parallel C'D'$ می‌باشد.

۴.۴.۲. زاویه

۱.۴.۴.۲. اندازه زاویه

۲۴۹. چهار ضلعیهای $BB'C'C$ و $CC'D'D$ محاطی‌اند، بنابراین

$$\hat{CC'D'} = \hat{ADC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \text{ و } \hat{B'C'C} = \hat{ABC} = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

است، بنابراین زاویهٔ محذب $B'C'D' = 360^\circ - 190^\circ = 170^\circ$ ، و زاویهٔ

$$\hat{B'C'D'} = 70^\circ + 120^\circ = 190^\circ, \text{ مفر } B'C'D'$$

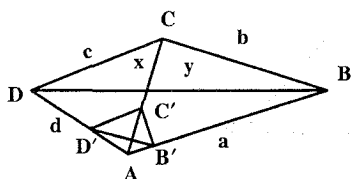
۵.۴.۲. پاره خط

۱.۵.۴.۲. رابطهٔ بین پاره خطها

۲۵۰. نقطهٔ برخورد AC و BD را Q و نقطهٔ تقاطع AD و BC را R می‌نامیم. ثابت کنید EF

با QR موازی است و دستگاه (Q - PRAD) توافقی است.

۶.۴.۲. رابطه‌های متر



۲۵۱. A را قطب انعکاس اختیار نموده و با قوت

اختیاری k شکل را تبدیل می‌کنیم. دایره‌های

دارای (ABC)، (ADC)، (ABD)، و (CBD) دارای

منعکسهای (B'C')، (C'D')، و (B'D') و

دایره (C'B'D') می‌باشند. بنا به فرض نتیجه

می‌گیریم که (B'C') و (C'D') بر هم عمودند، پس B'D' قطر دایره (C'B'D')

است و بر این قطر عمود است، بنابراین دایره‌های (ABD) و (CBD) بر هم عمودند

(شکل).

فرض کنیم a, b, c, d, x و y طولهای ضلعهای قطرهای چهارضلعی باشند، داریم:

$$B'C' = \frac{k \cdot b}{ax} ; C'D' = \frac{k \cdot c}{dx} ; B'D' = \frac{k \cdot y}{ad} ;$$

$$B'C'^2 + C'D'^2 = B'D'^2 ; \quad \text{اما}$$

$$\frac{b^2}{a^2 x^2} + \frac{c^2}{d^2 x^2} = \frac{y^2}{a^2 d^2} ; \quad \text{پس:}$$

$$b^2 d^2 + a^2 c^2 = x^2 y^2 \quad \text{و یا}$$

۲۵۲. دایره دلخواه به مرکز A را دایره انعکاس می‌گیریم. منعکسهای B, C و D عبارتند از

B', C' و D' که C' بر B'D' واقع نخواهد بود، مگر آن که AC || BD باشد.

نابرابری B'C' + C'D' ≥ B'D' معادل خواهد بود با:

$$\frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD} \geq \frac{BD}{AB \cdot AD}$$

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD \geq AC \cdot BD$$

۷.۴.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۲۵۳. چون $AC = a\sqrt{2}$ و $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ است، پس

$OA^2 = OB^2 = OC^2 = OD^2 = \frac{a^2}{4}$ می باشد، بنابراین منعکسهای نقطه های A, B, C و D بر خودشان منطبقند.

۸.۴.۲. رسم شکلها

۲۵۴. فرض کنیم لوزی $MNPQ$ (شکل) در متوازی الاضلاع $ABCD$ محاط است. مرکز لوزی بر مرکز متوازی الاضلاع منطبق است. مساحت لوزی عبارت است از:

$$\frac{1}{2} PM \times NQ = 2 OM \times ON ;$$

و بنا به فرض $N.OM \times ON = k^2$ را چنان بنا می کنیم که این رابطه محقق باشد و برای این منظور روی OM نقطه M' را چنان تعیین می کنیم که $OM \times OM' = k^2$ از آنجا $OM = OM'$ و $ON = OM'$ روی منعکس BC نسبت به O واقع است، قوت انعکاس k^2 است، پس M' روی دایره به قطر OE' است و E' روی عمود OE که بر BC رسم می شود قرار دارد. به قسمی که $OE \times OE' = k^2$ ؛ پس N در محل برخورد CD با دایره حاصل از دوران دایره به قطر OE' حول نقطه O به اندازه $\pm 90^\circ$ واقع است. پس از تعیین N ، لوزی به سهولت رسم می شود.

۲۵۵. دورانی به زاویه 90° درجه را در نظر می گیریم که مربع را به خودش تبدیل کند. در این صورت، خطهای راست AK, BK, CK و DK درست روی عمودهایی قرار می گیرند که رسم کرده بودیم. در نتیجه نقطه K به نقطه مشترک این عمودها می رود.

۹.۴.۲. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

۲۵۶. نقطه های B', C' و D' منعکسهای B, C و D را با قطب A و قوت دلخواه k تعیین می نماییم و در نتیجه داریم:

$$D'C' = \frac{DC \cdot k}{AD \cdot AC} \quad (۱) \text{ و } B'C' = \frac{BC \cdot k}{AB \cdot AC} \quad (۲) \text{ و } B'D' = \frac{DB \cdot k}{AB \cdot AD} \quad (۳)$$

$$BD \cdot AC = BC \cdot AD + AB \cdot DC$$

و بنا به فرض داریم:

چنانچه طرفین رابطه آخر را بر $AC \cdot AB \cdot AD$ تقسیم کنیم، نتیجه می شود :

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} = \frac{CD}{AC \cdot AD} + \frac{BC}{AB \cdot AC} \quad (۴)$$

از مقایسه رابطه های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می شود که $B'D' = B'C' + C'D'$ و از ملاحظه این رابطه نتیجه می گیریم که نقطه های B' ، C' و D' بر یک استقامت واقعند و چون B' ، C' و D' بر یک استقامت واقعند لذا منعکسهای آنها بر یک دایره واقعند که بر نقطه A قطب انعکاس می گذرد، یعنی نقطه های A ، B ، C و D بر یک دایره واقعند و یا به عبارت دیگر چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

۳.۴.۱۰. مسأله های ترکیبی

۲۵۷. ۱. چون A ، D و O روی یک خطند، پس A' و D' هم روی همین خط قرار دارند. همین طور پنج نقطه B' ، C' ، C ، B و O همخطند.

۲. چهارضلعی $ABCD$ محاطی است، بنابراین $\hat{A} = \hat{C}$ است، از طرفی چهارضلعی $CDD'C'$ محاطی می باشد، پس $\hat{C} = \hat{D}'$ است، در نتیجه $\hat{A} = \hat{D}'$ و از آن جا نتیجه می شود که $AB \parallel C'D'$ می باشد، موازی بودن $A'B'$ و CD به روش مشابه ثابت می شود.

۳. چهارضلعی $ABB'A'$ محاطی است. بنابراین $\hat{A} = \hat{B}'$ است. در نتیجه $\hat{D}' = \hat{B}'$ یعنی چهارضلعی $A'B'C'D'$ محاطی است.

۲.۵.۵. انعکاس در دایره

۲.۵.۱. مرکز انعکاس، قوت انعکاس

۲۵۸. سه دایره منعکس بر خط مفروض S عمودند، پس S منعکس دایره ای است که از مرکز انعکاس مطلوب می گذرد و بر سه دایره مفروض عمود است، یعنی O نقطه ای روی دایره متعامد (R) برای سه دایره مفروض است، پس اگر (R) حقیقی باشد، O یکی از دو انتهای قطر عمود بر S در دایره (R) است.

۲۵۹. فرض کنیم r و r' شعاع دو دایره مفروض و r_1 و r'_1 شعاع منعکسهای آنها نسبت به

قطب P و k قوت انعکاس و P و P' قوتهای نقطه P نسبت به دو دایره مفروض (C) و (C') باشد، داریم:

$$\frac{r_1}{r} = \left| \frac{k}{P} \right| \text{ و } \frac{r'_1}{r'} = \left| \frac{k}{P'} \right|$$

و برای این که $r_1 = r'_1$ باشد، باید $\left| \frac{P}{P'} \right| = \frac{r}{r'}$ یا $\frac{P}{P'} = \pm \frac{r}{r'}$ پس P مکان نقطه‌هایی است

که نسبت قوتهای آنها نسبت به دو دایره (C) و (C') برابر است با $\frac{\pm r}{r'}$ و برای تعیین

این مکان فرض کنیم $\pm \frac{r}{r'} = \lambda$. اگر O و O' مرکزهای دو دایره مفروض باشند، داریم:

$$\overline{PO}^2 - \lambda \overline{PO'}^2 - \lambda r'^2 \quad (۱) \text{ و } \frac{\overline{PO}^2 - r^2}{\overline{PO}^2 - r'^2} = \lambda$$

اگر O'' نقطه غیر مشخص از OO' باشد، به موجب رابطه استوارت داریم:

$$\overline{PO}^2 \cdot \overline{O'O''} + \overline{PO'}^2 \cdot \overline{O''O} + \overline{PO''}^2 \cdot \overline{OO'} + \overline{OO'} \cdot \overline{O'O''} \cdot \overline{O''O} = 0 \quad (۲)$$

فرض کنیم $OO' = d$ و O'' را چنان اختیار می‌کنیم که: $O''O' = \frac{O''O}{-\lambda} = \frac{-d}{1-\lambda}$

از آنجا $OO'' = \frac{-d}{1-\lambda}$ و $O''O = \frac{\lambda d}{1-\lambda}$ و در این رابطه (۲) چنین می‌شود:

$$\frac{\overline{PO}^2 - \lambda \overline{PO'}^2}{\lambda - 1} + \overline{PO''}^2 - \frac{\lambda d^2}{(1-\lambda)^2} = 0$$

با توجه به رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\overline{PO''}^2 = \frac{\lambda d^2}{(\lambda - 1)^2} - \frac{r^2 - \lambda r'^2}{\lambda - 1} = \frac{r'^2 \lambda^2 + (d^2 - r^2 - r'^2) \lambda + r^2}{(\lambda - 1)^2}$$

به جای λ مقدارش $\frac{r}{r'}$ و $-\frac{r}{r'}$ قرار می‌دهیم، خواهیم داشت:

$$\overline{PO''}^2 = \frac{r r' [d^2 - (r - r')^2]}{(r - r')^2} \quad (۳) \text{ و } \overline{PO''}^2 = \frac{r r' [(r + r')^2 - d^2]}{(r + r')^2} \quad (۴)$$

پس مکان P از دو دایره به مرکز O'' تشکیل می‌شود که O'' از رابطه $\frac{O''O}{O''O'} = \pm \frac{r}{r'}$

مشخص می‌شود، یعنی O'' یکی از مرکزهای تجانس دو دایره (C) و (C') است و

مربع شعاع این دو دایره از رابطه‌های (۳) و (۴) به دست می‌آیند. برای این که دایره مربوط به رابطه (۳) موجود باشد، باید $|r - r'| > d$ یعنی (C) با (C') نباید متداخل باشد. برای این که دایره مربوط به رابطه (۴) موجود باشد، باید $d < r + r'$ ، یعنی (C) با (C') نباید متخارج باشد، پس نتیجه می‌گیریم که اگر دو دایره (C) و (C') متقاطع باشند، مکان P از دو دایره تشکیل می‌شود و اگر متداخل و متخارج باشند، مکان P یک دایره خواهد بود و اگر (C) و (C') با هم مماس باشند، مکان P به نقطه تماس تبدیل می‌شود و مسأله در این حالت غیرممکن است، زیرا (C) و (C') به دو خط تبدیل می‌شوند.

۲۶۰. فرض کنیم I قطب انعکاسی باشد که دو دایره C و C' را در این انعکاس به دو دایره منطبق‌المرکز C و C' تبدیل کند. از مرکز مشترک این دو دایره دو خط a و b را رسم می‌کنیم این دو خط بر دو دایره C و C' عمودند، پس آنها منعکس دو دایره A و B خواهند بود که بر دایره‌های C و C' عمودند و از I می‌گذرند، پس این نقطه I یکی از نقطه‌های مشترک دستگاه دایره‌های عمود بر C و C' است. بالعکس نقطه I که این چنین به دست می‌آید، منعکسهای C و C' نسبت به آن دو دایره عمود بر دو خط متقاطع خواهند بود، یعنی مرکز آنها نقطه تلاقی این دو خط است. برای این که مسأله ممکن باشد، لازم است دستگاه دایره‌های عمود بر دو دایره C و C' در دو نقطه مشترک باشند، به عبارت دیگر C و C' نقطه مشترک نداشته باشند، با این شرط مسأله دو جواب خواهد داشت.

۲۶۱. چنانچه (O) مرکز مشترک دایره‌های (C) و (C') به شعاعهای R و R' و S قطب انعکاس و k قوت انعکاس و d فاصله OS و (C_۱) و (C'_۱) بترتیب منعکسهای دایره‌های (C) و (C') باشند. بنا به خاصیت انعکاس داریم:

$$r = R \left| \frac{k}{P_{S(C)}} \right| = R \left| \frac{k}{d^2 - R^2} \right| \quad (۱)$$

$$r' = R' \left| \frac{k}{P_{S(C')}} \right| = R' \left| \frac{k}{d^2 - R'^2} \right| \quad (۲)$$

و برای این که دایره‌های (C_۱) و (C'_۱) مساوی باشند، بایستی داشته باشیم: $r = r'$ یا $R \left| \frac{k}{d^2 - R^2} \right| = R' \left| \frac{k}{d^2 - R'^2} \right|$ که فقط $d^2 = \pm RR'$ یا $d = \sqrt{RR'}$ قابل قبول بوده که در نتیجه با معلوم بودن $d = \sqrt{RR'}$ می‌توان نقطه S قطب انعکاس و با استفاده

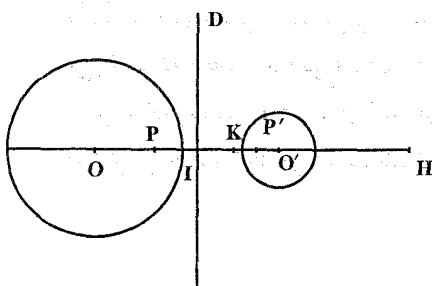
از رابطه‌های (۱) و (۲)، r و r' و از آن‌جا دایره‌های (C') و (C) را تعیین نمود.

۲۶۲. قوت مرکز انعکاس مطلوب S ، نسبت به هر یک از دایره‌های مفروض باید برابر ثابت انعکاس K باشد؛ پس سه قوت باید برابر باشند، یعنی S باید مرکز اصلی سه دایره مفروض باشد. همچنین ثابت انعکاس باید با قوت S نسبت به دایره‌های مفروض برابر باشد. مسأله یک و تنها یک جواب دارد. اگر مرکزهای سه دایره مفروض همخط باشند، بسته به این که دایره‌ها هم محور باشند یا نباشند، مسأله یا بی‌نهایت جواب دارد یا جواب ندارد.

۲.۵.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره....

۱.۲.۵.۲. نقطه‌ها همدایره‌اند

۲۶۴. از این ویژگی استفاده کنید که هرگاه یک نقطه از دایره نیمساز دو دایره را قطب انعکاس اختیار کنیم، این دایره به یک خط و دو دایره به دو دایره تبدیل می‌شوند که نسبت به آن خط قرینه‌اند.



۲.۲.۵.۲. نقطه‌ها به تقسیم توافقی‌اند

۲۶۵. (O) و (O') دو دایره مفروض و I پای محور اصلی D و P و P' قطبهای D نسبت به دو دایره H و K مرکزهای تجانس آنها است. می‌خواهیم ثابت کنیم که P و P' نسبت به HK مزدوج توافقی می‌باشد. می‌دانیم که دایره به قطر HK متعلق به دستگاه دایره‌های (O) و (O') است. منعکس نقطه‌های O, O', K و H را نسبت به I و با قوتی برابر قوت مشترک نقطه I نسبت به دایره‌های مزبور به دست می‌آوریم. نقطه‌های P, P', K و H به دست می‌آیند و چون H و K مزدوج OO' می‌باشند، K و H مزدوج PP' خواهند بود.

۳.۲.۵.۲. نقطه‌ها غیرمتناظرند

۲۶۶. ثابت کنید خط واصل بین این نقطه‌های متناظر از مرکز تجانس دو دایره می‌گذرد.

۳.۵.۲. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۵.۲. خطها بر هم عمودند

۲۶۷. آنها در مرکز دایره بر هم عمودند.

۴.۵.۲. زاویه

۱.۴.۵.۲. اندازه زاویه

۲۶۸. با رسم شکل در حالت اول حکم بسادگی محقق می‌شود. در حالت دوم با فرض $a=b$

و $c=2p$ داریم:

$$\text{ch} 2\delta = \frac{(2p)^2 - b^2 - b^2}{2b^2} = 2\left(\frac{p}{b}\right)^2 - 1$$

۲۶۹. اگر سه نقطه جدا از هم به فاصله‌های a ، b و c از هم باشند، به مرکزهای این سه نقطه سه

دایره دو به دو مماس بر هم می‌توان رسم کرد که شعاعهای آنها $s-a$ ، $s-b$ و $s-c$

می‌باشند که s نصف مجموع $a+b+c$ است. دو دایره مماس بر این سه دایره که نقطه

مشترک ندارند، دایره‌های سدی نامیده می‌شوند. دایره‌های سدی همان دایره‌های چستان

اشتینر در حالت $n=3$ می‌باشند. بنابراین:

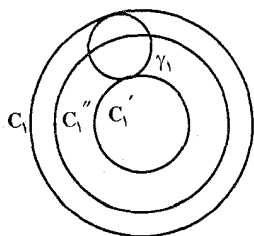
$$\text{ch} \frac{\delta}{3} = \sec \frac{\pi}{3} = 2$$

۲۷۰. اتحاد مثلثاتی زیر را در نظر گرفته و در آن θ را با $\frac{r}{n} + \frac{r}{n}$ جانشین سازید:

$$\frac{1}{\sin \theta} - \cot \theta = \tan \frac{\theta}{3}$$

۲۷۱. با توجه به این که محور اصلی دو دایره به معادله $x=0$ است، خواهیم داشت:

$$\text{ch} \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 - d^2}} \quad \text{و} \quad \text{ch} \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - d^2}}$$



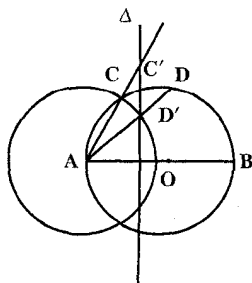
۲۷۲. فرض کنید C و C' متقاطعند، بنابراین هر دایره C'' که متعلق به دستگاه تشکیل شده از C و C' باشد از نقطه‌های تقاطع آنها می‌گذرد. یکی از نقطه‌های تقاطع را قطب انعکاس اختیار می‌کنیم. با قوت دلخواهی شکل را منعکس می‌نماییم. دایره‌های C ، C' و C'' به سه خط

همرس C_1 ، C'_1 و C''_1 تبدیل می‌شوند و دایره متغیر γ به دایره متغیر γ_1 که از یک نوع به خطهای C_1 و C'_1 مماس خواهد بود، تبدیل می‌شود و به علت تجانس هر خط مانند C''_1 دایره γ_1 را به زاویه‌های مساوی قطع می‌کند و چون انعکاس حفظ‌کننده زاویه‌ها است، C'' هر دایره مانند γ را به زاویه‌های مساوی قطع خواهد کرد. وقتی که C و C' بر هم مماس باشند، استدلال به طریق بالا است. اکنون فرض می‌کنیم C و C' نقطه مشترکی نداشته باشند. در این حالت قطب انعکاس را یکی از نقطه‌های حد دستگاه دایره‌های C و C' اختیار می‌کنیم. دایره‌های C و C' و هر دایره C'' متعلق به دستگاه به دایره‌های متحد‌المرکز C_1 ، C'_1 و C''_1 تبدیل می‌شوند و منعکس دایره‌ای مانند γ دایره‌ای مانند γ_1 خواهد بود که با C_1 و C'_1 از یک نوع مماس می‌باشد. این دایره γ_1 دایره C''_1 را به زاویه ثابتی قطع می‌کند، زیرا می‌توان با دورانی حول مرکز C''_1 از یک دایره، دایره دیگر را به دست آورد. پس هر دایره مانند C'' با دایره مانند γ زاویه ثابتی می‌سازد (شکل).

۵.۵.۲. پاره خط

۱.۵.۵.۲. رابطه بین پاره خطها

۲۷۳. دایره (O) منعکس خط Δ نسبت به نقطه A است و چهارضلعی $CC'DD'$ محاطی است، پس می‌توان نوشت: $AC \cdot AC' = AD \cdot AD'$ و AC با AD' برابر است، پس $CC' = DD'$ و از آن جا: $AC' = AD$.



۲.۵.۶. رابطه‌های مترى

۲۷۴. حاصلضرب آنها برابر با K^2 است.

۲۷۵. هرگاه O مرکز دایرة ω باشد، دو مثلث OAP و OPA' متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{OA}{OP} = \text{ثابت}$$

$$\Delta B''BC: \frac{B''B'}{B''B} = \frac{B'M}{B'C} \text{ و } \Delta BC''C: \frac{C''C'}{C''C} = \frac{C'M}{BC}$$

$$B'M = C'M \Rightarrow \frac{B''B'}{B''B} = \frac{C''C'}{C''C} \Rightarrow B''C'' \parallel BC$$

۲۷۶. فرض کنیم خط AB در نقطه T بر دایرة (C) مماس است. نقطه‌های A، B و T بر یک

استقامتند، پس یکی از سه طول AB، AT و BT برابر با مجموع دو مقدار دیگر است

اما $AT = \sqrt{\alpha}$ و $BT = \sqrt{\beta}$. پس یکی از سه مقدار AB، $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ برابر مجموع

دو مقدار دیگر است. بعکس اگر این شرط برقرار باشد، دایره‌های به مرکزهای A و B

و به شعاع $\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\beta}$ بر هم مماسند و علاوه بر آن این دو دایره بر دایرة (C) عمود

می‌باشند. به این ترتیب دایرة (C) بر دایره‌های (A) و (B) که با هم مماسند، عمود

می‌باشد. از این جا نتیجه می‌شود که دایرة (C) مماس است بر خط‌المركزین AB.

۲۷۷. فرض کنیم (Γ) در قسمت خارجی (Γ') واقع باشد و سه نقطه A، B و C روی (Γ)

را در نظر می‌گیریم. A را قطب انعکاس و قوت آن را (که $\alpha\beta$ می‌نامیم) نسبت به (Γ')

قوت انعکاس اختیار می‌کنیم. منعکس (Γ') بر خود منطبق است. فرض کنیم B_1 و

C_1 منعکسهای B و C باشد. منعکس (Γ) خط B_1C_1 است و برای این که (Γ)

(Γ') مماس شود، لازم است B_1C_1 بر (Γ') مماس گردد و می‌دانیم برای این که

B_1C_1 بر (Γ') مماس شود چنانچه β_1 و γ_1 قوت‌های B_1 و C_1 نسبت به (Γ') باشند،

لازم و کافی است یکی از سه مقدار B_1C_1 ، $\sqrt{\beta_1}$ و $\sqrt{\gamma_1}$ برابر مجموع دو مقدار دیگر

باشد. اکنون آنها را محاسبه می‌کنیم. داشتیم:

$$B_1C_1 = \frac{\alpha \cdot BC}{AB \times AC}$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha \times \beta}{AB^2} \quad ; \quad \gamma_1 = \frac{\alpha \times \gamma}{AC^2} \quad \text{و} \quad \sqrt{\beta_1} = \frac{\sqrt{\alpha \times \beta}}{AB} \quad ; \quad \sqrt{\gamma_1} = \frac{\sqrt{\alpha \times \gamma}}{AC} \quad \text{و}$$

پس یکی از سه مقدار $\frac{\alpha \cdot BC}{AB \times AC}$ ، $\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{AB}$ و $\frac{\sqrt{\alpha\gamma}}{AC}$ باید با مجموع دو مقدار دیگر

برابر شود. هر سه مقدار را در $\frac{AB \times AC}{\sqrt{\alpha}}$ ضرب می‌کنیم، پس یکی از سه مقدار

$BC\sqrt{\alpha}$ ، $CA\sqrt{\beta}$ و $AB\sqrt{\gamma}$ باید با مجموع دو مقدار دیگر مساوی شود.

۲۷۸. فرض کنیم I و H' مرکزهای دو

دایره، J و L' تصویرهای آنها روی

قطرهای MN و M'N'، OAA'

دایره‌هایی که روی خط‌المركزین

اختیار شده‌اند، باشد. در مثلث

OAI (شکل) داریم:

$$\overline{AI}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{OA}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OJ}$$

و از آنجا:

$$\overline{AI}^2 - r^2 = \overline{OI}^2 - r^2 + \overline{OA}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OJ} \quad (۱)$$

$$\alpha = \omega + \overline{OA}^2 - 2\overline{OA} \times \overline{OJ}$$

r شعاع دایره (C) است، یعنی:

و به همین ترتیب برای دایره (C') خواهیم داشت:

$$\alpha' = \omega' + \overline{OA'}^2 - 2\overline{OA'} \times \overline{OL'} \quad (۲)$$

$$\omega' = \overline{OM'} \times \overline{ON'} = \frac{k^2}{\overline{OM} \times \overline{ON}} = \frac{k^2}{\omega}$$

اما

$$\frac{\overline{OL'}}{\overline{OJ}} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{OI}} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{OM'} + \overline{ON'})}{\frac{1}{2}(\overline{OM} + \overline{ON})} = \frac{k(\frac{1}{\overline{OM}} + \frac{1}{\overline{ON}})}{\overline{OM} + \overline{ON}} = \frac{k}{\overline{OM} \cdot \overline{ON}} = \frac{k}{\omega}$$

و از آنجا $\overline{OL'} = \frac{k}{\omega} \times \overline{OJ}$ و رابطه (۲) چنین می‌شود:

$$\alpha' = \frac{k^2}{\omega} + \frac{k^2}{\overline{OA'}^2} - \frac{2k^2 \times \overline{OJ}}{\overline{OA} \times \omega}$$

$$\alpha' = \frac{k^2}{\omega \times \overline{OA'}^2} (\overline{OA'}^2 + \omega - 2\overline{OA} \times \overline{OJ}) = \frac{k^2 \times \alpha}{\omega \times \overline{OA'}^2} = \overline{OA'}^2 \times \frac{\alpha}{\omega} \quad \text{یا}$$

۲۷۹. مجذور نسبت بین طولهای مماسها برابر است با:

$$\frac{c^2 - (a+b)^2}{c^2 - (a-b)^2} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 - 2ab}{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab} = \frac{ch\delta - 1}{ch\delta + 1} = \frac{\delta}{\gamma} \text{th}^2$$

۲۸۰. شعاعهای دو دایرة مماس داخلی را با a و b و شعاع دایرة نیمساز آنها را با r نشان می دهیم. دایرة انعکاس را به مرکز نقطه تماس دو دایره انتخاب می کنیم. منعکسهای دو

دایره می شود دو خط موازی که به فاصله های $\frac{k^2}{2a}$ و $\frac{k^2}{2b}$ از قطب انعکاس واقعند.

منعکس دایرة نیمساز خطی می شود موازی و متساوی الفاصله با دو خط مزبور و به

فاصله $\frac{k^2}{2r}$ از قطب انعکاس. بنابراین داریم:

$$\frac{\gamma}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

۷.۵.۲. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۲۸۱. دو مثلث POB و COP' متشابه اند و داریم:

$$\frac{PO}{OB} = \frac{CO}{OP'}, \quad OP \cdot OP' = k^2$$

۲۸۲. اگر (O) و (O') دایره های مفروض و T و T' نقطه های تماس دایرة (ω) با دایره های

(O) و (O') و S نقطه تقاطع مماس مشترک خارجی دایره های (O) و (O') با

خط المרכזین آنها باشد: S مرکز تجانس مستقیم (O) و (O') و T و T' مرکزهای

تجانس معکوس دو به دو دایره های (O, ω) و (O', ω) می باشد و چون در سه دایره هر

دو مرکز تجانس معکوس و یک مرکز تجانس مستقیم بر یک امتدادند، لذا S, T و T'

بر یک استقامت می باشند و چون OT و O'T' در نقطه (ω) مرکز آن دایرة متقاطع

می باشد، در نتیجه T و T' نقطه های متجانس نبوده و نقطه های منعکس می باشند، زیرا

در تجانس بایستی OT || O'T' باشد و در این صورت قوت انعکاس آنها:

$$ST \cdot ST' = SI \cdot SI = k$$

۲۸۳. اگر C و C' دو دایرة مفروض باشند. چنانچه می دانیم دو دایره به هر طریق که باشند،

منعکس یکدیگر بوده و نقطه تلاقی مماس مشترک خارجی دو دایره با خط المרכזین،

قطب انعکاس و مرکز تجانس آنهاست و داریم: PT · PT' = k (ک قوت انعکاس) و

TH و T'H' قطبهای P نسبت به دو دایرة C و C' می باشند. از تشابه مثلثهای

$(PT'H' \sim PTC)$ و $(PTH \sim PT'C')$ نتیجه می‌گیریم که $\frac{PT}{PC'} = \frac{PH}{PT'}$ و

یا $\frac{PT}{PH'} = \frac{PC}{PT'}$ و $PT \cdot PT' = PC \cdot PH' = PH \cdot PC'$ که از این رابطه نتیجه می‌گیریم

که H پای قطبی نقطه P نسبت به دایره (C) منعکس (C') مرکز دایره (C') و H' پای قطبی قطب P نسبت به دایره (C') منعکس C مرکز دایره (C) می‌باشد.

۲۸۵. در حالتی که ω و α متقاطع یا برهم مماس باشند، حکم بدیهی است. در حالتی که ω

و α متخارج باشند، معادله‌های آنها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$x^2 + y^2 = k^2 \text{ و } x^2 + y^2 = ax$$

معادله منعکس α نسبت به ω می‌شود:

$$\left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{k^2 y}{x^2 + y^2} \right)^2 = a \left(\frac{k^2 x}{x^2 + y^2} \right)$$

که پس از ساده کردن خواهیم داشت: $k^2 = ax$.

۲۸۸. تقارن نسبت به یک خط حالت خاص انعکاس نسبت به دایره است.

۲۸۹. دو دسته خطهای موازی عمود بر هم به دست می‌آید.

۲۹۰. دسته دایره (F) و دو دایره (Γ_1) و (Γ_2) را که دسته مزدوج آن می‌باشند در نظر

می‌گیریم. دایره‌های دستگاه (F) بر (Γ_1) و (Γ_2) عمودند؛ پس منعکسهای آنها بر

منعکسهای (Γ_1) و (Γ_2) عمودند و تشکیل یک دسته دایره می‌دهند. اگر دسته دایره

(F) دو نقطه مشترک داشته باشند و قطب انعکاس بر یکی از آنها منطبق باشد، منعکس

دستگاه (F) یک دسته خط خواهد بود و اگر دایره‌های (F) بر یک خط مماس باشند،

یعنی دارای یک نقطه مشترک باشند و قطب انعکاس بر این نقطه منطبق باشد، منعکس

دایره‌های (F) خطهای موازی با مماس مشترک دایره‌های (F) خواهند بود.

۲۹۱. دایره درون دایره انعکاس.

۲۹۲. در شکل، فرض می‌کنیم O دایره انعکاس با دو دایره O' و O'' عمود بر آن و متقاطع

با یکدیگر در A و B باشد. می‌توان ثابت کرد که نقطه O

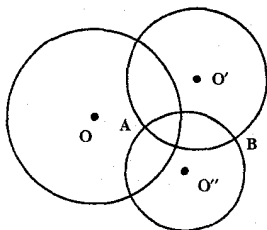
با A و B بر یک استقامت واقعند، زیرا این نقطه، نقطه‌ای

است که می‌توان از آن مماسهای هم‌نهشت بر دایره‌های

O' و O'' رسم کرد (اثبات این گزاره را به عنوان تمرین

وامی گذاریم). در این صورت، A و B، نقطه‌های

منعکسند.



۲.۵.۸. رسم شکلهای

۲۹۳. اگر D محور اصلی دو دایره و S یک نقطه از آن باشد، داریم:

$$SA \cdot SM = SA' \cdot SM' = P_{S(O)} = P_{S(O')}$$

چنانچه S را قطب و $P_{S(O)} = P_{S(O')} = k$ قوت انعکاس فرض کنیم، منعکسهای دایره‌های (O') و (O'') و خط D بر خودشان منطبق است و خط MM' منعکس دایره SAA' می‌باشد، برای این که MM' بر خط D محور اصلی دو دایره عمود باشد. لازم است منعکسهای آنها بر هم عمود باشد. وقتی خط D بر دایره SAA' عمود است از مرکز آن می‌گذرد، یعنی مرکز دایره SAA' بایستی بر D واقع باشد و در نتیجه، عمود منصف AA' را رسم می‌کنیم تا خط D را در (ω) قطع کند. محل برخورد دایره به مرکز (ω) و شعاع $\omega A = \omega S'$ با خط D نقطه S است که اگر SA و SA' را امتداد دهیم تا دایره‌های (O) و (O') را در نقطه‌های M و M' قطع کند، MM' بر D عمود خواهد بود.

۲۹۴. اگر $\triangle ABC$ مثلث مطلوب محاط در دایره مفروض (O) باشد، به نحوی که ضلعهایش از نقطه‌های M، N و P گذشته باشد، ابتدا M' منعکس نقطه M با قطب P و قوت نقطه P نسبت به دایره (O) تعیین می‌کنیم؛ در این صورت داریم: $PB \cdot PA = PM \cdot PM'$. آنگاه BM' را وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه دیگر B' قطع کند. چنانچه N' را منعکس N با قطب M' و قوت، قوت نقطه M' نسبت به دایره (O) تعیین نماییم، در این حالت چهارضلعهای $ABM'M$ و $NN'BB'$ بترتیب در دایره‌های (Γ) و (ω) محاط می‌باشند و داریم:

$$\hat{M} + \hat{MB'A} = 180^\circ, \quad \hat{MB'A} + \hat{B_1} = 180^\circ, \quad \hat{ACB'} = \hat{B_1} = \frac{B'E A}{2}$$

از مقایسه این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که: $\hat{M} = \hat{ACB'}$ و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که $\overline{PM} \parallel \overline{BC}$ (۱) و همچنین، چون چهارضلعی $EB'BC$ محاطی است، داریم:

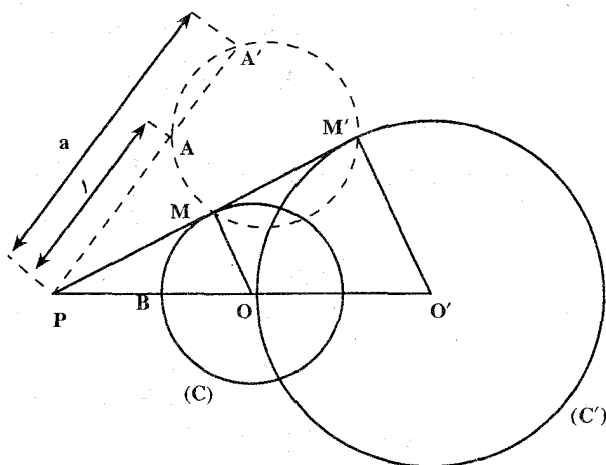
$$\hat{E} + \hat{B'BC} = 180^\circ, \quad \hat{B'BC} = \hat{B_2} + 180^\circ, \quad \hat{NN'B'} = \hat{B_2} = \frac{NB'}{2}$$

از مقایسه این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که $\overline{EC} \parallel \overline{NM'}$ (۲) از ملاحظه رابطه‌های (۱) و

(۲) نتیجه می‌شود که $\hat{PM'N} = \hat{B'CE} = \alpha$ (۳) و از آنجا حل مسأله چنین است: ابتدا M' منعکس M را با قطب P و قوت، قوت نقطه P نسبت به دایره (O) تعیین نموده

و $M'N$ را وصل کرده، سپس N' منعکس N را با قطب M' و قوت، قوت نقطه M' نسبت به دایره (O) تعیین می‌کنیم تا زاویه $\alpha = \widehat{NM'P}$ به دست آید و از نقطه دلخواه I واقع بر دایره (O) زاویه $\widehat{FIF'} = \alpha$ رسم نموده و دایره (δ) متحدالمرکزین با دایره (O) و مماس بر $\overline{FF'}$ رسم می‌کنیم. سپس از N' مماسی بر دایره (δ) رسم می‌نماییم تا دایره (O) را در نقطه‌های B' و E قطع نماید. حال چنانچه از B' موازی MP رسم کنیم دایره را در نقطه C قطع می‌نماید و محل تلاقی MC با دایره (O) نقطه A بوده و اگر A را به P وصل کنیم نقطه تقاطعش با دایره، نقطه B بوده که بنا به خاصیت بالا BC از نقطه N گذشته و ABC مثلث مطلوب است.

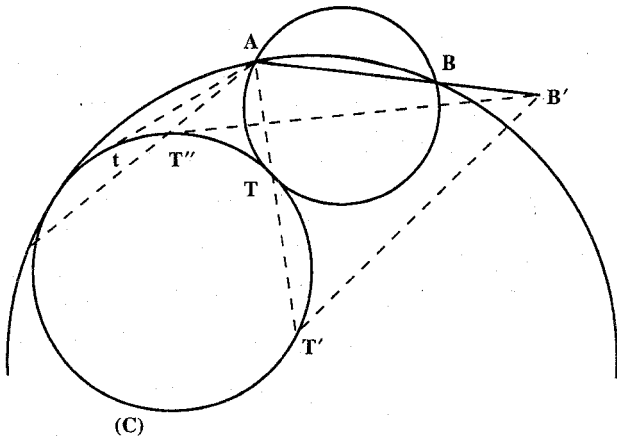
۲۹۵. به طور کلی برای رسم منعکس دایره کافی است که یک نقطه و مرکزش را تعیین کنیم. اما می‌دانیم که مرکز آن دایره، منعکس مزدوج توافقی P نسبت به دو سر قطری از (C) است که از P می‌گذرد. در حالت خاصی که P خارج دایره (C) باشد (شکل)، کافی است که مماس PM را بر دایره رسم کنیم و M' منعکس M را (با ترسیم) به دست آوریم و از M' موازی MO بکشیم تا امتداد PO را در O' قطع کند و بالاخره به مرکز O' و به شعاع $O'M'$ دایره مطلوب را رسم کنیم.



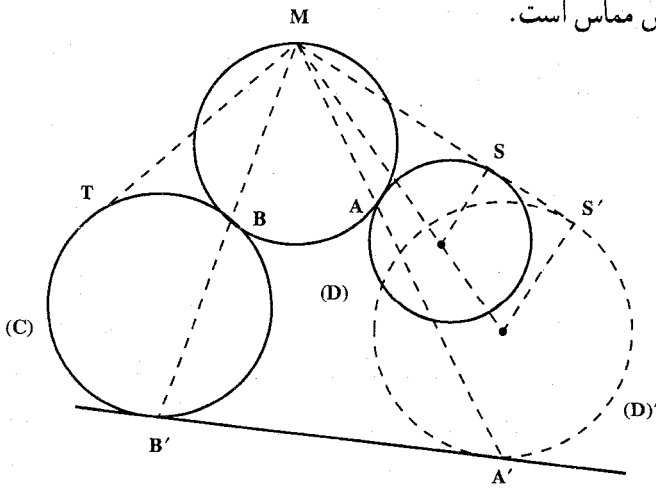
۲۹۶. مسأله را که حل شده فرض کنیم به راه حل زیر می‌رسیم:

از A مماس At را بر دایره (C) رسم می‌کنیم (شکل). A را قطب و At^2 را که قوت انعکاس اختیار کنیم، منعکس دایره (C) بر خودش منطبق است. B' منعکس B را تعیین می‌کنیم و از B' خطی رسم می‌کنیم که در T' بر (C) مماس شود. AT' را

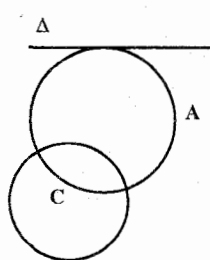
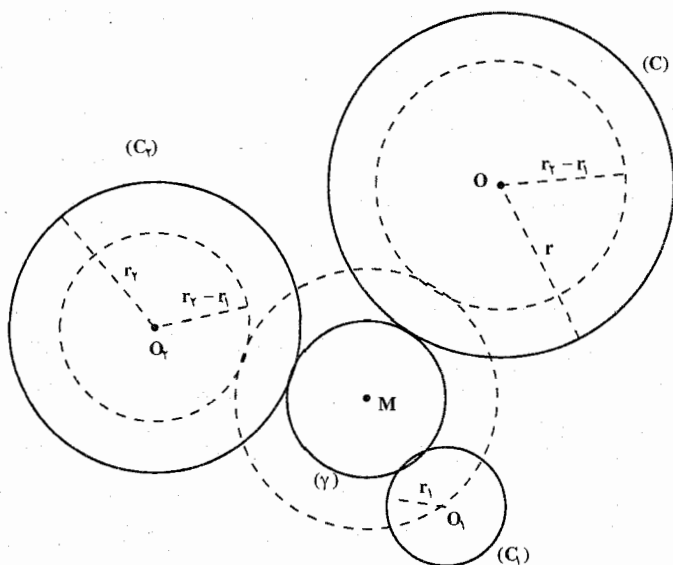
وصل می کنیم تا دایره (C) را بار دیگر در T قطع کند. دایره ای که بر A، B و T بگذرد، دایره مطلوب است، زیرا این دایره منعکس خطی است که از B' بر (C) مماس شده است، پس بر (C) مماس خواهد بود.



۲۹۷. از M مماس MT را بر دایره (C) رسم می کنیم (شکل). M را قطب و MT^2 را قوت انعکاس اختیار کرده، منعکسهای دایره های (C) و (D) را به دست می آوریم. منعکس (C) بر خودش منطبق است و منعکس D دایره (D') است. مماس مشترک دو دایره (C) و (D') را رسم می کنیم تا بر آنها در A' و B' مماس شود. دایره (D) را در A و MB' دایره (C) را در B قطع می کند. دایره ای که بر M، A و B بگذرد، دایره مطلوب است، زیرا که این دایره، چون منعکس مماس مشترک A'B' است، بر دو دایره مفروض مماس است.



۲۹۸. اگر مسأله حل شده و دایره (γ) (شکل) دایره خواسته شده و M مرکز آن باشد و مرکز کوچکترین سه دایره مفروض را O_1 بنامیم، دایره‌ای که به مرکز M و شعاع MO_1 رسم شود بر نقطه O_1 خواهد گذشت و بر دو دایره، یکی به مرکز O و شعاع $r - r_1$ و دیگری به مرکز O_2 و شعاع $r_2 - r_1$ مماس خواهد بود. پس مسأله تبدیل می‌شود به رسم دایره‌ای که بر یک نقطه معلوم (یعنی O_1) بگذرد و بر دو دایره (یعنی دایره‌های به شعاع $r - r_1$ و مرکز O و به شعاع $r_2 - r_1$ و مرکز O_2) مماس باشد، پس از به دست آمدن مرکز این دایره، رسم دایره خواسته شده مسأله به آسانی انجام می‌گیرد.



۲۹۹. نقطه A را قطب انعکاس و قوت نقطه A را نسبت به دایره (C)

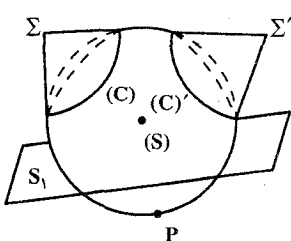
قوت انعکاس اختیار می‌کنیم در این صورت منعکس دایره (C) بر خودش منطبق می‌شود و منعکس دایره‌ای مانند (C') خواهد بود که A می‌گذرد و منعکس دایره جواب خطی است که از مرکز دایره (C) خواهد گذشت، زیرا در انعکاس زاویه‌ها محفوظ می‌ماند و این خط باید بر دایره (C) عمود شود، یعنی

از مرکزش بگذرد، بنابراین راه حل مسأله چنین است: دایره (C') منعکس Δ را پیدا می‌کنیم و از نقطه C مماسی بر آن می‌کشیم؛ منعکس این مماس جواب مسأله است. ممکن است مسأله دو جواب داشته باشد.

۳۰۰. خط‌المركزين دو دایره را رسم می‌کنیم که قطر AB از اولی و قطر CD از دومی را پدید می‌آورد به گونه‌ای که $AC \parallel BD$. دایره‌های به قطر AD و به قطر BC را با α و β نشان می‌دهیم و L و M نقطه‌های حدی دسته دایره‌های $\alpha\beta$ را به دست می‌آوریم. دایره نیمساز مطلوب دایره به قطر LM است، زیرا در انعکاس نسبت به این دایره که بر دایره‌های α و β عمود است، A به D و B به C تبدیل می‌شود.

۳۰۱. از نقطه نظر هندسه انعکاسی وضع دایره‌های مورد نظر، نظیر شکل مربوط به چیستان اشتینر در حالت $n=4$ می‌باشد، بنابراین سه عدد از انحرافهای انعکاسی برابر $\log(\sqrt{2}+3)$ و دوازده عدد دیگر برابر با صفر است.

۳۰۲. دو نقطه P و Q را در درون دایره معلوم α در نظر می‌گیریم. منعکسهای P و Q نسبت به هر دایره به مرکز عبارتند از P_∞ و Q' و منعکس دایره α در این انعکاس یک دایره α' است که P_∞ و Q' در بیرون α' واقعند. مماسهای رسم شده از Q' بر α' دو «دایره» که بر P_∞ و بر Q' می‌گذرد که عبارتند از منعکسهای دو دایره‌ای که بر P و Q می‌گذرند و بر α مماس می‌باشند.



۳۰۳. دو دایره (C) و (C') را روی کره (S) در نظر می‌گیریم. فرض کنیم (C_1) ، (C'_1) و (S_1) منعکسهای (C) ، (C') و (S) نسبت به قطب P باشند. چون بنا به فرض (C_1) و (C'_1) باید در یک صفحه واقع باشند، پس (S_1) که شامل آنها است، صفحه است و در نتیجه قطب P باید روی (S) واقع باشد. از طرف

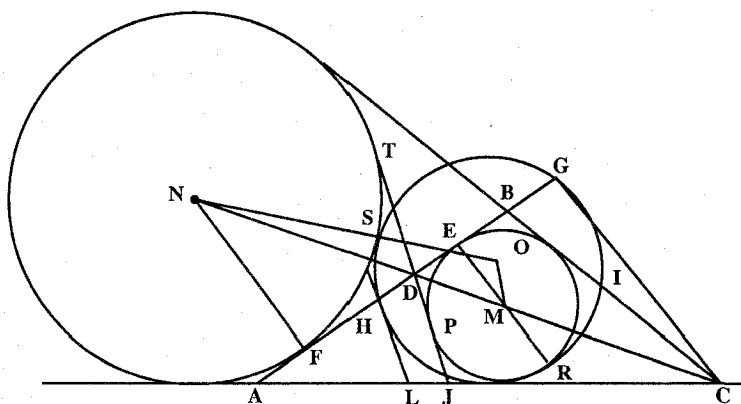
دیگر Σ و Σ' رأسهای مخروطهای محیط بر (S) در طول دایره‌های (C) و (C') باشند. می‌دانیم که مرکزهای (C_1) و (C'_1) محل برخورد $P\Sigma$ و $P\Sigma'$ با صفحه (S_1) خواهند بود و برای این که مرکزهای (C_1) و (C'_1) بر هم منطبق شوند، لازم است $P\Sigma$ بر $P\Sigma'$ منطبق گردد، پس P یکی از نقطه‌های تقاطع خط $\Sigma\Sigma'$ با کره (S) است. برای این که مسأله جواب داشته باشد، لازم است $\Sigma\Sigma'$ کره (S) را قطع کند، یعنی (C) و (C') هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند (شکل).

۹.۵.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۰۴. انعکاس (B, BC^2) را در نظر بگیرید.

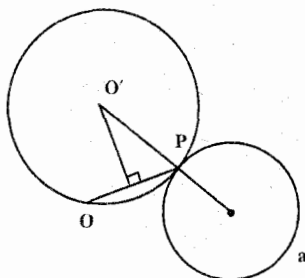
۳۰۵. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های M و N مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی مماس به ضلع AB و r و r' شعاعهای این دایره‌ها می‌باشند. نقطه‌های H, I, J وسطهای ضلعهای مثلثند که دایرهٔ نه نقطه از آنها می‌گذرد. ME و NF شعاعهای نقطه‌های تماس ضلع AB را با دایره‌های گفته شده رسم کرده، CG ارتفاع رأس C را می‌کشیم. دایرهٔ نه نقطه از G نیز می‌گذرد و داریم:

$$\frac{GE}{GF} = \frac{DE}{DF} \quad \text{ويا} \quad \frac{CM}{CN} = \frac{r}{r'} = \frac{DM}{DN}$$

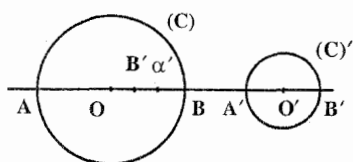


بنابراین تقسیم (GHEF) توافقی است و می دانیم $AF = BE$ است، پس نقطه H وسط EF نیز می باشد و به موجب رابطه نیوتن داریم: $HE^2 = HD.HG = k^2$. اگر H را قطب انعکاس و k^2 را قوت انعکاس اختیار کنیم، منعکس دایره های (M) و (N) بر خود منطبق بوده و منعکس دایره نه نقطه چون از H' می گذرد، خطی است مستقیم که از منعکس G یعنی D می گذرد و با HL ، مماس نقطه H موازی است، چون HL با AB نسبت به زاویه C آنتی پارالل است، پس منعکس دایره نه نقطه نیز با AB نسبت به زاویه C آنتی پارالل خواهد بود و این خط که باید از D بگذرد، ناچار مماس مشترک داخلی دیگر دو دایره (M) و (N) یعنی خط TP است، چون منعکس دایره نه نقطه بر منعکسهای دایره های (M) و (N) مماس است، پس دایره نه نقطه بر دایره های (M) و (N) و هریک از دایره های محاطی خارجی دیگر مماس است.

۳۰۶. منعکسهای a و P را نسبت به یک دایره به مرکز O به دست می آوریم که دایره a' و نقطه P' واقع بر آن خواهد بود. در P' فقط یک خط مماس بر a' می توان رسم کرد. همچنین می توانیم منعکسهای a و O را نسبت به یک دایره به مرکز P به دست آوریم که



خط a' و نقطه O' غبرواقع بر آن خواهد بود و از O' فقط یک خط موازی با a' می توان رسم کرد.



۳۰۷. قطب انعکاس را روی دایره (C) به دلخواه

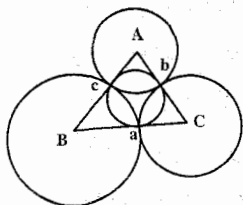
اختیار نموده و با قوت اختیاری، شکل را منعکس می کنیم. منعکس (C) ، خط (C_1) و منعکس (C') دایره (C'_1) و منعکس دایره

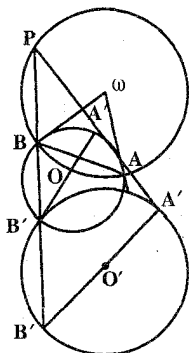
(γ) ، دایره (γ_1) است که بر دایره (C'_1) مماس و بر خط (C_1) عمود است؛ یعنی (C_1) محور تقارن آن است. واضح است که (γ_1) بر (C'_1) قرینه (C'_1) نسبت به (C_1) مماس است، پس (γ) نیز بر دایره (C'') قبل از انعکاس نیز مماس است. این دایره (C'') را رسم می کنیم. فرض کنیم AB و $A'B'$ قطرهای دو دایره (C) و (C') واقع بر روی خط مرکزین OO' آنها باشند و α' و β' مزدوجهای A' و B' نسبت به AB می باشند. دایره های به قطرهای $A'\alpha'$ و $B'\beta'$ مماس بر (C') و عمود بر (C) و مماس بر دایره به قطر $\alpha'\beta'$ می باشند و نتیجه می گیریم که چون (C'') مرکزش روی خط OO' است، (C'') دقیقاً همان دایره به قطر $\alpha'\beta'$ می باشد.

۳۰۸. چنانچه C را قطب و $k = P_{C(\omega)}$ را قوت انعکاس انتخاب کنیم، A' ، B' و D' بترتیب، منعکسهای A ، B و D بوده و منعکس دایره (ω) بر خودش منطبق است و در این حالت $A'B'$ ، $A'D'$ و $B'D'$ بترتیب، منعکسهای دایره های (O) ، ACD و BCD است و چون دایره های (O) و (ω) بر هم عمودند، منعکسهای آنها بر هم عمود بوده و در نتیجه $A'B'$ از مرکز دایره (ω) می گذرد و از آن جا $\hat{A'D'B'} = 90^\circ$ است، یعنی $A'D'$ بر $D'B'$ عمود می باشد و لذا منعکسهای آنها بر هم عمودند، یعنی دایره های ACD و BCD بر هم عمود خواهند بود.

۳۰۹. نقطه تماس دو دایره از سه دایره را مرکز دایره انعکاس

می گیریم. در این صورت منعکس شکل مفروض عبارت خواهد بود از دو خط متوازی و دایره ای که بر آنها مماس است.





۳۱۰. چنانچه P یک نقطه از مکان (قطب انعکاس) و A' و B' منعکسهای A و B و دایره (O') منعکس دایره (O) در انعکاس (K) باشند،

اولاً. چون $B'A'$ از مرکز دایره (O') می‌گذرد، می‌توان گفت $A'B'$ بر دایره (O') عمود است.

ثانیاً. $A'B'$ منعکس دایره PAB است.

ثالثاً. چون در انعکاس زاویه‌ها ثابت می‌مانند، لذا منعکسهای $A'B'$ و (O') بر هم عمودند، یعنی دایره (O) بر دایره PAB عمود است و یا به عبارت دیگر مکان P دایره‌ای است که بر B و A گذشته و بر دایره (O) عمود است (در حالت خاص که $K = P_{P(O)}$ باشد، دایره (O') بر دایره (O) منطبق است و $A'B'$ قطری از دایره (O) می‌باشد).

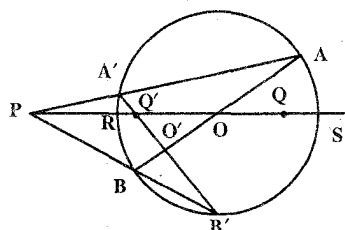
۳۱۱. نقطه‌های P_1 و P_2 را نقطه‌های برخورد دو دایره عظیمه از کره α' می‌گیریم که یکی از آنها بر O و A می‌گذرد. در این صورت P_1 و P_2 در صفحه α نقطه‌های برخورد خطی گذرنده بر A با دایره‌ای هستند که از دو نقطه Q_1 و Q_2 می‌گذرد و این دو نقطه دو سر قطری از دایره به مرکز A و به شعاع $2k$ یعنی دو سر قطری از دایره تصویر استوا می‌باشند. چون داریم: $AP_1 \cdot AP_2 = AQ_1 \cdot AQ_2 = -(2k)^2$ پس P_1 و P_2 توسط یک انعکاس متفی به هم مربوط می‌باشند که ترکیبی است از یک انعکاس نسبت به دایره تصویر استوا با نیم‌دور حول A .

۲.۵.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۳۱۲. الف. بنا به خاصیت قاطعهای رسم شده از یک نقطه واقع در داخل دایره داریم: ثابت $MA \cdot MA' = MB \cdot MB' = k$. از این رابطه می‌توان گفت که A' و B' بترتیب منعکسهای A و B با قطب M و قوت $R^2 - d^2 = k = MA \cdot MA'$ می‌باشند و همچنین منعکس خط AB دایره (Γ) که همان دایره محیطی مثلث قائم‌الزاویه $MA'B'$ است، می‌باشد و مرکز آن I وسط $A'B'$ است. از طرف دیگر چون بنا به خاصیت انعکاس قطری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد بر خط منعکس دایره عمود است، یعنی MI بر AB در نقطه C عمود می‌باشد یا MC خط عمود بر AB از I وسط $A'B'$ می‌گذرد. ب. چنانچه C' نقطه دیگر تقاطع MC با دایره (Γ) باشد، داریم:

$$MC.MC' = MB.MB' = P_{M(O)}$$

و چون $MC' = 2MI$ است، لذا $P_{M(O)} = MC.2MI$ و یا $MC.MI = \frac{1}{2}P_{M(O)}$.



۳۱۳. ۱. فرض کنیم Q نقطه دیگر برخورد دایرة

(PAB) و خط PO باشد (شکل)، داریم:

$$\overline{OP} \times \overline{OQ} = \overline{OA} \times \overline{OB} = -r^2;$$

$$\overline{OQ} = -\frac{r^2}{\overline{OP}}$$

و از آنجا:

پس نقطه Q ثابت است. این نقطه قرینه پای قطبی P نسبت به دایرة (O)، نسبت به مرکز O می باشد.

۲. فرض کنیم p قوت P نسبت به (O) باشد، داریم:

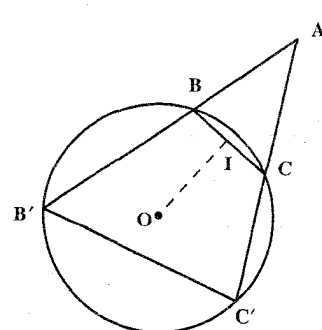
$$PA \times PA' = PB \times PB' = p;$$

دایرة (PA'B') منعکس خط AOB در انعکاس به قطب P و با قوت p می باشد، پس این دایره از O منعکس می گذرد. همچنین می توان گفت AOB بر دایرة (O) عمود است. دایرة (PA'B') بر دایرة (O) عمود است و از مزدوج P نسبت به قطر RS می گذرد.

۳. در انعکاس قبلی خط A'B'، منعکس دایرة (PAB) است و در نتیجه این خط از Q منعکس می گذرد.

۳۱۴. اولاً. دایرة محیطی مثلث AB'C' منعکس وتر BC در انعکاسی به قطب A و به قوت

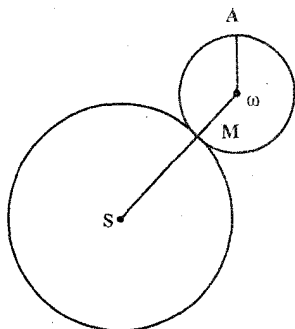
$AC \times AC'$ (قوت نقطه A نسبت به دایرة O) می باشد. وتر BC در جمیع وضعهای مختلف خود چون به طول ثابت a می باشد در نقطه I وسط خود بر دایره ای ثابت به مرکز



O و به شعاع OI مماس می باشد، پس منعکس این وتر یعنی دایرة محیطی مثلث AB'C' بر منعکس این دایره که دایرة ثابتی است، همواره مماس می باشد. اگر BC به قطر بدل شود، در این صورت چون همواره بر نقطه ثابت O مرور می کند، پس منعکس آن نیز بر منعکس O که نقطه ثابتی است مرور خواهد کرد.

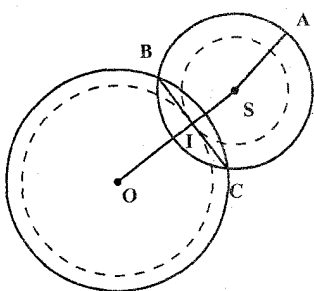
ثانیاً. چون دایرة محیطی مثلث AB'C' همواره

بر نقطه ثابت A مرور کرده و بر دایرة ثابتی مماس می باشد، مکان هندسی O مرکز آن بر



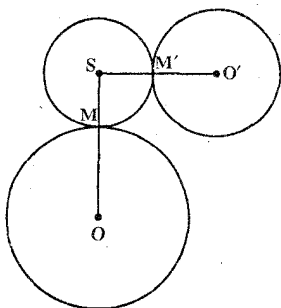
حسب آن که تماس دایره‌های داخلی یا خارجی باشد، بیضی یا هذلولی می‌باشد. در شکل این تماس خارجی است و مشاهده می‌شود که دایره ثابت S در نقطه M بر دایره محیطی مثلث AB'C' مماس است، پس $\omega S - \omega M = SM = R$ مقداری است ثابت و چون $\omega M = \omega A$ شعاع دایره محیطی AB'C' است، پس $\omega S - \omega A = R$ مقداری است ثابت و مکان ω هذلولی است به کانونهای A و S.

ثالثاً. دایره محیطی مثلث ABC و دایره‌ای که بر نقطه ثابت A مرور کرده و دایره ثابتی را در وتری به طول ثابت قطع می‌کند. فرض کنیم که S مرکز این دایره باشد. نقطه I وسط BC بر دایره ثابتی که قبلاً مذکور شد، همواره قرار دارد و خط BC بر این دایره (به مرکز O و به شعاع OI) مماس است. اگر دایره‌ای به مرکز S و به شعاع SI رسم کنیم. این دایره بر دایره قبل مماس خواهد بود و چون $SB = SA$ و $\overline{SB}^2 - \overline{SI}^2 = \frac{a^2}{4}$ می‌باشد،



پس $\overline{SA}^2 - \overline{SI}^2 = \frac{a^2}{4}$ است، یعنی قوت نقطه A نسبت به دایره به مرکز S و به شعاع SI مقداری است ثابت؛ مسأله منجر می‌شود به تعیین مکان هندسی مرکز S دایره‌هایی که بر دایره ثابت (به مرکز O و به شعاع OI) مماس می‌باشند به قسمی که قوت نقطه ثابت A نسبت به آنها مقدار ثابتی باشد،

چون شکل را با انعکاسی به قطب A و با قوتی برابر همین مقدار ثابت (قوت نقطه A نسبت به دایره S) منعکس کنیم دایره (به مرکز S و به شعاع SI) تغییر نمی‌کند، منعکس

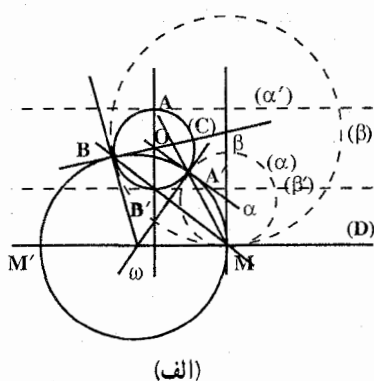


دایره به مرکز O و به شعاع OI دایره جدیدی می‌شود که دایره S (به شعاع SI) بر آن باید مماس باشد، یعنی مکان هندسی نقطه S مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی است که بر دو دایره ثابت مماس می‌باشند و بر حسب این که تماسها از یک جنس یا مختلف‌الجنس باشند، این مکان هذلولی یا بیضی است. مثلاً در شکل مقابل مکان هذلولی است، زیرا:

$$SO' - SO = O'M' - OM = R' - R$$

مقداری است ثابت و مکان هذلولی است به کانونهای O و O' .

۳۱۵. فرض کنیم (α) دایره مماس بر (D) در نقطه M و مماس بر دایره (C) باشد؛ مرکز این دایره، نقطه α روی عمود رسم شده از M بر (D) قرار دارد: MZ (شکل). در انعکاس به مرکز M و با قوت نقطه M نسبت به (C) دایره (C) ثابت می ماند و دایره (α) به خط (α') عمود بر $M\alpha$ تبدیل می شود که موازی با خط (D) بوده و مماس بر دایره (C) است. دایره های مطلوب (α) و (β) پس از انعکاس مزبور $H[M.P(M)]$ به مماسهای به زاویه (C) که به موازات (D) رسم شوند، تبدیل می شوند. فرض کنیم

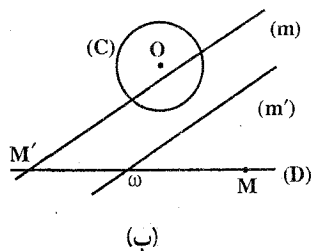


(α') و (β') این مماسها باشند، این خطها در نقطه‌های A' و B' که انتهای قطر عمود بر (D) از دایره (C) بر این دایره مماسند، دایره (α) در نقطه A بر دایره (C) مماس است و نقطه A منعکس نقطه A' می‌باشد و نقطه دیگر تقاطع خط MA' با دایره (C) است؛ مرکز دایره (α) محل برخورد OA و خط MZ خواهد بود. دایره (β) نیز در نقطه دیگر تقاطع خط MB' با دایره (C) بر این

دایره مماس بوده و مرکزش β در محل تقاطع OB با خط MZ است. انعکاس نامبرده دایره (MAB) را به خط $A'B'$ تبدیل می کند که عمود بر دایره (C) بوده و خطی است ثابت و عمود بر خط ثابت (D)، پس دایره (AMB) بر دایره (C) و خط (D) عمود می باشند؛ بنابراین مرکزش ω روی خط D قرار دارد.

ثانیاً. نقطهٔ M' نقطه متقاطع از دایرهٔ (AMB) روی خط (D) واقع است و چون دایرهٔ (AMB) بر دایرهٔ (C) عمود است. نقطهٔ M' مزدوج نقطهٔ M به (C) است. وقتی که M ثابت بماند، خط D حول نقطهٔ M دوران می‌کند در حالی که تمام صفحه را می‌پیماید، نقطهٔ M' قطبی (m) از نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (C) را طی می‌کند (شکل ب). دایره‌های (ABM) و (C) متعامدند، پس مماسهای در نقطه‌های تقاطع A و B بر دایرهٔ (C) از ω مرکز دایرهٔ (AMB) می‌گذرند؛ ω وسط MM' مجانس نقطهٔ M' در تجانس به مرکز M و با نسبت $\frac{1}{\rho}$ است. پس مکان ω خط (m') مجانس (m) در

این تجانس است.



ثالثاً. فاصله نقطه O از خط (D) برابر است با
 $OH = \frac{R}{2}$ و فاصله HM را x فرض می کنیم. اگر
 a' و b' محل برخورد خط $\alpha\beta$ [عمود رسم شده
 از M بر خط (D)] با خطهای (α') و (β') باشند
 و a و b نقطه های متقاطع M در دو دایره (α) و
 (β) فرض شوند (شکل پ).

a و a' و همچنین b و b' متعکس یکدیگر در انعکاسی که انجام داده ایم می باشند؛
 قوت نقطه M را نسبت به دایره (C) حساب می کنیم:

$$P_C(M) = MO^2 - R^2 = OH^2 + HM^2 - R^2 = x^2 - \frac{3R^2}{4};$$

$$\overline{M_a} \cdot \overline{M_{a'}} = x^2 - \frac{3R^2}{4}; \quad \overline{M_b} \cdot \overline{M_{b'}} = x^2 - \frac{3R^2}{4} \quad (۱)$$

فرض کنیم ρ_α و ρ_β شعاع دایره های (α) و (β) باشند:

$$M_a = 2\rho_\alpha$$

$$M_b = 2\rho_\beta$$

از طرف دیگر:

$$M_{a'} = HA' = \frac{3R}{2}$$

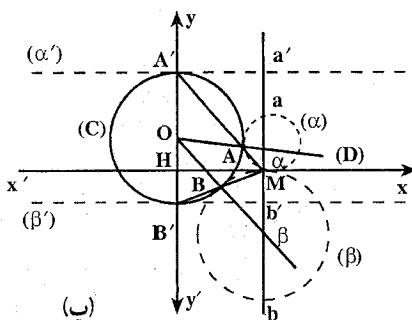
$$M_{b'} = HB' = \frac{R}{2}$$

و رابطه (۱) برحسب قدرمطلق چنین نوشته می شود:

$$3R \cdot \rho_\alpha = \left| x^2 - \frac{R^2}{4} \right| \quad R \cdot \rho_\beta = \left| x^2 - \frac{R^2}{4} \right|$$

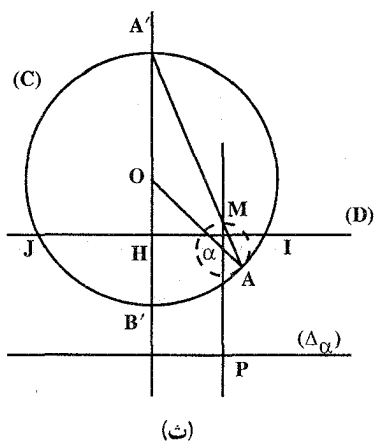
از آن جا:

$$\rho_\alpha = \left| \frac{4x^2 - R^2}{12R} \right|$$

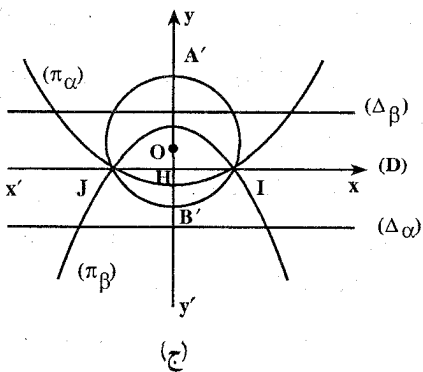


و

پس $\alpha O = \alpha P$ و α روی همان سهمی (π_α) واقع است. خط نامحدود αM عمود بر (D) دو نقطه M که خط D را طی می کند، تمام صفحه را می پیماید؛ و نقطه α تمام سهمی (π_α) را طی می کند (شکل ج).



مکان α سهمی (π_α) به کانون O و به خط هادی (Δ_α) است، بترتیب بالا اگر دایره (β) را با مماس خارجی با دایره (C) و واقع در نیمصفحه‌ای که شامل نقطه O نیست و یا مماس داخلی با دایره (C) و واقع در نیمصفحه که شامل نقطه O می‌باشد در نظر می‌گیریم. اگر خط (Δ_β) انتقال خط (D) با انتقالی برابر با $\vec{HO}$ و Q محل برخورد BM با (Δ_β) باشد، در هر حالت نامبرده خواهیم داشت: $\beta O = \beta Q$ و مکان β یک سهمی (π_β) به کانون O و به خط هادی



تبصرہ۔ (شکل پ)۔

چنانچه جهت مثبت را جهت بردار $\vec{HO}$ و خط D را $x'x$ به قسمی که $(\vec{x}'x, \vec{y'y}) = \frac{\pi}{2}$

باشد، اختیار کنیم. اگر $\overline{HM} = x$ باشد عرضهای α و β عبارتند از:

$$y_\alpha = \overline{M_\alpha} = \frac{\overline{Ma}}{2}, \quad y_\beta = \overline{M_\beta} = \frac{\overline{Mb}}{2}$$

$$MQ' = \overline{HA'} = \frac{3R}{2}, \quad \overline{Ma'} = -\frac{R}{2} \quad \text{از طرف دیگر داریم:}$$

و رابطه (۱) چنین می شود:

$$3Ry_{\alpha} = x^2 - \frac{3R^2}{4}, \quad -Ry_{\beta} = x^2 - \frac{3R^2}{4}$$

و مکان α و β عبارتند از:

$$(\pi_{\alpha}) \quad y_{\alpha} = \frac{x^2}{3R} - \frac{R}{4}; \quad (\pi_{\beta}) \quad y_{\beta} = -\frac{x^2}{R} + \frac{3R}{4}$$

۳۱۶. ۱. چهار نقطه M, N, M', N' که دو به دو به دو منعکس و متناظرند بر یک دایره قرار دارند. چنانچه I نقطه تقاطع MN و $M'N'$ باشد، داریم:

$$P_{I(\omega)} = IM \cdot IN = IM' \cdot IN'$$

$$P_{I(C)} = P_{I(C')} = IM \cdot IN = IM' \cdot IN'$$

و یا

یعنی، قوت نقطه I نسبت به دایره های (C) و (C') مساوی است که در نتیجه I بر محور اصلی آنها واقع است.

۲. چون در انعکاس مماسهای بر دو منحنی در دو نقطه منعکس با خط واصل بین آن دو نقطه زاویه های متساوی می سازند، لذا اگر T محل تلاقی مماسهای بر دو دایره در

نقطه های متناظر M و M' باشد، مثلث $MTM' \triangleq$ متساوی الساقین بوده و $MT = M'T$

یا $P_{T(C)} = P_{T(C')} = MT^2 = M'T^2$ و از آن جا T که قوتش نسبت به دو دایره مساوی است، روی محور اصلی دو دایره واقع است.

۳۱۷. ۱. چنانچه ملاحظه می شود:

$$P_{M(O')} = MA \cdot MA' = MB \cdot MB'$$

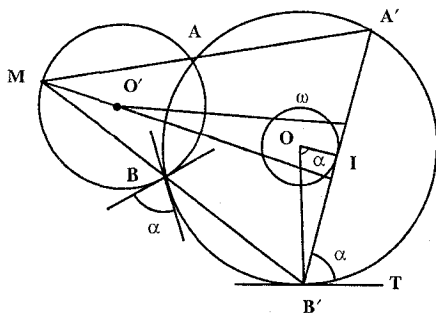
از این رابطه نتیجه می شود که A' و B' بترتیب منعکسهای A و B و از آن جا $A'B'$

منعکس دایره (O) در انعکاس (M) و $P_{M(O')} = MA \cdot MA'$

می باشد و بنا به خاصیت انعکاس $A'B'$ بر MO عمود می باشد.

۲. در انعکاس

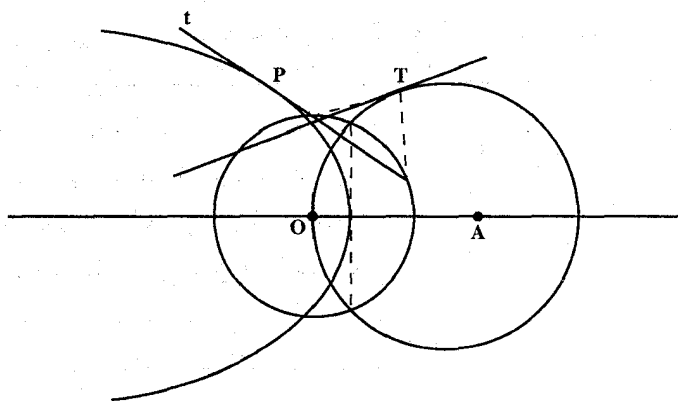
$A'B': (M, k = MA \cdot MA')$ منعکس دایره (O) و منعکس (O')



بر خودش منطبق است و چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، یعنی زاویه بین دایره (O) و (O') مساوی زاویه بین $A'B'$ و (O') یعنی α می‌باشد؛ لذا پیوسته $\hat{(O')} = \alpha$ و $\hat{(O)}, B'T = \alpha$ و $\hat{IO'B'} = \alpha$ و از آن جا $A'B'$ پیوسته بر دایره (ω) به مرکز (O') و شعاع $R'' = R' \cos \alpha$ مماس است یا به عبارت دیگر پوش $A'B'$ دایره‌ای است به مرکز (O') و شعاع $R'' = R' \cos \alpha$.

۶.۲. انعکاس در مقطعهای مخروطی

۳۱۸. از روی شکل معلوم می‌شود که هر مماس t که بر سهمی رسم شود، قطبی یک نقطه T از دایره α است. پای عمودی که از O بر t رسم شود، منعکس T نسبت به دایره ω است و مکان هندسی آن منعکس دایره α (گذرنده بر O) است که یک خط می‌باشد.

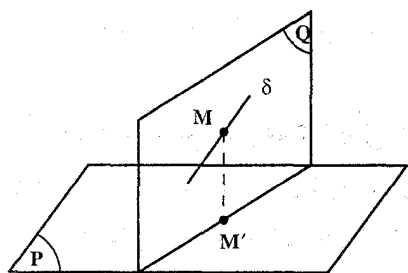


راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳. تبدیل‌های آفین و تصویری

۱.۳. تعریف و قضیه

۳۱۹. اگر M نقطه دلخواهی از δ و M' تصویر

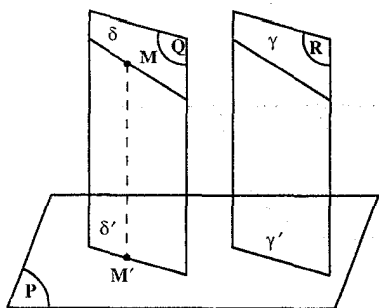
بر P باشد، آن گاه نقطه M' ، هم در صفحه P قرار دارد و هم در صفحه Q که از δ می‌گذرد و بر P عمود است. بنابراین تصویر δ بر فصل مشترک دو صفحه P و Q قرار دارد. بعکس، هر نقطه N' از



فصل مشترک دو صفحه P و Q ، تصویر نقطه‌ای مانند N از خط δ است (از N' خطی بر صفحه عمود کنید تا δ را در N قطع کند). بنابراین تصویر δ بر صفحه P درست همان فصل مشترک P و Q است و برهان قضیه به پایان می‌رسد.

۳۲۰. اگر دو صفحه Q و R به ترتیب بر δ و γ

گذشته و بر صفحه P عمود باشند، در این صورت Q و R با هم موازی یا بر هم منطبقند در نتیجه فصل مشترکشان با صفحه P یعنی δ' و γ' که به ترتیب تصویرهای δ و γ بر صفحه P هستند یا متوازی‌اند یا بر هم منطبقند.

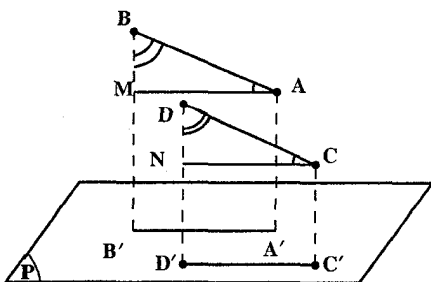


۳۲۱. اگر $AB \parallel CD$ و $A'B'$ و $C'D'$ تصویرهای آن دو پاره‌خط بر صفحه P باشند،

(شکل)، و از نقطه‌های A و C دو خط موازی $A'B'$ و $C'D'$ رسم کنیم تا امتدادهای BB' و DD' را به ترتیب در نقطه‌های M و N قطع کنند:

$$(AM \parallel CN \text{ و } AB \parallel CD) \Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$$

$$(BM \parallel DN \text{ و } BA \parallel DC) \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}$$



در نتیجه $\Delta ABM \sim \Delta CDN$ و از آنجا:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$$

و چون $AM = A'B'$ و $CN = C'D'$ است (چرا؟)، خواهیم داشت:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$$

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$$

یا:

نتیجه ۱. تصویرهای دو پاره خط متوازی و متساوی بر هر صفحه با هم برابرند.

نتیجه ۲. تصویر وسط هر پاره خط، وسط تصویر آن پاره خط است.

۳۲۲. زاویه قائمه BAC را که در آن ضلع AC با صفحه

P موازی و ضلع AB بر صفحه P عمود نیست، در نظر می گیریم (شکل). اگر تصویر $A'B'$ تصویر AB و $A'C'$ تصویر AC باشد:

(چرا؟) $AC \parallel P \Rightarrow AC \parallel A'C'$

و اگر صفحه مصور خط AB را Q بنامیم:

$(AC \parallel A'C' \text{ و } AC \perp AB) \Rightarrow A'C' \perp AB$

$(A'C' \perp AB \text{ و } A'C' \perp AA') \Rightarrow A'C' \perp Q$

$A'C' \perp Q \Rightarrow A'C' \perp A'B'$

یعنی $\hat{B'A'C'} = 90^\circ$ است.

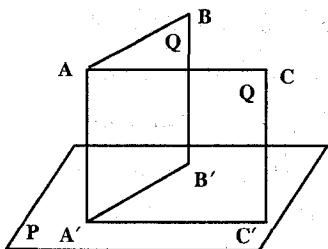
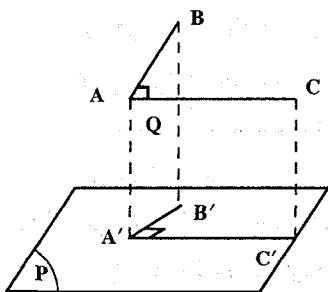
۳۲۴. اگر BAC یک زاویه قائمه و $B'A'C'$ تصویر

آن بر صفحه P نیز زاویه قائمه باشد و یکی از دو ضلع زاویه مفروض، به طور مثال ضلع AB با صفحه P ، و در نتیجه با $A'B'$ تصویرش بر آن صفحه موازی نباشد (شکل)، ملاحظه می کنیم که اگر Q صفحه مصور خط AB باشد:

$(A'C' \perp A'B' \text{ و } A'C' \perp AA') \Rightarrow A'C' \perp Q \Rightarrow A'C' \perp AB$

و اگر Q' صفحه مصور ضلع AC باشد:

$(A'B' \perp A'C' \text{ و } A'B' \perp AA') \Rightarrow A'B' \perp Q' \Rightarrow A'B' \perp AC$



بنابراین چون $A'B' \parallel AB$ پس $AC \perp Q$.

اما: $(AC \perp Q \text{ و } A'C' \perp Q) \Rightarrow AC \parallel A'C' \Rightarrow AC \parallel P$

یعنی اگر یکی از دو ضلع زاویه مفروض با صفحه تصویر موازی نباشد، ضلع دیگرش با آن صفحه موازی است و بنابراین برهان قضیه به پایان می رسد.

۳۲۶. صفحه های π و π' را چنان

قرار می دهیم که فصل

مشترک آنها بر AB قرار

گیرد. حال در صفحه π'

یک نقطه C' طوری اختیار

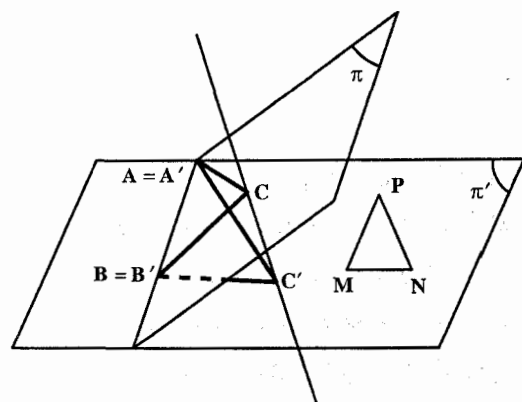
می کنیم که

$\Delta ABC' \sim \Delta MNP$ ؛ پس

تصویر موازی خواسته شده،

با خط CC' مشخص

خواهد شد.



۳۲۸. اگر قضیه ۳ را اثبات شده فرض کنیم، قضیه ۲ بلافاصله از آن نتیجه می شود. زیرا،

چون فقط یک تبدیل آفین وجود دارد که مثلث مفروض ABC را به مثلث مفروض

$A'B'C'$ بدل می کند، این تبدیل باید با تصویر موازی صفحه بر خودش و تشابه بعدی

که مثلث ABC را به مثلث $A'B'C'$ بدل می کند، منطبق باشد (این نکته که یک تصویر

موازی و یک تشابه وجود دارد از قضیه ۱ نتیجه می شود). می ماند اثبات قضیه ۳.

روش اثبات به قرار زیر است. فرض کنید که در یک تبدیل آفین، سه نقطه A ، B و C

به سه نقطه مفروض A' ، B' و C' بدل شده است. باید نشان دهیم که این تبدیل آفین،

M' نگاره یک نقطه دلخواه M از صفحه را مشخص می کند. ابتدا باید یک عده

نقطه هایی را که نگاره هایشان را می توانیم پیدا کنیم، به دست آوریم؛ سپس از این گونه

نقطه ها بیشتر و بیشتر و باز هم بیشتر، پیدا خواهیم کرد. بدین طریق در صفحه یک

مجموعه چگال از نقطه ها به دست خواهیم آورد که نگاره های آنها را بر اثر تبدیل آفین

مورد نظر می توانیم بسازیم. از این رو به ازای هر نقطه M از صفحه نقطه هایی از این

مجموعه به قدر دلخواه نزدیک به M وجود خواهد داشت. وانگهی می توانیم هر نقطه

M را در داخل یک چند ضلعی به دلخواه کوچک بگنجانیم که رأسهایش متعلق به

مجموعه نقطه هایی باشند که نگاره هایشان معین شده اند. در نتیجه هر چندضلعی از این

گونه به چند ضلعی معینی بدل، و از آن جا نتیجه می شود که M' ، نگاره نقطه M ، هم

معین می‌شود. و این همان چیزی است که به اثباتش پرداخته بودیم.

نکته. در عین حالی که این ملاحظه‌ها قضیه ۳ را موجه می‌سازند، ولی برهانی دقیق برای آن نیستند. صرف این واقعیت که یک مجموعه دلخواه چگال از نقطه‌هایی داریم که نگاره‌هایشان بر ما معلومند، ایجاب نمی‌کند که هر نقطه در این مجموعه گنجیده باشد. (مثلاً هیچ مجموعه‌ای از نقطه‌های گویا بر محور x ها، ولی چگال، شامل نقطه‌ای به مختص $x = \sqrt{2}$ نخواهد شد). از این رو ممکن است نقطه‌ای مانند M وجود داشته باشد که نگاره‌اش بر ما معلوم نباشد، ولو این که نگاره‌های نقطه‌ها به قدر دلخواه نزدیک به M بر ما معلوم باشند. برای این که برهان فوق را به برهانی دقیق بدل کنیم، باید ملاحظه‌های دیگری به کار ببریم که در این جا وارد آنها نمی‌شویم.

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه باید مجموعه نقطه‌های ذکر شده در بالا را بسازیم. از ویژگی زیر از تبدیل آفین استفاده می‌کنیم: یک تبدیل آفین خط‌های موازی را به خط‌های موازی بدل می‌کند. اگر بعکس، نگاره‌های دو خط موازی l و m دو خط متقاطع باشند، آن گاه پیشنگاره نقطه برخورد آنها می‌باید به هر دو خط l و m متعلق باشد که غیرممکن است.

نکته ۱. اگر نقطه A' نگاره نقطه A باشد، A را پیشنگاره A' گویند.

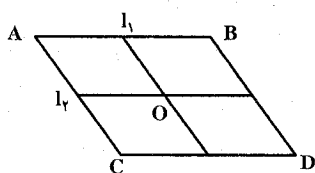
نکته ۲. باید توجه داشت که در یک تبدیل آفین خط‌های متقاطع به خط‌های متقاطع بدل می‌شوند.

گیریم l_1 معرف خط AB باشد و l_2 معرف خط AC . تبدیل ما l_1 را به l'_1 بدل می‌کند که از نقطه‌های A' و B' می‌گذرد و l_2 را به l'_2 ، که از نقطه‌های A' و C' می‌گذرد. فرض می‌کنیم خط CD بر C بگذرد و با l_1 موازی باشد و خط BD بر B بگذرد و با l_2 موازی باشد (شکل (الف)). چون در یک تبدیل آفین خط‌های موازی به خط‌های موازی بدل می‌شوند، CD به خطی بدل می‌شود که از C' می‌گذرد و با l'_1 موازی است، BD به خطی بدل می‌شود که از B' می‌گذرد و با l'_2 موازی است، و D به نقطه تقاطع این دو خط، D' بدل می‌شود. پس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ در شکل (الف)، به متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ بدل می‌شود، و نقطه O محل برخورد قطرهای AD و BC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، به نقطه O' محل برخورد قطرهای $A'D'$ و $B'C'$ از $A'B'C'D'$. حال میانخط‌های چهارضلعی $ABCD$ ، خط‌هایی که از O به موازات l_1 و l_2 رسم می‌شوند، را در نظر می‌گیریم. نگاره‌های آنها خط‌هایی هستند که از O' به موازات l'_1 و l'_2 می‌گذرند؛ یعنی میانخط‌های $A'B'C'D'$ هستند. به عبارت دیگر

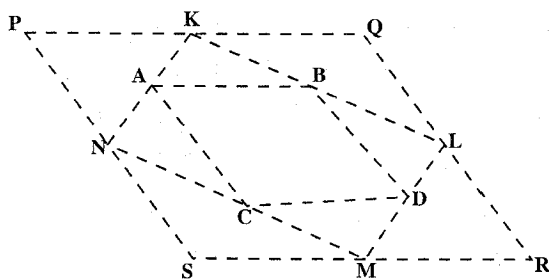
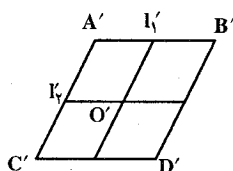
نقطه‌های برخورد میانخطهای ABCD با l_1 و l_2 به نقطه‌های وسط ضلعهای $A'B'C'D'$ بدل می‌شوند.

بعد با هریک از چهار متوازی الاضلاعی که از میانخطهای متوازی الاضلاع ABCD پدید می‌آیند همان گونه عمل می‌کنیم که با ABCD عمل کردیم. با ادامه این عمل (شکل (الف)) یک شبکه متوازی الاضلاع در داخل ABCD پدید می‌آید که تبدیل آفین مورد بحث آن را به یک شبکه متوازی الاضلاع در داخل $A'B'C'D'$ بدل می‌کند و نقطه‌های شبکه ABCD را به نقطه‌های شبکه متناظرش در $A'B'C'D'$ بدل می‌کند. با تکرار این عمل، به قدر کافی زیاد، می‌توانیم ضلعهای متوازی الاضلاع شبکه خود را به دلخواه کوچک، و لذا شبکه را به دلخواه چگال کنیم.

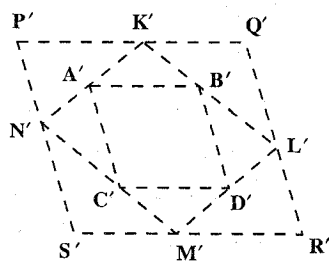
حال از نقطه‌های A و D خطهایی به موازات BC و از نقطه‌های B و C خطهایی به موازات AD رسم می‌کنیم. نگاره‌های آنها بر اثر تبدیل آفین مورد بحث، خطهایی هستند که از A' و D' به موازات $B'C'$ و از نقطه‌های B' و C' به موازات $A'D'$ رسم می‌شوند. بدین ترتیب یک متوازی الاضلاع KLMN به دست می‌آوریم که مساحتش دو برابر مساحت ABCD است، و نگاره آن، متوازی الاضلاع معلوم $K'L'M'N'$ است. با تکرار این شیوه عمل، یک متوازی الاضلاع PQRS به دست می‌آوریم که مساحتش چهار برابر مساحت ABCD است و ضلعهایش با ضلعهای ABCD موازی اند (شکل (ب))، و نگاره‌اش متوازی الاضلاع $P'Q'R'S'$ است، و غیره.



(الف)



(ب)

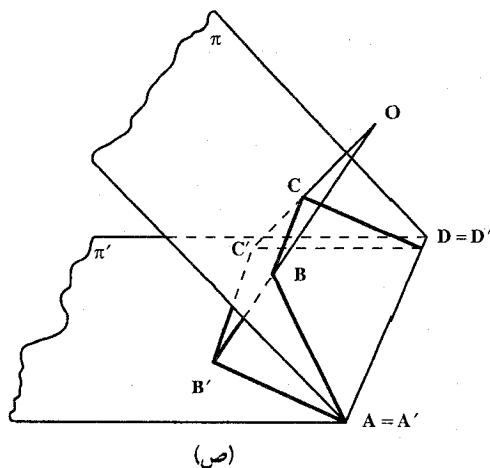


از ترکیب این دو شیوه عمل خود (رسم متوازی الاضلاعهایی بزرگتر و بزرگتر، و متوازی الاضلاعهایی کوچکتر و کوچکتر، که نگاره‌ها در داخل آنها معلومند)، می‌توانیم بر اثر تبدیل آفین خود یک مجموعه چگال از نقطه‌های صفحه با نگاره‌های معلوم به دست آوریم، همان گونه که از آغاز شروع کرده بودیم.

دقیقاً بگوییم، قضیه‌های ۱ و ۳ تنها ایجاب می‌کنند که هر تبدیل آفین از صفحه که می‌تواند دست کم یک سه تایی از نقطه‌های ناهمخط A, B و C را به یک سه تایی ناهمخط A', B' و C' بدل کند، می‌تواند به عنوان حاصلضرب یک تصویر موازی صفحه بر خودش و یک تشابه تحقق یابد. ولی به آسانی دیده می‌شود که نمی‌توانیم یک تبدیل آفین داشته باشیم که هر سه تایی از نقطه‌ها را به یک سه تایی از نقطه‌های همخط بدل کند. زیرا اگر هر سه تایی از نقطه‌های A, B و M ، با A و B بی‌ثابت و M دلخواه، قرار باشد به یک سه تایی همخط A', B' و M' بدل شود، آن‌گاه همه نقطه‌های صفحه می‌بایستی به نقطه‌های خط $A'B'$ بدل شوند، که مخالف تعریف تبدیل آفین از یک صفحه است.

۳۲۹. ما نخست این قضیه را در حالت خاصی که چهارضلعیهای $ABCD$ و $MNPQ$ دوزنقه هستند، ثابت می‌کنیم. در صفحه π' یک دوزنقه $A'B'C'D'$ مشابه با $MNPQ$ چنان وارد می‌کنیم که $AD = A'D'$. سپس صفحه π را در فضا طوری حرکت می‌دهیم که پاره‌خطهای AD و $A'D'$ بر هم منطبق شوند و نقطه‌های B و C بیرون صفحه π' بمانند (شکل (ص)). حال B را به B' و C را به C' وصل می‌کنیم. خطهای BB' و CC' هم‌صفحه‌اند؛ زیرا $AD \parallel B'C'$ و $BC \parallel AD$ ایجاب

می‌کنند که BC و $B'C'$ موازی و در نتیجه هم‌صفحه باشند. اگر نقطه برخورد خطهای BB' و CC' باشد، تصویر مرکزی به مرکز O ، چهارضلعی $ABCD$ را به چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل می‌کند؛ اگر $BB' \parallel CC'$ ، آن‌گاه تصویر موازی در امتدادی که به



(ص)

وسیله این خطها مشخص می شوند، ABCD را به $A'B'C'D'$ بدل می کند. حال نشان می دهیم که حالت کلی را می توانیم به حالت خاصی که هم اکنون ملاحظه کردیم، بدل کنیم. پس فرض می کنیم ABCD و MNPQ دو چهارضلعی در π و π' باشند (شکل (ض)) (چهارضلعیهای ABCD و MNPQ در شکل (ض) کوژند، ولی هرگاه یک یا هر دو چهارضلعی ناکوژ باشند، باز هم استدلال عوض نمی شود). فرض می کنیم که یک تصویر مرکزی (یا موازی) از π به π' چهارضلعی ABCD را به چهارضلعی $A'B'C'D'$ ، متشابه با MNPQ، بدل کند. نشان خواهیم داد که ABCD و MNPQ خط خاص صفحه π را مشخص می کنند. برای این امر، فرض می کنیم E، E' و R نقطه های برخورد ضلعهای AB و CD، $A'B'$ و $C'D'$ ، MN و PQ از چهارضلعیهای ABCD، $A'B'C'D'$ و MNPQ باشند. به موجب ویژگی (الف) از تصویر مرکزی، نگاره نقطه E نقطه E' است. اگر X_1 نقطه بینهایت $A'B'$ باشد، آن گاه به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی، این نقطه نگاره یک نقطه X_1 از AB است، به طوری که:

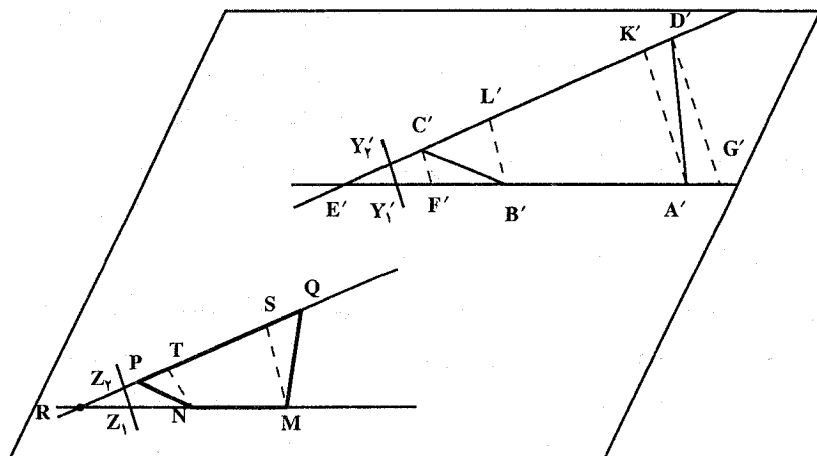
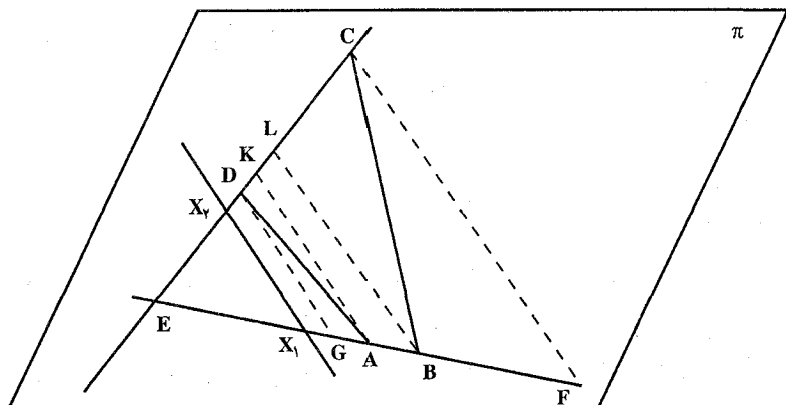
$$\frac{AE/BE}{AX_1/BX_1} = \frac{A'E'/B'E'}{A'X_1'/B'X_1'} = \frac{A'E'}{B'E'} = \frac{MR}{NR}$$

(زیرا $A'X_1'/B'X_1' = 1$). از این رابطه ها می توانیم نسبت AX_1/BX_1 را (از لحاظ اندازه و علامت) تعیین، و لذا X_1 را پیدا کنیم. همچنین رابطه:

$$\frac{CE/DE}{CX_2/DX_2} = \frac{C'E'}{D'E'} = \frac{PR}{QR}$$

نقطه X_2 از DC را معین می کند که بر نقطه بینهایت X_1' از $D'C'$ نگاشته می شود. اگر نقطه E بر نقطه بینهایت $A'B'$ نگاشته شده باشد، یعنی اگر $A'B' \parallel C'D'$ ، به جای AB و CD می توانیم AD و BC را در نظر بگیریم. اگر E و نقطه I، نقطه برخورد AD و BC، بر نقطه های بینهایت نگاشته شوند، یعنی اگر $A'B'C'D'$ متوازی الاضلاع باشد، آن گاه EI خط خاص π می شود. در این حالت قضیه ذکر شده را بدون محاسبه نسبت های پاره خطها می توان اثبات کرد.

خط X_1X_2 خط خاص π ، و خط مورد نظر ماست. باید توجه کنیم که X_1 و X_2 را می توان از روی چهارضلعیهای مفروض ABCD و MNPQ پیدا کرد. یک برهان مشابه، به ما امکان می دهد خط خاص $Y_1'Y_2'$ در π' را معین کنیم (شکل (ض)). نقطه های Y_1' و Y_2' از رابطه های زیر مشخص می شوند:



(ض)

$$\frac{AE}{BE} = \frac{A'E'/B'E'}{A'Y'/B'Y'} \text{ و } \frac{CE}{DE} = \frac{C'E'/D'E'}{C'Y'/D'Y'}$$

حال از نقطه‌های A و B خطهای موازی خط X_1X_2 رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آنها را با CD بترتیب K و L می‌نامیم. به موجب ویژگی (ب) از تصویر مرکزی، خطهای موازی BL و AK به خطهای موازی بدل می‌شوند. تعبیر آن این است که تصویر مرکزی ما دوزنقه ABLK را به دوزنقه A'B'L'K' $A'B'L'K' \parallel A'K' \parallel B'L' \parallel Y'Y'_1$ بدل می‌کند. حال می‌توانیم از چهارضلعیهای ABCD و MNPQ برای یافتن دوزنقه ABLK و دوزنقه MNTS که با A'B'L'K' متشابه باشد، استفاده کنیم. در این جا باید نقطه‌های

Z_1 و Z_2 را بر خطهای MN و PQ چنان پیدا کنیم که :

$$\frac{MR/NR}{MZ_1/NZ_1} = \frac{A'E'/B'E'}{A'Y'_1/B'Y'_1} = \frac{AE}{BE},$$

$$\frac{PR/QR}{PZ_2/QZ_2} = \frac{C'E'/D'E'}{C'Y'_2/D'Y'_2} = \frac{CE}{DE}$$

و بعد سه خط Z_1Z_2 ، NT و MS را موازی با هم رسم می کنیم.

حالت خاص قضیه ۱ که در بالا اثبات شد، مجوز وجود یک تصویر مرکزی (یا موازی) است که دوزنقه ABLK را به دوزنقه A'B'L'K' متشابه با MNTS بدل کند. برای اثبات این قضیه، باید نشان دهیم که این تصویر، ABCD را به A'B'C'D' یعنی، نقطه های C و D را به نقطه های C' و D' بدل می کند.

ملاحظه می کنیم که خط خاص π نسبت به تصویر ما خط X_1X_2 است که در بالا پیدا کردیم. زیرا خط خاص با AK و BL موازی است (ویژگی (ب) ی تصویر مرکزی) و از X_1 می گذرد (زیرا E، نقطه برخورد AB و KL، به E'، نقطه برخورد A'B' و K'L' و نقطه X_1 که در رابطه :

$$(AE/BE)/(AX_1/BX_1) = A'E'/B'E'$$

صدق می کند به یک نقطه در بینهایت، نگاشته می شود). و به همین طریق نشان می دهیم که خط خاص π' خط $Y_1Y'_2$ است؛ چون E و X_2 و نقطه بینهایت KL بترتیب بر E' و یک نقطه در بینهایت و نقطه Y'_2 از K'L' نگاشته شده اند، به موجب ویژگی (ج) تصویر مرکزی، نتیجه می گیریم که نگاره نقطه C، نقطه $\bar{C}$ ، از خط K'L' است، به طوری که :

$$\frac{EX_2/CX_2}{1} = \frac{1}{E'Y'_2/\bar{C}Y'_2}$$

$$\bar{C}Y'_2 = E'Y'_2 \cdot \frac{EX_2}{CX_2} \quad \text{بنابراین:}$$

می ماند نشان دهیم که $\bar{C}$ بر C' منطبق است. برای این منظور دوزنقه CDGF در شکل (ض) را (با $CF \parallel DG \parallel X_2X_1$) به وسیله تصویر مرکزی (یا موازی) و به دنبال آن یک تشابه، به دوزنقه C'D'G'F' (با $C'F' \parallel D'G' \parallel Y'_2Y'_1$) بدل می کنیم. به موجب قضیه ای که در بالا ثابت کردیم این امر ممکن است. این نگاشت E را به E'، نقطه X_2 از CD را به نقطه بینهایت X'_2 از C'D'، و نقطه بینهایت Y_2 از CD را به نقطه Y'_2 بدل

می‌کند. [زیرا بنا بر تعریف نقطه‌های X_2 و Y'_2 داریم :

$$(CE/DE)/(CX_2/DX_2) = C'E'/D'E' ,$$

$$[CE/DE = (C'E'/D'E')/(C'Y'_2/D'Y'_2)]$$

بنابراین به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی داریم :

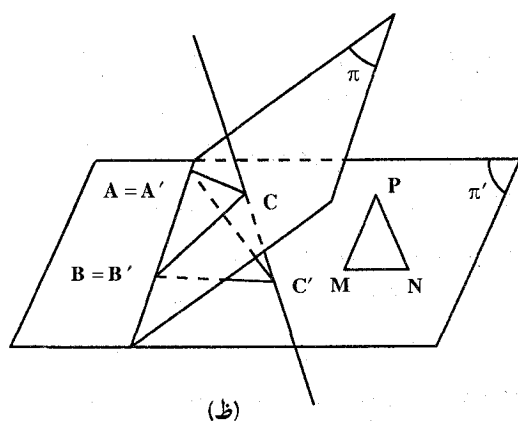
$$\frac{EX_2/CX_2}{1} = \frac{1}{E'Y'_2/C'Y'_2}$$

پس :

$$C'Y'_2 = E'Y'_2 \cdot \frac{EX_2}{CX_2}$$

از این جا نتیجه می‌شود که C' بر C منطبق است. عیناً به همین طریق ثابت می‌کنیم که این تصویر مرکزی (یا موازی) که $ABLK$ را به $A'B'L'K'$ بدل می‌کند، D را به D' می‌نگارد. حال می‌بینیم که تصویر ما چهارضلعی $ABCD$ را به چهارضلعی $A'B'C'D'$ بدل کرده است، همان گونه که ادعا کرده بودیم.

وقتی بعضی از نقطه‌های A, B, C و D یا A', B', C' و D' در بینهایت باشند، برهان قضیه ۱ را به آسانی می‌توان اصلاح کرد.



۳۳۰. صفحه‌های π و π' را چنان

قرار می‌دهیم که فصل

مشترک آنها بر AB قرار

گیرد. حال در صفحه π' یک

نقطه C' طوری اختیار

می‌کنیم که

$\Delta ABC' \sim \Delta MNP$. پس

تصویر موازی خواسته شده

با خط CC' مشخص خواهد

شد (شکل (ظ)).

۳۳۱. برهانی که ما در این جا برای این قضیه می‌آوریم برای حالتی است که قسمتی از صفحه،

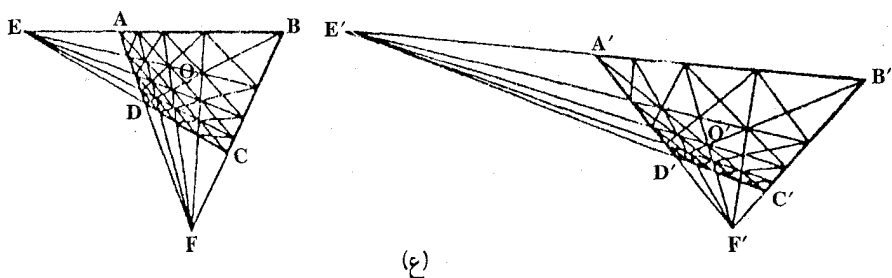
که در تعریف تبدیل تصویری به آن اشاره شده بود، یک چهارضلعی محدب باشد (مثل

صفحه‌ای از یک دفتر یادداشت). [این فرض محدودیتی برای تعمیم قضیه نیست، زیرا

در هر ناحیه G ممکن است یک چهارضلعی (کوچک) $ABCD$ انتخاب کرد. هر خط

که $ABCD$ را ببرد، باید از G بگذرد. ولی در این صورت هر تبدیلی که خطهای گذرنده بر G را به خط بدل کند، باید خطهای متقاطع با چهارضلعی (محدب) $ABCD$ را به خط بدل کند. [

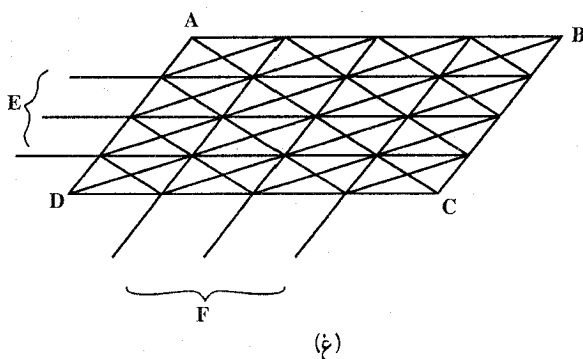
پس فرض می‌کنیم یک تبدیل تصویری، چهارضلعی $ABCD$ را به چهارضلعی $A'B'C'D'$ (شکل (ع)) بدل کند. بنابر قضیه ۱، بر اثر یک تصویر مرکزی (یا موازی) صفحه به خودش و سپس با یک تشابه، می‌توان $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل کرد. بنابراین هرگاه بتوانیم نشان دهیم که این تبدیل تصویری که $ABCD$ را به $A'B'C'D'$ بدل می‌کند منحصر به فرد باشد، قضیه ثابت خواهد شد.



گیریم E و F ؛ E' و F' نقطه‌های برخورد امتدادهای ضلعهای AB و CD ، AD و BC ؛ $A'B'C'D'$ از چهارضلعیهای $ABCD$ و $A'D'$ ، $C'D'$ و $B'C'$ باشند (برخی از نقطه‌های برخورد ممکن است در بینهایت باشند)، فرض می‌کنیم G و G' نقطه‌های برخورد قطرهای باشند. چون AB به $A'B'$ و CD به $C'D'$ بدل می‌شود، در نتیجه E به E' بدل خواهد شد، همچنین F به F' و G به G' . بنابراین خطهای EG و FG به خطهای $E'G'$ و $F'G'$ بدل می‌شوند.

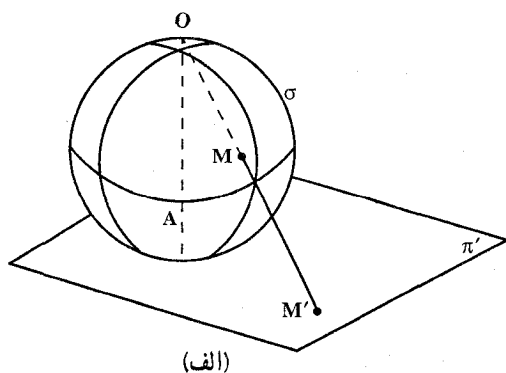
خطهای EG و FG چهارضلعی $ABCD$ را به چهارچهارضلعی کوچکتر تقسیم می‌کنند؛ هریک از اینها بر اثر تبدیل تصویری ما به چهارضلعی معلومی بدل می‌شوند. از وصل کردن نقطه‌های برخورد قطرهای چهارضلعیهای کوچکتر به E و F و ادامه این روش، یک شبکه از خطها در $ABCD$ به دست می‌آوریم که نگاره‌های آنها را در $A'B'C'D'$ بر اثر تبدیل ذکر شده در دست داریم (شکل (ع)). این شبکه را می‌توان به دلخواه چگال کرد. (به آسانی دیده می‌شود که هر تصویر مرکزی از صفحه شکل ما بر خودش، که EF را به خط بینهایت بدل کند، شبکه ما را به یک شبکه از متوازی‌الاضلاعهایی که در شکل (غ) رسم شده، بدل می‌کند. حال برهان منحصر به فرد بودن تبدیل تصویری که

ABCD را به $A'B'C'D'$ بدل کند، به روش مشابه برهان قضیه ۳ دنبال می‌شود).
ما خود را به تعیین نگاره‌های نقطه‌های داخل چهارضلعی محدود کردیم، زیرا خود
تعریف یک تبدیل تصویری سر و کارش با قسمتی از صفحه است. ولی یادآوری
می‌کنیم که ممکن است به همان طریقی که در برهان قضیه ۳ صورت گرفته بود، شبکه
خود را به خارج چهارضلعی اصلی بسط دهیم.



۳۳۲. برای اثبات این قضیه‌ها راههای مختلفی وجود دارد. راه انتخابی ما ساده‌ترین راه
نیست، ولی بینشی که به شخص می‌دهد ارزش تلاش اضافی را دارد. این راه براساس
مطالعه تصویر گنجگاشتی یک کره بر یک صفحه استوار شده است.

منظور از تصویر گنجگاشتی یک کره σ بر صفحه π' ، مماس بر σ در یک نقطه A ،
تصویر مرکزی σ است بر π' که O مرکز تصویر، سر دیگر قطری از σ است که به A
وصل می‌شود. پس نگاره یک نقطه M از σ ($M \neq O$) بر اثر تصویر گنجگاشتی، نقطه
 M' محل برخورد OM است با صفحه π' (شکل الف)). نقطه O ی کره، بر اثر این



تصویر گنجگاشتی بر هیچ
نقطه صفحه π' تصویر
نمی‌شود.

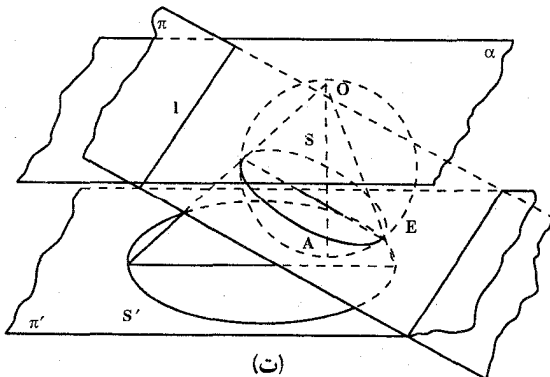
مهمترین ویژگی تصویر
گنجگاشتی در قضیه زیر بیان
شده است:

قضیه. تصویر گنجگاشتی،
هر دایره واقع بر کره σ را به

اگر S دایره مماسی استوانه Λ و کره σ باشد (شکل (پ. ۲))، مولد گذرنده بر M از استوانه را رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را با صفحه‌های π' و π (که در بالا وارد کردیم) به Q و R نشان می‌دهیم. چون $MR \parallel OP'$ ، بر پاره خط $M'P'$ واقع خواهد شد. Q را به O وصل می‌کنیم و مانند قسمت قبل نتیجه می‌گیریم که $\Delta MRM' \sim \Delta MQO$ و از این مشابَهت به تساوی $MR = RM'$ می‌رسیم (زیرا $QM = QO$ مماسهای رسم شده از Q بر σ هستند). اما از تشابه مثلثهای $OP'M'$ و MRM' نتیجه می‌گیریم که $P'M' = P'O$ ، که معنی آن این است که در این حالت هم طول $P'M'$ به انتخاب نقطه M بر S بستگی ندارد.

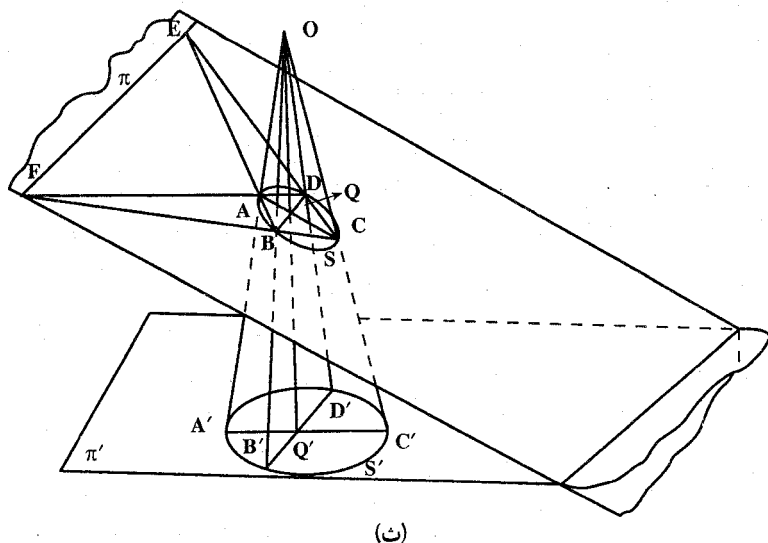
بعکس، گیریم S' دایره‌ای دلخواه به مرکز P' در صفحه π' و M' نقطه‌ای از S' ، و نقطه‌ای از σ ، پیشنگاشت M' ، بر اثر تصویر گنجنگاشتی باشد. فرض می‌کنیم P نقطه برخورد خط OP' با صفحه α ، مماس بر σ در M باشد (به شرطی که چنین نقطه‌ای موجود باشد). مانند حالت قبل ثابت می‌کنیم که P مستقل از انتخاب M' بر S' است. ثابت می‌کنیم که مکان نقطه M دایره S است، که یا دایره تماسی کره σ با مخروط K حاصل از مماسهای رسم شده بر این کره از نقطه P است، و یا دایره مماسی استوانه Λ حاصل از مماسهای بر σ به موازات OP' .

با استفاده از قضیه ۲ بلافاصله می‌توانیم قضیه‌های بنیادی ۱ و ۲ را ثابت کنیم. برهان قضیه ۲. گیریم S دایره‌ای در یک صفحه π و l خطی در π نامقاطع با S باشد. کره دلخواه σ را بر S ، و صفحه α گذرنده بر l و مماس بر σ در یک نقطه O را رسم می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم π' صفحه‌ای موازی α و مماس بر σ در نقطه A ، متقاطر O ، باشد (شکل (ت)). تصویر مرکزی π از O بر π' ، (به موجب قضیه ۲) S را به یک دایره S' از صفحه π' ، و (بدیهی است که) l را به خط بینهایت π' بدل می‌کند.



(ت)

برهان قضیه ۱. گیریم S یک دایره و Q نقطه‌ای در داخل آن باشد. فرض می‌کنیم AC و BD دو وتر رسم شده از Q باشند و چهارضلعی $ABCD$ (شکل (ث)) را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل این چهارضلعی را به E و F نشان می‌دهیم.



همه خطهای رسم شده از E ، یا S را (۱) دو بار بر کمان AB ، یا (۲) دو بار بر کمان CD (اگر دو نقطه برخورد، بر یک کمان یکی شوند، خط مورد نظر مماس می‌شود و برهان معتبر می‌ماند)، یا (۳) یک بار بر کمان AD و یک بار بر کمان BC ، می‌برند یا (۴) نقطه مشترکی با S ندارند. همچنین خطهای گذرنده بر F ، یا S را (۱) دو بار بر کمان AD ، یا (۲) دو بار بر کمان BC ، یا (۳) یک بار بر کمان AB و یک بار بر کمان CD ، می‌برند یا (۴) نقطه مشترکی با S ندارند. خط EF باید به دسته چهارم متعلق باشد؛ زیرا اگر به یکی از سه دسته دیگر نسبت به E متعلق باشد، شرایط بودن در یکی از چهار دسته نسبت به F را نقض می‌کند.

حال شکل را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایره S' و EF به خط بینهایت π' بدل شود (که بنابر قضیه ۱ ممکن است). نگاره چهارضلعی $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع $A'B'C'D'$ محاط در S' ، یعنی یک مستطیل است. چون Q نقطه تقاطع قطرهای $ABCD$ است، پس نگاره اش، Q' ، نقطه تقاطع قطرهای مستطیل $A'B'C'D'$ ، یعنی مرکز S' خواهد شد.

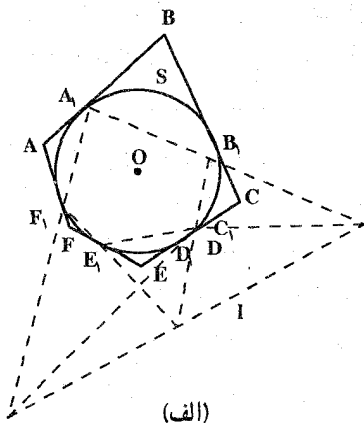
قضیه‌های ۱ و ۲ به ما امکان می‌دهند که از تصویرهای مرکزی برای حل بسیاری از مسأله‌های متضمن دایره‌ها استفاده کنیم. تعدادی از این گونه مسأله‌ها در زیر می‌آیند. به‌خاطر سپردن این واقعیت که یک تصویر مرکزی که یک دایره S را به یک دایره S' بدل می‌کند، مماس بر S (یعنی خطی که با S تنها یک نقطه مشترک دارد) را نیز به مماس بر S' بدل می‌کند، در حل مسأله‌ها بیشتر تا حدی مفید واقع می‌شود. بدون استفاده از تصویر مرکزی، علی‌الاصول، حل این مسأله‌ها خیلی دشوار است.

۳۳۳. تصویر جسم نمای حالت خاص انعکاس است.

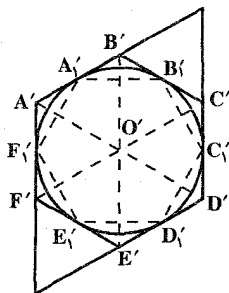
۳۳۴. هرگاه دو مثلث دارای مرکز همسانی باشند، دارای محور همسانی نیز می‌باشند و بعکس. تعریف. مرکز همسانی. هرگاه بین دو شکل پدید آمده از نقطه‌ها و خطها، چنان تناظری وجود داشته باشد که هر جفت نقطه نظیر هم بر خطهای هم‌رس واقع باشند، می‌گوییم که آن دو شکل مرکز همسانی دارند.

محور همسانی. هرگاه تناظر بین دو شکل چنان باشد که هر جفت خط نظیر هم در نقطه‌های واقع بر یک خط راست متقاطع باشند، می‌گوییم که آن دو شکل محور همسانی دارند.

۳۳۵. شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (شکل (الف)) در دایره S محاط شده است، پس در شرایط قضیه پاسکال صدق می‌کند. صفحه π (الف) را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم، به گونه‌ای که S به یک دایره S' بدل شود و خط l ، که نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل شش ضلعی $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ را بر خود دارد، به خط بینهایت صفحه π' بدل شود. بر اثر این تصویر، $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ به شش ضلعی $A'_1B'_1C'_1D'_1E'_1F'_1$ بدل می‌شود که ضلعهای مقابلش موازی‌اند (شکل (ب)). حال مماسهای $A'B'$ ، $A'F'$ ،

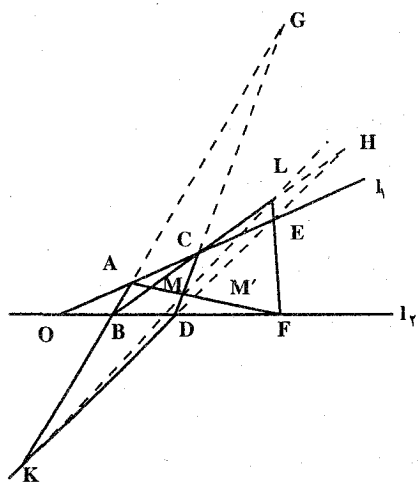


(الف)



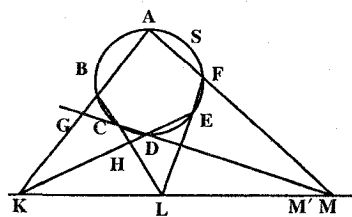
(ب)

$D'C'$ و $D'E'$ بر S' را در نظر می‌گیریم. چون $A'F' \parallel C'D'$ ، از این جا نتیجه می‌شود که $A'D'$ یک محور تقارن چهارضلعی حاصل از این مماسها است. این محور از O' ، مرکز S' ، می‌گذرد و بر $A'F'$ و $C'D'$ عمود است. به طریقی کاملاً مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که خطهای $B'E'$ و $C'F'$ از O' می‌گذرند. از این جا نتیجه می‌شود که خطهای AD ، BE و CF هم‌رسند.



۳۳۶. نقطه‌های واقع بر l_1 و l_2 را بترتیب با A ، C و E ؛ B ، D و F نشان می‌دهیم. نقطه‌های برخورد خطهای AB و ED ، CD و AF ، CB و EF را با M ، K و L ، و نقطه‌های برخورد خطهای AB و ED ، CB و ED ، l_1 و l_2 را هم با G ، H و O نشان می‌دهیم، و نقطه برخورد KL و CD را با M' . باید نشان دهیم که M' بر M منطبق است. تصویر CD از مرکز A بر خط l_2 ، نقطه‌های C ، G ، D و M را به نقطه‌های O ، B ، D و F

بدل می‌کند، و تصویر l_1 از مرکز E بر خط CB ، نقطه‌های O ، B ، D و F را به C ، B ، H و L . تصویر مجدد CB از مرکز K بر خط CD ، نقطه‌های C ، B ، H و L را به نقطه‌های C ، G ، D و M' بدل می‌کند. حاصلضرب این سه تصویر متوالی، تبدیلی است تصویری از خط CD که نقطه‌های C ، G ، D و M را به نقطه‌های C ، G ، D و M' بدل می‌کند. به موجب یک ویژگی بنیادی از تبدیلهای تصویری، یک تبدیل تصویری از یک خط که سه نقطه آن را ثابت نگه‌دارد (که در مورد مسأله ما، نقطه‌های C ، G و D است) یک تبدیل همانی است. از این جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های M و M' بر هم منطبقند.



۳۳۷. نقطه‌های برخورد AB و DE ، BC و EF ، CD و FA و KL را به M ، L ، K و M' نشان می‌دهیم، و نقطه‌های تقاطع AB و CD ، BC و DE را با G و H (شکل). باید نشان دهیم که M بر M' منطبق است. تصویر

از A بر دایره S نقطه‌های G، C، D و M را به نقطه‌های B، C، D و F بدل می‌کند، و تصویر این نقطه‌ها از E بر خط BC آنها را به B، C، H و L. تصویر نقطه‌های اخیر از K بر خط CD آنها را به G، C، D و M' بدل می‌کند، که در این صورت M و M' بر هم منطبق می‌شوند.

۳۳۹. گزینہ (د) درست است.

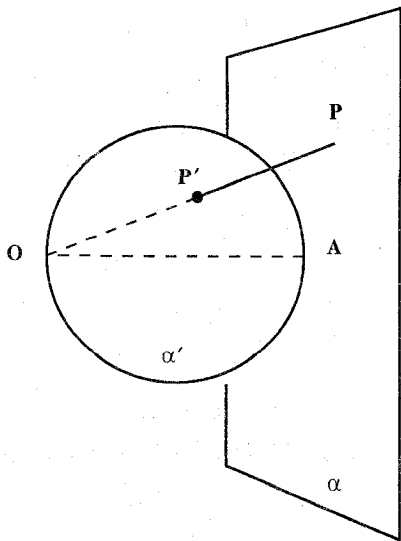
۳۴۰. الف. تبدیل تصویری دایره S به شرح زیر را در نظر می گیریم. نقطه M متعلق به S ، از نقطه A بر خط CD تصویر شده است. نقطه حاصل یعنی N ، به اندازه $NN' = a$ در طول خط CD منتقل شده است (یعنی تبدیل تصویری خط CD است)، و بالاخره نقطه N' از B بر نقطه M' واقع بر S (شکل) تصویر شده است.

نقطه مطلوب X نقطه ثابتی است از تبدیل تصویری بالا. برای تعیین آن مجبوریم نگاره‌های سه نقطه دلخواه از دایرهٔ S را بر اثر تبدیل خود پیدا کنیم. مسأله می‌تواند دو یا یک جواب داشته باشد، یا جوابی نداشته باشد.

ب. راه حل آن با راه حل مسئله (الف) فقط در این نکته تفاوت دارد که به جای انتقال a در طول خط CD ، باید از حرکت نیمدور پیرامون نقطه مفروض E استفاده کنیم (که یک تبدیل تصویری از CD نیز هست).

٣٤١. صفحة عمود منصف OA (شكل) كرة α'

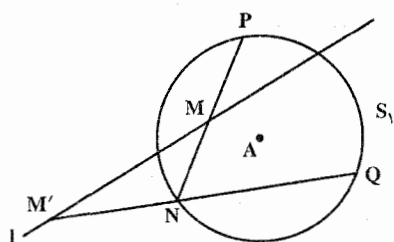
را در یک دایرهٔ عظیمهٔ خاص قطع می‌کند که اصطلاحاً آن را استوا می‌نامیم. این استوا هر دایرهٔ عظیمهٔ دیگر از کره را در دو نقطه قطع می‌کند که در دو سر یک قطر واقعند. ویژگی استوا این است که تصویرهای قطرهای آن روی صفحهٔ α عبارتند از قطرهای دایره ای از این صفحه که مرکزش A و شعاعش $\frac{1}{2}k$ می‌باشد.



$BA_1 \perp l_3$, $CA_1 \perp l_3$; $BC \perp l_2$ و $CB_1 \perp l_1$ هستند. اما این نقطه‌ها همخطند. حکمی مشابه این حکم را می‌توان بر هر مثلث از چهار مثلث جاری دانست. بنابراین هر چهار نقطه مورد نظر همخطند.

۲.۲.۲.۳. تعیین نقطه‌های برخورد

۳۴۴. فرض می‌کنیم P و Q دو نقطه بر S_1 باشند (شکل). l را از P بر S_1 و S_1 را از Q بر l تصور می‌کنیم. روشن است که نقطه‌های برخورد S_1 و l بر اثر تبدیل تصویری حاصل از l ثابتند. یک راه آسان برای پیدا کردن سه نقطه S, R و T بر l ، این



است که سه نقطه R_1, S_1 و T_1 از S_1 را اول از P بر l ، بر نقطه‌های S, R و T ، تصور کنیم و سپس از Q بر نقطه‌های R', S' و T' . بدین ترتیب، مسأله ما بدل می‌شود به مسأله تعیین نقطه‌های ثابت یک تبدیل تصویری با ستاره، از یک خط l ، که به وسیله نقطه‌های R', S' و T' ، نگاره‌های S, R و T بر l ، مشخص شده‌اند. اگر دایره S در صفحه داده شده باشد، این مسأله می‌تواند به کمک ستاره تنها حل شود.

۳.۲.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

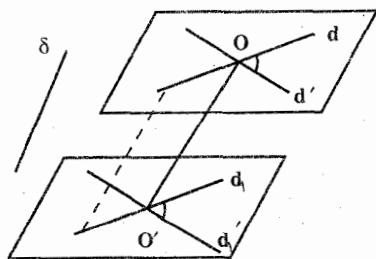
۱.۳.۲.۳. خطها موازی‌اند

۳۴۵. زیرا در این حالت، صفحه‌های P_1 و P_2 که از نقطه O و خطهای l_1 و l_2 می‌گذرند، یکدیگر را در OM که موازی صفحه π' است، قطع می‌کنند. از آن جا نتیجه می‌شود که l'_1 و l'_2 تصویرهای l_1 و l_2 ، خطهایی موازی، در صفحه π' هستند.

۴.۲.۳. زاویه

۱.۴.۲.۳. اندازه زاویه

۳۴۶. اگر تصویرهای دو خط d و d' روی صفحه π' به موازات امتداد δ را بترتیب d_1 و



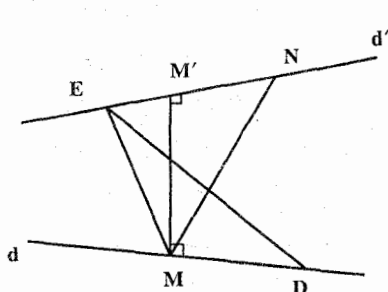
$d' \parallel d_1$ و $d' \parallel d_1'$ است. پس زاویه بین دو خط d_1 و d_1' برابر زاویه بین دو خط d و d' ، یعنی 30° است. نکته. دو زاویه که ضلعهایشان دو به دو موازی و در یک جهت باشند، با هم مساوی اند.

۵.۲.۳. پاره خط

۱.۵.۲.۳. اندازه پاره خط

۳۴۷. داریم:

$$A'B' = AB \cos 30^\circ \Rightarrow A'B' = 5 \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ cm}$$



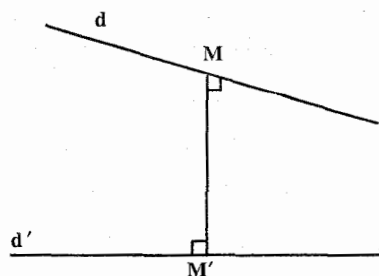
۳۴۸. دو خط متنافر d و d' و پاره خط MM' ،

عمود مشترک آنها را در نظر می گیریم. اگر پاره خط دیگری مانند MN را در نظر بگیریم که یک سر آن نقطه M و سر دیگری روی خط d' واقع باشد. در مثلث قائم الزاویه $MM'N$ ، $MN > MM'$ است. حال اگر پاره خط

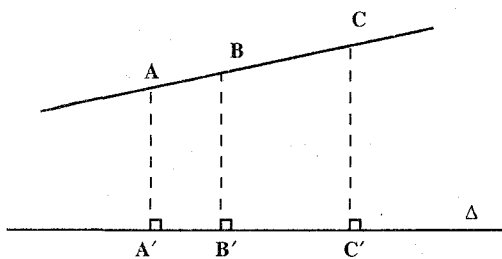
DE را که دو سرش روی دو خط d و d' قرار داشته و متمایز با پاره خط MM' باشد اختیار کنیم، $MM' < DE$ است.

۳۴۹. دو خط متنافر d و d' و پاره خط MM' را

که عمود مشترک آن دو می باشد، اختیار کنید. با استفاده از برهان خلف ثابت کنید که این پاره خط منحصر به فرد است.



۶.۲.۳. رابطه‌های مترى

۳۵۰. خطهای متوازی AA' ، BB' ،و CC' دو خط Δ و ABC را

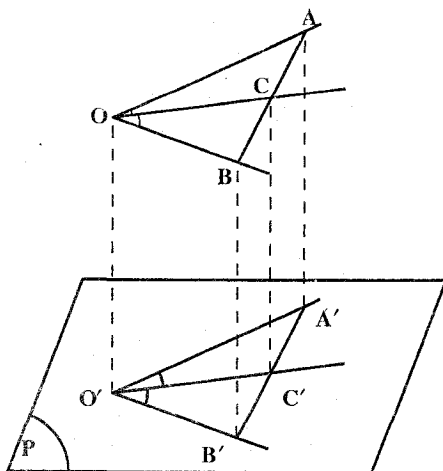
قطع کرده‌اند؛ بنابراین رابطه

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ و از آن جا}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} = m \text{ رابطه}$$

برقرار است.

۷.۲.۳. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند



۳۵۱. یک زاویه و نیمساز آن را در نظر

می‌گیریم و روی ضلعهای طولهای

متساوی OA و OB را جدا می‌کنیم.نیمساز زاویه، پاره‌خط AB را درنقطه C وسط آن قطع می‌کند و درمثلث متساوی‌الساقین AOB ،نیم‌خط OC ارتفاع رأس O نیز

هست. اگر این شکل را روی صفحه

 P تصویر کنیم، مثلث $A'O'B'$ ومیانۀ آن $O'C'$ به دست می‌آید. زیراتصویر نقطه C وسط AB ، نقطه C' وسط $A'B'$ است. برای آن که میانۀ $O'C'$ در عین حال نیمساز زاویه $A'O'B'$ نیزباشد، لازم و کافی است که ارتفاع مثلث باشد؛ یعنی زاویه قائمه OCA به زاویه قائمه

تصویر شود و این منظور در صورتی ممکن است که یکی از ضلعهای این زاویه با

صفحه P موازی باشد. بنابراین یا باید OC با صفحه P موازی باشد و یا ضلع CA کهبه موازات نیمساز زاویه خارجی AOB می‌باشد.

نقطه‌های برخورد خط مطلوب با I_1 و I_2 باشند (شکل (الف)). I_1 را از P بر I_2 تصویر می‌کنیم. سپس I_2 را بر I_1 منطبق می‌کنیم به طوری که، به ویژه، B بر A منطبق شود، و سرانجام I_2 را تحت تأثیر یک

تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{m}{n}$ قرار

می‌دهیم. تبدیل نتیجه I_1 تبدیلی است تصویری؛ زیرا حاصلضرب یک تصویر و یک تجانس است. X یک نقطه ثابت این تبدیل است (داریم: $X \rightarrow Y \rightarrow X$)؛ پس می‌تواند تعیین شود. چون تجانس می‌تواند به نسبت $-\frac{m}{n}$ نیز باشد، مسأله تا چهار جواب دارد. در حالت خاصی که تبدیل تصویری بالا به همانی بدل شود، مسأله نامعین است. (این حالت زمانی روی می‌دهد که خط‌های I_1 و I_2 و نقطه‌های A و B بر اثر تجانس به مرکز P و نسبت $\pm \frac{m}{n}$ متناظر یکدیگر شوند.)

ب. فرض می‌کنیم که $l_1 \neq l_2$ ، و l_1 را بر l_2 از P تصویر می‌کنیم. نقطهٔ مطلوب X بر l_1 به یک نقطهٔ Y بر l_2 بدل می‌شود. بعد l_2 را دوباره بر l_1 از نقطهٔ Q، نقطهٔ تقاطع خطهای $l_1 || l_2'$ و $l_2 || l_1'$ که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، تصویر می‌کنیم (شکل (الف)).

گیریم این تصویر نقطهٔ Y از l_2 را به یک نقطهٔ X_1 از l_1 بدل کند. از تشابه مثلثهای $AX_1/AQ = BQ/BY$ داریم:

$$AX_1 \cdot BY = AQ \cdot BQ = p^2$$

یعنی:

که p می تواند تعیین شود. حال اگر تجانس به مرکز A و نسبت k^2/p^2 را برای l_1 به کار ببریم، نقطه X_1 به یک نقطه X' بدل می شود، به طوری که:

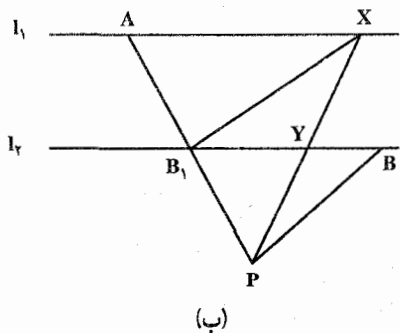
$$AX' = \frac{k^r}{p^r} AX_1 = \frac{k^r}{p^r} \cdot \frac{p^r}{BY} = \frac{k^r}{BY} = AX$$

یعنی X' بر X منطبق می‌شود. این نشان می‌دهد که X نقطه ثابتی از تبدیل تصویری I_1 است، پس می‌تواند معین شود. چون تجانس می‌تواند دارای نسبت $p^2/k^2 -$ نیز باشد، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (تبدیل تصویری ما نمی‌تواند به تبدیل همانی بدل شود). اگر $I_1 || I_2$ ، و B_1 نقطه برخورد PA و I_2 باشد، آن‌گاه:

$$B_1Y = \frac{PB_1}{PA} \cdot AX$$

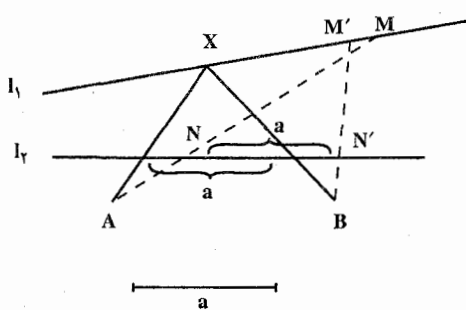
بنابراین شرط $AX.BY = k^2$ با شرط

$$BY.B_1Y = \frac{PB_1}{PA} \cdot k^Y$$



(شکل (ب)) هم ارز است. چون، علاوه بر حاصلضرب پاره خطهای BY و B_1Y ، $BY \cdot B_1Y$ ، مجموع (یا تفاضل) آنها، BB_1 ، نیز داده شده است، این پاره خطها را بلافاصله می توانیم رسم کنیم. یادداشت. به جای این که قید کنیم که خط مطلوب از نقطه مفروض P می گذرد، می توانستیم قید کنیم که امتدادش معین

است. در این صورت در راه حل ما، کافی است به جای تصویر مرکزی به مرکز P، تصویر موازی بگذاریم.



۳۵۳. الف. تبدیل تصویری خط l_1 به شرح زیر را در نظر می گیریم:

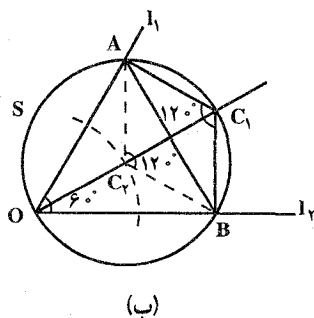
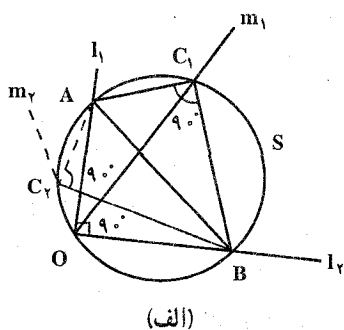
تصویر یک نقطه M واقع بر آن از نقطه A بر خط l_2 سپس انتقال نقطه حاصل، یعنی N ، به اندازه $NN' = a$ در طول l_2 و سرانجام تصویر نقطه N' بر خط

I_1 از نقطه B و تعیین نقطه M' ، پای تصویر (شکل). نقطه مطلوب X ، نقطه ثابت این تبدیل تصویری است و بدین عنوان می‌تواند معین شود. مسأله ممکن است دارای دو یا یک جواب باشد، و یا جوابی نداشته باشد.

ب. تفاوت راه حل این قسمت با راه حل قسمت (الف) فقط در این است که به جای انتقال به اندازه a در طول I_1 ، یک نیمدور خط I_1 در حول نقطه E را می گذاریم.

۹.۲.۳. سایر مسأله های مربوط به این قسمت

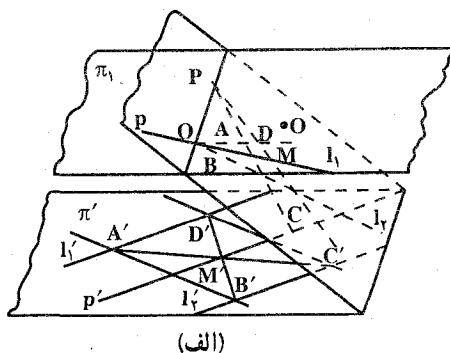
۳۵۴. الف. نقطه های C_1 و C_2 در شکل (الف) بر دایره محیطی مثلث ABO واقعند. وقتی پاره خط AB طوری بلغزد که دو سرش بر ضلعهای زاویه I_1OI_2 باشند، رأسهای C_1 و C_2 از مثلث ABC_1 و ABC_2 خطهای m_1 و m_2 را که از O می گذرند، می پیمایند. [دقیقتر بگوییم، پاره خطهایی از این خطها را می پیمایند. تعیین طول این پاره خطها به خواننده واگذار می شود.]



ب. نقطه C_1 در شکل (ب) بر S ، دایره محیطی مثلث ABO ، واقع است؛ نقطه C_2 مرکز این دایره است. وقتی پاره خط AB طوری بلغزد که دو سرش بر ضلعهای زاویه I_1OI_2 واقع باشد، رأس C_2 از مثلث ABC_2 دایره ای به مرکز O را می پیماید. [به بیان دقیقتر، C_1 پاره خطی از این خط را می پیماید، و C_2 کمانی از دایره را.]

۱۰.۲.۳. مسأله های ترکیبی

۳۵۵. الف. فرض می کنیم Q نقطه برخورد خطهای I_1 و I_2 باشد. صفحه π ی شکل (الف) [در صورت مسأله] را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم به طوری که PQ خط خاص صفحه π باشد. برای این کار کافی است بر PQ صفحه دلخواهی مانند π_1 ، غیر از π ،



بگذرانیم و π را از یک نقطه
 O ی π_1 بر یک صفحه π'
 موازی π_1 تصویر کنیم شکل
 (الف). در این صورت شکل
 (الف) [در صورت مسأله] (در
 صفحه π) به شکل (ب) (در
 صفحه π') بدل می شود و مکان
 نقطه های M ، نقطه برخورد

خطهای AC و BD ، به یک خط p' موازی با l_1 و l_2 و متساوی الفاصله از آن دو
 بدل می شود. از ویژگی (الف) تصویر مرکزی، نتیجه می شود که مکان نقطه های M یک
 خط است.

اگر $l_1 \parallel l_2$ ، آن گاه از راه تصویر صفحه π بر یک صفحه π' زمانی به شکل (ب)
 می رسمیم، که خط گذرنده بر P موازی l_1 و l_2 ، خط خاص π باشد.

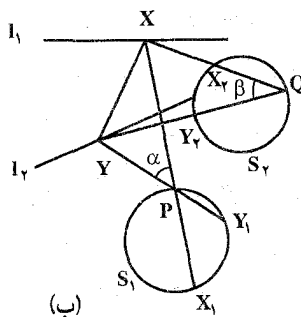
از ویژگی (ب) ی تصویر مرکزی بلافاصله نتیجه می شود که هرگاه l_1 و l_2 در یک نقطه
 Q متقاطع باشند، آن گاه Q از P می گذرد و اگر $l_1 \parallel l_2$ ، آن گاه p با l_1 و l_2 موازی است.
 اگر P_1 نقطه دلخواهی از خط PQ باشد، آن گاه بر اثر تصویر مرکزی ما، خطهای
 متقاطع در P_1 به خطهای موازی بدل می شوند و مکان نقطه های M_1 ، محل برخورد
 خطهای A_1C_1 و B_1D_1 به خط p' بدل می شود. از این جا نتیجه می شود که مکان
 نقطه های M_1 بر p منطبق است. (همچنین اگر $l_1 \parallel l_2$ و بنابراین $PP_1 \parallel l_1$ ، آن گاه P
 P_1 همان خط p را مشخص می کنند.)

ب. صفحه π ی شکل (ب) [در صورت مسأله] را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم
 به طوری که خط q خط خاص π باشد. در این صورت خطهای UA و UB و VA
 VB به خطهای موازی بدل می شوند (شکل (پ))؛ خط MN به قطر $M'N'$ از
 متوازی الاضلاع $M'A'N'B'$ بدل می شود و قطر دیگر $A'B'$ را در Q' نصف می کند.
 بنابراین، به ازای هر انتخاب U و V ، خط MN به یک خط $M'N'$ بدل می شود که
 $A'B'$ را در همان نقطه Q' می برد؛ از آن جا نتیجه می شود که همه خطهای MN ،
 خط AB را در یک نقطه Q می برند.

(به خاطر داشته باشید که $\widehat{X_1Y_1} = 2\widehat{X_1PY_1} = 2\alpha$)؛ پس X_1 یک نقطه ثابت است. اکنون سه نقطه A, B و C را بر S انتخاب، و A', B', C' ، نگاره‌های آنها را بر اثر این تبدیل تعیین می‌کنیم (شکل (الف)): A_1 نقطه برخورد PA و l است، $A_1A_2 = a$ ، A_3 نقطه برخورد PA_2 و S است، و $\widehat{A_3A'} = 2\alpha$ ؛ B' و C' به طریق مشابه تعیین می‌شوند). نقطه X_1 می‌تواند به عنوان یک نقطه ثابت از تبدیل تصویری دایره S تعیین شود که A, B و C را به A', B', C' بدل کند.

مسأله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، و یا جوابی نداشته باشد.

ب. دایره‌های S_1 و S_2 را که بترتیب بر نقطه‌های P و Q می‌گذرند، رسم می‌کنیم. بگیریم PX و PY دایره S_1 را در نقطه‌های X_1 و Y_1 ببرند، و QX و QY دایره S_2 را در نقطه‌های X_2 و Y_2 (شکل (ب)). تبدیل تصویری S_1 به شرح زیر را در نظر می‌گیریم:



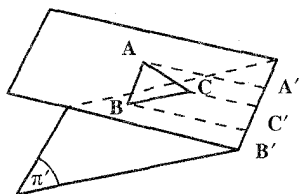
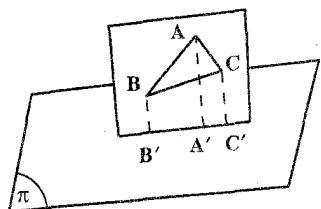
S_1 از P بر l_1 تصویر شده است، سپس l_1 از Q بر دایره S_2 ؛ بعد S_2 در حول مرکزش به زاویه 2β دوران کرده است. آن‌گاه S_2 از Q بر l_2 تصویر شده است، بعد l_2 از P بر S_1 ؛ و سرانجام S_1 در حول مرکزش به زاویه 2α دوران کرده است. اثر این تبدیل بر نقطه X_1 چنین است $X_1 \rightarrow X \rightarrow X_2 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y \rightarrow Y_1 \rightarrow X_1$ ، پس X_1 یک نقطه ثابت است. حال سه نقطه A_1, B_1 و C_1 را بر S_1 انتخاب، و نگاره‌های آنها A'_1, B'_1 و C'_1 را بر اثر تبدیل فوق پیدا می‌کنیم. پس نقطه X_1 ممکن است به عنوان یک نقطه ثابت تبدیل تصویری S_1 ، که A_1, B_1 و C_1 را به A'_1, B'_1 و C'_1 بدل می‌کند، انتخاب شود.

چون S_1 به دو طریق ممکن است به زاویه 2α دوران داده شود، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد.

۳.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مثلث

۱.۳.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، ...

۳۵۷. اگر صفحه تصویر بر صفحه مثلث ABC عمود باشد و یا امتداد تصویر موازی صفحه مثلث ABC باشد.



۲.۳.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۳.۳. نقطه‌ها همخطند

۳۵۸. صفحه π ی سه مثلث را بر یک صفحه π' تصویر

کنید به طوری که خط خاص π باشد. بر

اثر این تصویر مثلثهای ABC ، $A_1B_1C_1$ و

$A_2B_2C_2$ به مثلثهای دو به دو متجانس $A'B'C'$ ،

$A_1'B_1'C_1'$ و $A_2'B_2'C_2'$ بدل می‌شوند، و نقطه

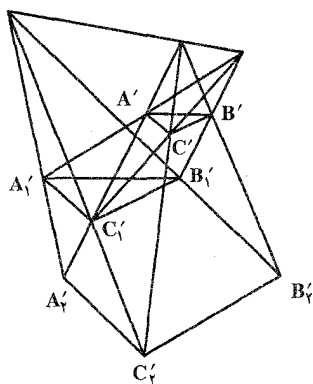
برخورد خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 ؛

BB_2 و CC_2 ؛ A_1A_2 ، B_1B_2 و C_1C_2 به

مرکزهای تجانس این مثلثها بدل می‌شوند. به موجب

قضیه سه مرکز تجانس، این سه نقطه همخطند (شکل).

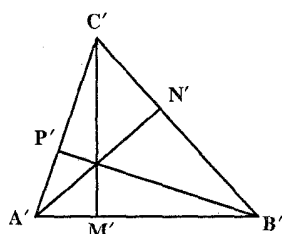
نتیجه. پیشنگاره‌های این نقطه‌ها نیز بر اثر تصویر ما همخطند.



۳.۳.۳. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۳.۳.۳ خطها همرسند

۳۵۹. در درسهای هندسه دیرستانی ثابت می کنند که در یک مثلث میانه ها، ارتفاعها و نیمسازها، سه تاییهای همرس تشکیل می دهند.



(الف)

مسأله ما زمانی حل می شود که بتوانیم صفحه مثلث ABC را با یک تصویر موازی بر صفحه دیگر بنگاریم، به طوری که خطهای AN، BP و CM به سه میانه، سه نیمساز یا سه ارتفاع مثلث A'B'C'،

نگاره مثلث ABC، بدل شوند. روشن است که خطهای AN، BP و CM نمی توانند به وسیله یک تصویر موازی بر میانه های یک مثلث نگاشته شوند، مگر این که خود آنها میانه های ΔABC باشند. باز، همیشه ممکن نیست خطهای AN، BP و CM را بر نیمسازهای یک مثلث نگاشت. مانده است که نگاشت خطهای AN، BP و CM را بر اثر تصویر موازی بر ارتفاعهای یک مثلث، امتحان کنیم.

ثابت می کنیم که هرگاه A'N'، B'P' و C'M' از ارتفاعهای یک مثلث A'B'C' باشند (شکل (الف))، آن گاه:

$$\frac{A'M'}{M'B'} \cdot \frac{B'N'}{N'C'} \cdot \frac{C'P'}{P'A'} = 1$$

چون از تشابه مثلثهای قائم الزاویه A'N'C' و B'P'C' خواهیم داشت:

$$\frac{C'P'}{N'C'} = \frac{a}{b}$$

که $a = B'C'$ و $b = A'C'$. عیناً به همین طریق می توان نشان داد که:

$$\frac{B'N'}{M'B'} = \frac{c}{a} \text{ و } c = AB' \text{ و } \frac{A'M'}{P'A'} = \frac{b}{c}$$

از ضرب این سه تساوی نتیجه می گیریم:

$$\frac{A'M'}{M'B'} \cdot \frac{B'N'}{N'C'} \cdot \frac{C'P'}{P'A'} = \frac{A'M'}{P'A'} \cdot \frac{B'N'}{M'B'} \cdot \frac{C'P'}{N'C'} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$$

حال یک مثلث A'B'C' می سازیم، چنان که پاهای ارتفاعهای آن، N'، M' و P'، ضلعهای مثلث را به نسبتهای مفروض زیر تقسیم کنند:

$$\frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM}{MB}, \frac{B'N'}{N'C'} = \frac{BN}{NC}, \frac{C'P'}{P'A'} = \frac{CP}{PA}$$

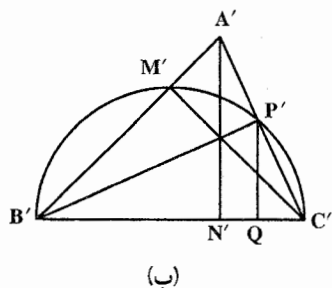
یک پاره خط دلخواه $B'C'$ را به نسبت $B'N'/N'C' = BN/NC$ تقسیم می‌کنیم. در N' عمودی بر $B'C'$ اخراج، و سپس پاره خط $C'N'$ را به نسبت $C'Q/QN' = CP/PA$ تقسیم می‌کنیم. در Q عمودی بر $C'B'$ اخراج (شکل (ب)) و فرض می‌کنیم P' نقطه برخورد این عمود با نیم‌دایره به قطر $C'B'$ باشد و A' نقطه برخورد $C'P'$ با عمود رسم شده بر $C'B'$ در N' . می‌گوییم $A'B'C'$ مثلث مطلوب است؛ زیرا $A'N'$ و $B'P'$ دو ارتفاع این مثلث هستند، و اگر $C'M'$ سومین ارتفاع آن باشد، چون داریم:

$$C'P'/P'A' = C'Q/QN' = CP/PA, B'N'/N'C' = BN/NC,$$

$$\frac{A'M'}{M'B'} \cdot \frac{B'N'}{N'C'} \cdot \frac{C'P'}{P'A'} = 1 = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA}$$

آنگاه نتیجه می‌شود:

$$A'M'/M'B' = AM/MB$$



(ب)

حال $\triangle ABC$ را به وسیله یک تصویر موازی بر روی مثلثی متشابه با $\triangle A'B'C'$ می‌نگاریم. به موجب ویژگی (ج) از یک تصویر موازی، نقطه‌های N, P, M بر پاهای ارتفاعهای نگاره $\triangle ABC$ نگاشته می‌شوند، و خطهای AN, BP, CM بر ارتفاعهای آن. چون سه ارتفاع یک مثلث هم‌رسند، پس خطهای AN, BP, CM نیز هم‌رس خواهند شد.

یادداشت. اکنون به آسانی می‌توانیم عکس این گزاره را اثبات کنیم: اگر سه خط که بر رأسهای مثلثی می‌گذرند، هم‌رس باشند، آنگاه N, P, M نقطه‌های برخورد این خطها با ضلعهای $\triangle ABC$ ، ضلعها را طوری تقسیم می‌کنند که:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

زیرا، فرض کنیم P_1 نقطه‌ای بر ضلع AC چنان باشد که:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP_1}{P_1A} = 1$$

پس خطهای AN ، BP_1 و CM همبرسند؛ یعنی BP_1 از نقطه برخورد AN و CM می‌گذرد. ولی این امر فقط زمانی ممکن است که BP_1 بر BP ، یعنی P بر P_1 منطبق باشد.

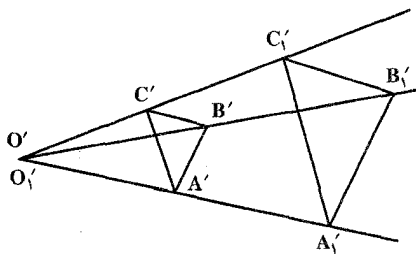
بدین ترتیب به قضیه زیر، که بیشتر قضیه سوا نامیده می‌شود، می‌رسیم:

گیریم P و M نقطه‌هایی بر ضلعهای $\triangle ABC$ (نه بر امتدادشان) باشند. شرط لازم و کافی برای این که خطهای AN ، BP و CM همبرس باشند، این است که داشته باشیم:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$$

۳۶۰. اول ثابت می‌کنیم که هرگاه خطهای

AA_1 ، BB_1 و CC_1 همبرس باشند، آن‌گاه P ، Q و R ، نقطه‌های برخورد خطهای BC و BB_1C_1 ، CA و CC_1A_1 ، AB و AA_1B_1 ، همخطند. برای اثبات این مطلب، صفحه π ی شکل داده شده



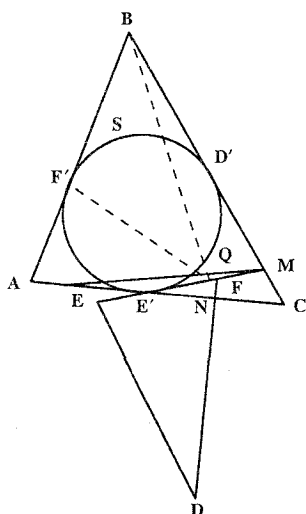
در صورت را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم، به طوری که QR خط خاص π باشد. در این صورت به موجب ویژگی (ب) تصویر مرکزی داریم $A'B' \parallel A_1B'_1$ و $A'C' \parallel A_1C'_1$. از $C'A' \parallel C_1A'_1$ نتیجه می‌گیریم که $O'A'/O'A'_1 = O'C'/O'C'_1$ و از $A'B' \parallel A_1B'_1$ نتیجه می‌گیریم، $O'A'/O'A'_1 = O'B'/O'B'_1$ ؛ یعنی $O'B'/O'B'_1 = O'C'/O'C'_1$. بنابراین خطهای $B'C'$ و $B'_1C'_1$ موازی‌اند و P ، نقطه برخورد BC و B_1C_1 بر خط خاص صفحه π قرار دارد، یعنی نقطه‌های P ، Q و R همخطند.

حال عکس آن را ثابت می‌کنیم. بدین منظور صفحه π ی شکل داده شده در صورت را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم، چنان که خطی که شامل P ، Q و R است، خط خاص π باشد. بر اثر این تصویر مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ به مثلثهای متشابه $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ که ضلعهای متناظرشان موازی‌اند، بدل می‌شود (شکل). فرض می‌کنیم O' نقطه برخورد $A'A'_1$ و $B'B'_1$ باشد و O'_1 نقطه برخورد $A'A'_1$ و $C'C'_1$ داریم.

از سوی دیگر از $O'A'/O'A'_1 = A'C'/A'_1C'_1$ و $O'A'/O'A'_1 = AB'/A'_1B'_1$ تشابه مثلثهای $A'B'C'$ و $A'B'C'_1$ نتیجه می گیریم که :

$$A'B'/A'_1B'_1 = A'C'/A'_1C'_1$$

بنابراین $O'A'/O'A'_1 = O'A'/O'A'_1$ ؛ یعنی دو نقطه O' و O'_1 برهم منطبقند. چون خطهای $A'A'_1$ ، $B'B'_1$ و $C'C'_1$ همسرند، پس خطهای AA_1 ، BB_1 و CC_1 نیز همسرند.



۳۶۱. شش ضلعی (تباهیده) $AF'BMFN$ (شکل در صورت) را در نظر می گیریم. از قضیه برانشن نتیجه می شود که خط FF' از نقطه برخورد خطهای AM و BN ، یعنی Q ، می گذرد (شکل). با در نظر گرفتن شش ضلعیهای مناسب، به طریق مشابه نشان می دهیم که خطهای DD' و EE' هم از Q می گذرند.

۳۶۲. فرض می کنیم ABC مثلثی دلخواه در صفحه π باشد. بر اثر یک تصویر موازی مناسب بر یک صفحه π' ، نگاره مثلث ABC یک مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ خواهد شد. به موجب ویژگی (ج) از تصویر موازی، نگاره های وسطهای ضلعهای مثلث ABC و وسطهای ضلعهای مثلث $A'B'C'$ خواهند شد. چون مثلث $A'B'C'$ متساوی الاضلاع است، میانه ها نیمسازهای مثلثند، پس در یک نقطه، مرکز دایره محاطی داخلی، برخورد می کنند ؛ پس میانه های مثلث اصلی ABC همسرند.

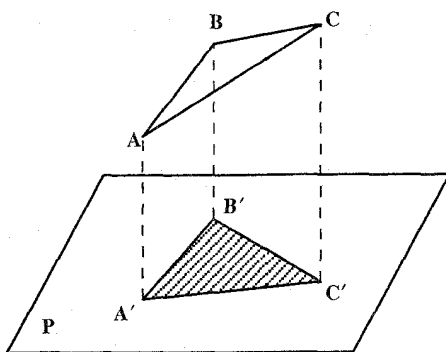
۴.۳.۳. زاویه

۱.۴.۳.۳. اندازه زاویه

۳۶۳. اگر S مساحت مثلث ABC ، S' مساحت مثلث $A'B'C'$ و α زاویه بین صفحه تصویر

و صفحه مثلث ABC باشد، داریم $S' = S \cos \alpha$. بنابراین خواهیم داشت :

$$12\sqrt{3} = 24 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 60^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$



۵.۳.۳. پاره خط

۱.۵.۳.۳. اندازه پاره خط

۳۶۴. زاویه $\angle AHA' = 30^\circ$ ؛ یعنی مساوی زاویه بین صفحه P و صفحه مثلث ABC است.

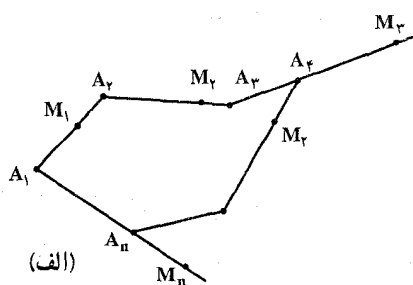
$$A'H = AH \cos \alpha \Rightarrow A'H = 12\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \text{ cm}$$

بنابراین داریم :

۶.۳.۳. رابطه های مترى

۳۶۵. نشان خواهیم داد که قضیه های منلائوس و سوا نتیجه های مستقیم قضیه زیر هستند که

ما قبل از حل این مسأله آن را ثابت می کنیم. فرض می کنیم $A_1 A_2 \dots A_n$ چند ضلعی



دلخواهی باشد و $M_1, M_2, \dots, M_n$

نقطه هایی بر ضلعها یا بر امتداد ضلعهای

آن باشند (شکل (الف)). نشان می دهیم

که حاصل ضرب

$$\frac{A_1 M_1}{A_2 M_1} \cdot \frac{A_2 M_2}{A_3 M_2} \cdot \frac{A_3 M_3}{A_4 M_3} \cdots \frac{A_n M_n}{A_1 M_n} \quad (\neq)$$

بر اثر یک تصویر مرکزی عوض نمی‌شود؛ زیرا اگر $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ و $M'_1, M'_2, \dots, M'_n$ نگاره‌های نقطه‌های $A_1, A_2, \dots, A_n$ و $M_1, M_2, \dots, M_n$ بر اثر یک تصویر مرکزی به مرکز O باشند، پس طبق دستور (۱) داریم:

$$\frac{A'_1 M'_1}{A'_2 M'_1} = \left(\frac{A_1 M_1}{A_2 M_1} \right) \left(\frac{OA'_1}{OA_1} \right) / \left(\frac{OA'_2}{OA_2} \right)$$

$$\frac{A'_2 M'_2}{A'_3 M'_2} = \left(\frac{A_2 M_2}{A_3 M_2} \right) \left(\frac{OA'_2}{OA_2} \right) / \left(\frac{OA'_3}{OA_3} \right)$$

$$\frac{A'_n M'_n}{A'_1 M'_n} = \left(\frac{A_n M_n}{A_1 M_n} \right) \left(\frac{OA'_n}{OA_n} \right) / \left(\frac{OA'_1}{OA_1} \right)$$

از ضرب این تساویها به دست می‌آوریم:

$$\frac{A'_1 M'_1}{A'_2 M'_1} \cdot \frac{A'_2 M'_2}{A'_3 M'_2} \cdots \frac{A'_n M'_n}{A'_1 M'_n} = \frac{A_1 M_1}{A_2 M_1} \cdot \frac{A_2 M_2}{A_3 M_2} \cdots \frac{A_n M_n}{A_1 M_n}$$

یعنی همان چیزی که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این قضیه را می‌توان تعمیم و ویژگی (ج) از یک تصویر مرکزی انگاشت. (هرگاه چند ضلعی $A_1 A_2 \cdots A_n$ به صورت دو ضلعی تباهید ABA درآید، آن‌گاه این قضیه به ویژگی (ج) بدل می‌شود). اکنون نشان می‌دهیم که چگونه قضیه‌های منلائوس و سوا نتیجه می‌شوند.

الف. صفحه π ی مثلث ABC را بر یک صفحه π' چنان تصویر می‌کنیم که خط MN به خط خاص π بدل شود. اگر نقطه‌های M, N و P بر یک خط l واقع باشند، این خط به خط بینهایت بدل می‌شود و M, N, P به نقطه‌های M', N', P' بدل می‌شوند که نقطه‌هایی در بینهایت بر $A'B', B'C', C'A'$ هستند. بنابراین:

$$\frac{A'M'}{B'M'} = 1, \frac{B'N'}{C'N'} = 1, \frac{C'P'}{A'P'} = 1 \text{ و } \frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} = 1$$

اما به موجب آن چه که در بالا ثابت کردیم، مقدار حاصلضرب

$$(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP)$$

برابر یک است.

بعکس، گیریم $(AM/BM)(BN/CN)(CP/AP) = 1$ ، چون تصویر فوق M و N را به نقطه‌های بینهایت M' و N' بدل می‌کند، پس $B'N'/C'N' = 1$ و $A'M'/B'M' = 1$.
به موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم باید داشته باشیم:

$$(A'M'/B'M')(B'N'/C'N')(C'P'/A'P') = 1$$

و بنابراین $C'P'/A'P' = 1$. معنی این تساوی این است که P' نقطه بینهایت خط $A'C'$ است. اما در این صورت P باید بر خط خاص π قرار گیرد. یعنی همخط بودن M، N و P ثابت می‌شود.

تبصره. با استفاده از استدلالی مشابه، می‌توان قضیه کلی‌تر زیر را ثابت کرد:
اگر $M_1, M_2, \dots, M_n$ نقطه‌های تقاطع یک n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ با یک خط l باشند، آن‌گاه:

$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1} \cdot \frac{A_2M_2}{A_3M_2} \cdot \frac{A_3M_3}{A_4M_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_nM_n}{A_1M_n} = 1$$

ولی، به ازای $n > 3$ ، عکس این قضیه درست نیست، یعنی این تساوی همخطی نقطه‌های $M_1, M_2, \dots, M_n$ را ایجاب نمی‌کند.

ب. صفحه π مثلث ABC را بریک صفحه

π' تصویر می‌کنیم به طوری که MN خط خاص

π شود. اگر خطهای AN، BP، CM موازی

یا در یک نقطه O متقاطع باشند، آن‌گاه شکل

(پ) (در صورت) در صفحه π به شکل (ب)

بدل می‌شود، و $C'M' \parallel B'A'$ و $A'N' \parallel B'C'$.

بنابراین P' وسط $A'C'$ است (زیرا نقطه

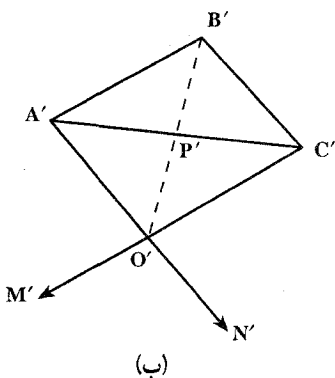
برخورد قطرهای متوازی الاضلاع $A'B'C'O'$

است). از این رو داریم $A'M'/B'M' = 1$ و $B'N'/C'N' = 1$ (زیرا M' و N'

نقطه‌های بینهایت هستند) و $C'P'/A'P' = -1$. از این‌جا نتیجه می‌شود که:

$$\frac{A'M'}{B'M'} \cdot \frac{B'N'}{C'N'} \cdot \frac{C'P'}{A'P'} = -1$$

پس به موجب قضیه‌ای که در بالا ثابت کردیم،



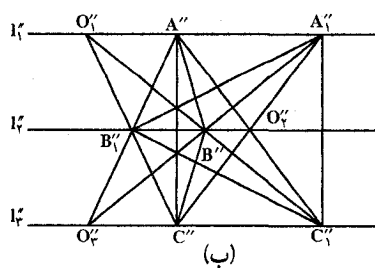
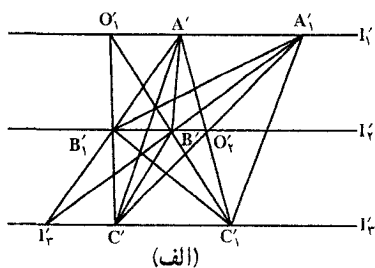
$$\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = -1$$

بعکس، فرض می‌کنیم که تساوی اخیر برقرار باشد. چون نقطه‌های M و N بر اثر تصویر ما به نقطه‌های بینهایت بدل می‌شوند، داریم $A'M'/B'M' = 1$ و $B'N'/C'N' = 1$. از آن‌جا نتیجه می‌شود $C'P'/A'P' = -1$ ، یعنی نقطه P' وسط $A'C'$ است. اما در این حال خط‌های $A'N' \parallel B'C'$ و $A'M' \parallel B'A'$ و $C'M' \parallel B'P'$ در یک نقطه O' متلاقی‌اند (شکل (ب)). بنابراین خط‌های AN ، CM و BP یا هم‌رسند یا موازی.

۳۶۷. معلوم است که قضیه برای یک مثلث متساوی‌الاضلاع درست است. از این‌جا نتیجه می‌شود که برای یک مثلث دلخواه نیز درست است.

۷.۳.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۳۶۸. از تصویر مرکزی استفاده می‌کنیم تا نگاشت صفحه π ی شکل در صورت را بر یک صفحه π' به دست آوریم، به طوری که خط خاص π خط واصل بین O و نقطه برخورد AC و A_1C_1 باشد. به وسیله این نگاشت، مثلث‌های ABC و $A_1B_1C_1$ به مثلث‌های $A'B'C'$ و $A'_1B'_1C'_1$ بدل می‌شوند با $A'A'_1 \parallel B'B'_1 \parallel C'C'_1$ و $A'C' \parallel A'_1C'_1$. خط‌های $A'B'_1$ و $B'C'_1$ در یک نقطه O'_1 هم‌رسند و خط‌های $A'C'_1$ و $B'B'_1$ و $C'A'_1$ در نقطه O'_2 (شکل (الف)). خط‌های موازی $A'A'_1$ ، $B'B'_1$ و $C'C'_1$ را به l'_1 ، l'_2 و l'_3 نشان می‌دهیم. چون $A'C'_1$ و $C'A'_1$ قطره‌های متوازی‌الاضلاع $A'C'A'_1C'_1$ هستند، و چون $B'B'_1$ از نقطه برخورد این قطرها می‌گذرد، نتیجه می‌گیریم که خط $B'B'_1$ (یعنی l'_1) از l'_2 و l'_3 هم‌فاصله است. باید نشان دهیم که $A'B'_1$ ، $B'A'_1$ و $C'C'_1$ هم‌رسند. نتیجه آن این است که AB_1 ، AC_1 و CC_1 هم‌رسند.



حال از یک تصویر موازی برای نگاشت صفحه π' بر یک صفحه π'' استفاده می کنیم تا $\Delta A'C'C_1$ را به یک مثلث قائم الزاویه $A''C''C_1$ بدل کنیم. در این صورت شکل (الف) به شکل (ب) بدل می شود که I_1'' محور تقارن شکل شده است. از این جا نتیجه می شود که خطهای $A''B_1$ و $B''A_1$ در نقطه O_1'' واقع بر خط $C''C_1$ ، که قرینه O_1'' نسبت به I_1'' است، متقاطع می شوند. در نتیجه، خطهای $A'B_1$ ، A_1B' و $C'C_1$ از شکل (الف) در یک نقطه O_1 متقاطع خواهند شد. O_1 آن نقطه از π' است که بر اثر تصویر موازی ما بر روی O_1'' نگاشته شده است.

۳۶۹. نقطه های C و B_1 و نقطه O_1 ، محل برخورد A_1B و AC_1 ، نقطه های برخورد قطرهای چهارضلعیهای $A_1OO_1C_1$ ، AO_1BA و AO_1C_1BA هستند.

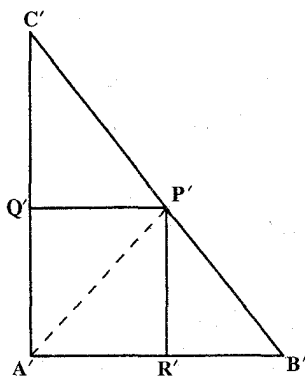
۳.۳.۸. رسم شکلها

۳۷۳. اگر مثلث ABC متساوی الاضلاع باشد، روشن است که نقطه مطلوب M ، باید از ضلعهای ΔABC به یک فاصله باشد؛ یعنی M مرکز دایره محیطی داخلی مثلث ABC ، یا به گونه دیگر، نقطه برخورد میانه های مثلث ABC باشد. از آن جا نتیجه می شود که در یک مثلث دلخواه ABC ، نقطه مطلوب M باید بر نقطه برخورد میانه های آن منطبق باشد.

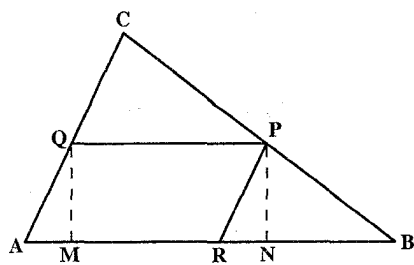
۳۷۴. مسأله ما با مسأله زیر هم ارز است:

متوازی الاضلاع $ARPQ$ به مساحت معین σ را در مثلث مفروض ABC محاط کنید، به طوری که هر دو شکل در یک رأس A مشترک باشند و رأسهای دیگر متوازی الاضلاع بر ضلعهای AC ، BC و AB از مثلث قرار داشته باشند. این مسأله بلافاصله از شکل (الف) نتیجه می شود که در آن متوازی الاضلاع $ARPQ$ و مستطیل $MNPQ$ دیده می شوند که مساحت های مساوی دارند (زیرا هر دو در قاعده PQ و ارتفاع QM مشترکند). به عبارت دیگر، اگر بتوانیم متوازی الاضلاع $ARPQ$ را رسم کنیم، آن گاه می توانیم مستطیل $MNPQ$ را نیز بسازیم.

اگر یک تصویر موازی، ΔABC از صفحه π را بر یک مثلث $A'B'C'$ از صفحه π' بنگاریم، آن گاه متوازی الاضلاع $ARPQ$ محاط در مثلث ABC بر یک متوازی الاضلاع $A'R'P'Q'$ محاط در یک مثلث $A'B'C'$ نگاشته می شود. [به همین دلیل است که



(ب)



(الف)

ما رسم مستطیل $MNPQ$ را با رسم متوازی الاضلاع $ARPQ$ معاوضه کردیم: یک تصویر موازی، در حالت کلی، یک مستطیل را بر یک مستطیل نمی‌نگارد، و این امر، استفاده از یک تصویر موازی را برای حل مسألهٔ اصلی دشوار می‌سازد. [فرض می‌کنیم که متوازی الاضلاع $ARPQ$ محاط شده باشد. مثلث ABC را بر اثر یک تصویر موازی مناسب بر یک مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین $A'B'C'$ می‌نگاریم (شکل (ب)). می‌توانیم فرض کنیم که مثلثهای ABC و $A'B'C'$ یک مساحت دارند (این کار را همواره می‌توان با استفاده از یک تشابه مناسب برای نگارهٔ ΔABC انجام داد)؛ پس متوازی الاضلاع $ARPQ$ و $A'R'P'Q'$ (که البته، چهارضلعی دومی یک مستطیل است) یک مساحت σ دارند. اگر S مساحت ΔABC باشد، آنگاه مساحت مثلثهای قائم الزاویهٔ متساوی الساقین $B'R'P'$ و $C'P'Q'$ برابر است با $S - \sigma$. چون:

$$S_{C'P'Q'} = \frac{1}{2} Q'P'^2 \text{ و } S_{B'R'P'} = \frac{1}{2} R'P'^2$$

$$R'P'^2 + Q'P'^2 = 2(S - \sigma)$$

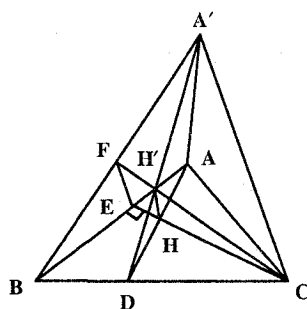
پس خواهیم داشت:

یا چون $RP'^2 + Q'P'^2$ برابر مجموع مربع قطر $A'P'$ از مستطیل $A'R'P'Q'$ است، خواهیم داشت $A'P' = \sqrt{2(S - \sigma)}$.

این تحلیل، ترسیم زیر را از مستطیل $MNPQ$ به ذهن متبادر می‌سازد: مثلث قائم الزاویهٔ متساوی الساقین $A'B'C'$ با مساحت S ، مساوی مساحت مثلث مفروض ABC را رسم می‌کنیم (ضلع $A'B'$ در این مثلث برابر واسطهٔ هندسی قاعده و ارتفاع ΔABC است). سپس، بر وتر $B'C'$ نقطهٔ P' را چنان انتخاب می‌کنیم که $A'P' = \sqrt{2(S - \sigma)}$. بالاخره ضلع BC از مثلث مفروض ABC را به نسبت $BP/PC = B'P'/P'C'$ تقسیم

می کنیم (ویژگی (ج) از تصویر موازی). مستطیل $MNPQ$ (با رأس Q بر ضلع AC و رأسهای M و N بر ضلع AB) مستطیل مطلوب است.
مسأله ممکن است یک یا دو جواب داشته باشد، یا اصلاً جوابی نداشته باشد.

۹. ۳. ۳. سایر مسأله های مربوط به این قسمت



۳۷۵. ارتفاعهای AD و CE از مثلث ABC را رسم

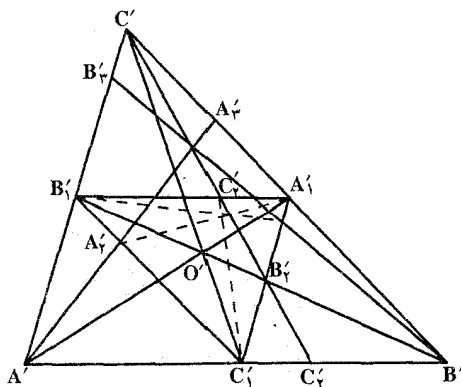
می کنیم تا در نقطه H متقاطع شود. چون AA' بر صفحه ABC عمود است، طبق قضیه سه عمود، $A'D$ ارتفاع مثلث $A'BC$ می باشد. پس اگر ارتفاع CF عمود بر $A'B$ را رسم کنیم، $A'D$ را در نقطه H' محل تلاقی ارتفاعهای مثلث $A'BC$ قطع می کند. می خواهیم ثابت کنیم که $H'H$ بر

صفحه $A'BC$ عمود می باشد. چون BC بر DA و بر DA' و بنابراین بر صفحه DAA' عمود است، پس صفحه BCA' بر صفحه DAA' عمود می باشد. از طرف دیگر CE بر AB و بر AA' عمود است؛ پس بر صفحه BAA' عمود می باشد به طوری که BA' بر CE و CF و بنابراین بر صفحه CEF عمود است یعنی صفحه CEF بر صفحه $A'BC$ عمود می باشد. از این جا معلوم می شود که خط HH' فصل مشترک صفحه های DAA' و CEF که هر دوی آنها بر صفحه $A'BC$ عمودند، بر این صفحه عمود است.

۱۰. ۳. ۳. مسأله های ترکیبی

۳۷۶. از یک تصویر مرکزی برای نگاشت چهارضلعی $ABCO$ بر یک چهارضلعی $A'B'C'O'$

استفاده می کنیم به طوری که O' نقطه برخورد میانه های مثلث $A'B'C'$ باشد. امکان انجام این عمل از قضیه ۱ ناشی می شود. بر اثر این تصویر، ضلعهای $\Delta A'B'C'$ با ضلعهای $\Delta A'B'C'$ (شکل) موازی می شوند. اگر نقطه های تقاطع خطهای $A'A'$ ، $B'B'$ و $C'C'$ را با ضلعهای مقابل $\Delta A'B'C'$ به A'' ، B'' و C'' نشان دهیم، نتیجه می گیریم که:



$$\frac{A'C''}{B'C''} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ و } \frac{B'A''}{C'A''} = \frac{C'A'}{B'A'} \text{ و } \frac{C'B''}{A'B''} = \frac{A'B'}{C'B'}$$

حال فرض می‌کنیم:

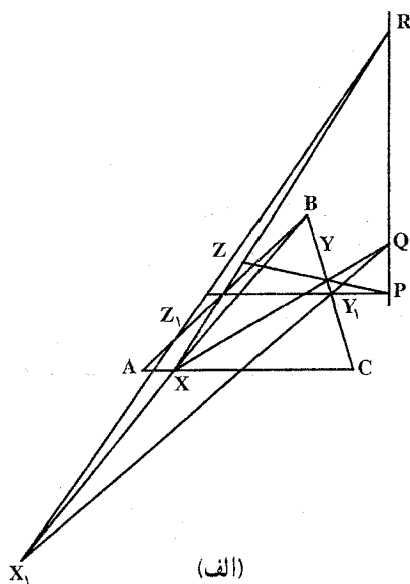
$$\frac{A'C''}{B'C''} \cdot \frac{B'A''}{C'A''} \cdot \frac{C'B''}{A'B''} = \pm 1$$

(به موجب قضیهٔ سوا و منلائوس)، معنی این فرض این است که خط‌های $A'A''$ ، $B'B''$ و $C'C''$ هم‌مسند، یا این که نقطه‌های A'' ، B'' و C'' هم‌خطند. پس از این‌جا نتیجه می‌شود که:

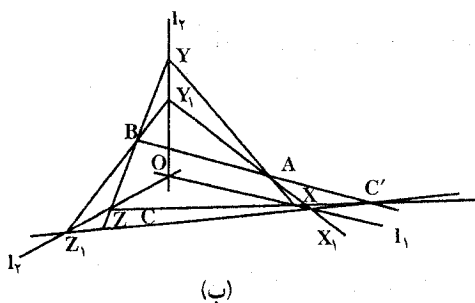
$$\frac{A'C''}{B'C''} \cdot \frac{B'A''}{C'A''} \cdot \frac{C'B''}{A'B''} = \pm 1$$

ولی طبق همان قضیه‌ها معنی این تساویها این است که خط‌های $A'A''$ ، $B'B''$ و $C'C''$ هم‌مسند، یا این که نقطه‌های A'' ، B'' و C'' هم‌خطند، بر حسب این که مقدار حاصلضرب بالا -1 یا $+1$ باشد.

۳۷۷. الف. از P خطی رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخوردش را با ضلعهای AB و BC از $\triangle ABC$ به Z_1 و Y_1 نشان می‌دهیم، و نقطهٔ برخورد خط‌های QY_1 و RZ_1 را به X_1 (شکل الف)). اکنون فرض می‌کنیم که مسأله حل شده باشد، یعنی مثلث مطلوب XYZ رسم شده باشد، یادآوری می‌کنیم که در این حالت $\triangle X_1Y_1Z_1$ و $\triangle XYZ$ مثلثهای منظری هستند (P، Q و R نقطه‌های برخورد ضلعهای دو مثلث، هم‌خطند). از این‌جا نتیجه می‌شود که خط‌های XX_1 ، YY_1 و ZZ_1 در یک نقطه هم‌رسند و نقطهٔ هم‌رسی آنهاست. از وصل B به X_1 و پیدا کردن نقطهٔ برخورد BX_1 و AC، رأس X از مثلث



مطلوب را به دست می آوریم. اکنون پیدا کردن بقیه رأسها دیگر اشکالی ندارد.

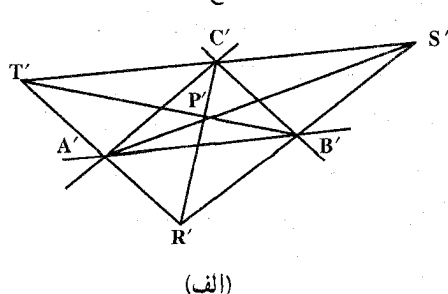


ب. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یک n ضلعی چنان تغییر کند که ضلعهایش از n نقطه ثابت واقع بر یک خط l بگذرند و $(n-1)$ رأس آن بر $(n-1)$ خط مفروض حرکت کنند، آن‌گاه مکان رأس n ام آن یک خط است. برای اثبات این مطلب، شکل خود را بر یک

صفحه جدید π' تصویر می‌کنیم. به طوری که l خط خاص π باشد.

ج. از A خطی مرور می‌دهیم که خطهای l_1 و l_2 را برتیب در نقطه‌های X_1 و Y_1 ببرد. Z_1 ، نقطه برخورد خطهای Y_1B و l_3 ، را به X_1 وصل می‌کنیم. حال فرض می‌کنیم که مسأله حل شده، یعنی $\triangle XYZ$ رسم شده باشد (شکل (ب)). چون خطهای XX_1 ، YY_1 و ZZ_1 در O هم‌رسند، مثلثهای XYZ و $X_1Y_1Z_1$ مثلثهای منطری می‌شوند، و نقطه‌های برخورد خطهای X_1Y_1 و XY (یعنی، نقطه A)، Y_1Z_1 و YZ (یعنی نقطه B)، و Z_1X_1 و ZX هم‌خطند. حال می‌توانیم به آسانی، C' ، نقطه برخورد ZX و Z_1X_1 ، را پیدا کنیم؛ زیرا بر نقطه برخورد Z_1X_1 و AB منطبق است. ضلع

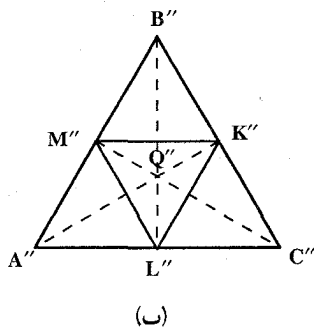
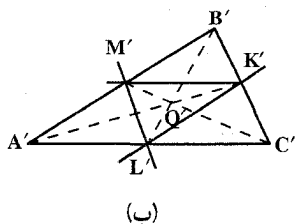
ZX از مثلث مطلوب بر خط واصل بین نقطه‌های C و C' واقع است.



۳۷۸. الف. با استفاده از یک تصویر مرکزی، صفحه π ی (شکل الف)، در صورت) را بر صفحه π' می‌نگاریم به طوری که خط خاص π باشد. در این صورت خطهای AM و BC به خطهای موازی $A'M'$ و $B'C'$ ، خطهای BN و

AC به خطهای موازی $A'C'$ و $B'N'$ ؛ و خطهای CL و AB به خطهای موازی $A'B'$ و $C'L'$ بدل می‌شوند. خطهای AS، BT و CR به میانه‌های $A'S'$ ، $B'T'$ و $C'R'$ از مثلث $A'B'C'$ بدل می‌شوند (شکل الف)؛ پس باید یکدیگر را در یک نقطه P' ببرند. از این جا نتیجه می‌شود که AS، BT و CR در یک نقطه P یکدیگر را می‌برند.

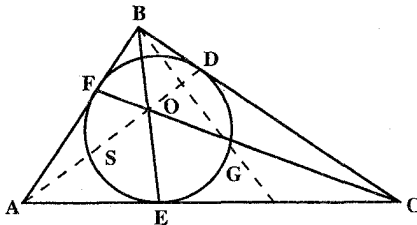
ب. با استفاده از یک تصویر مرکزی صفحه π ی شکل (ب) در صورت مسأله را بر صفحه π' می‌نگاریم، به طوری که خط خاص صفحه π شود. در π' داریم: $K'M' \parallel A'C'$ و $K'L' \parallel A'B'$ (شکل ب). حال از یک تصویر موازی استفاده می‌کنیم و $\Delta A'B'C'$ را بر یک مثلث متساوی الاضلاع $A''B''C''$ می‌نگاریم (شکل پ). در



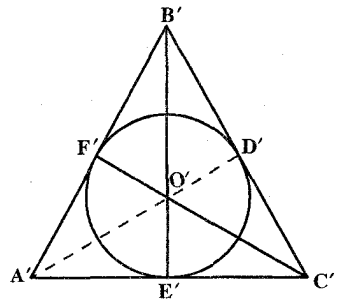
این صورت خطهای $A''K''$ و $B''L''$ بر $C''D$ ، محور تقارن $\Delta A''B''C''$ ، یکدیگر را می‌برند و خطهای $A''K''$ و $C''M''$ بر $B''E$ ، محور تقارن مثلث ما متقاطع می‌شوند. از این جا نتیجه می‌شود که Q'' ، نقطه تقاطع خطهای $A''K''$ ، $C''M''$ و $B''L''$ ، نقطه برخورد دو محور تقارن، یعنی مرکز ثقل مثلث است؛ خطهای $L''K''$ ، $K''M''$ و $M''L''$ میانخطهای مثلثند. بنابراین $L''M'' \parallel B''C''$.

ویژگی (ب) ی یک تصویر موازی ایجاب می کند که داشته باشیم $L'M' \parallel B'C'$. بعلاوه ویژگی (ب) ایجاب می کند که T، نقطه برخورد LM و BC، نیز بر خط خاص صفحه π واقع باشد، یعنی S، R، و T همخط باشند.

۳۷۹. الف. راه حل اول. گیریم E و F نقطه های تماس دایرة محاطی داخلی S با ضلعهای $\triangle ABC$ باشند (شکل (الف)). O، نقطه برخورد BE و CF، درون دایرة S قرار دارد. (خط BG، که G دومین نقطه برخورد CF با دایرة S است، پاره خط EC از خط AC را می برد. پس BE وتر FG از S را می برد.)

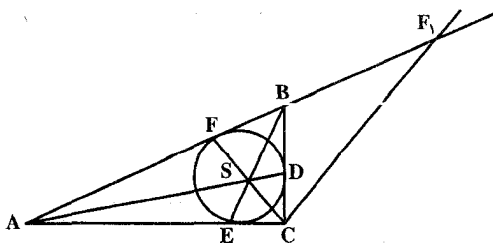


(الف)



(ب)

حال صفحه شکل را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم، به طوری که S به یک دایرة S' و O به نقطه O' ، مرکز دایرة S' ، بدل شود. بر اثر این تصویر شکل (الف) به شکل (ب) بدل شده است. به آسانی دیده می شود که خطهای $B'E'$ و $C'F'$ هم نیمسازها و هم ارتفاعهای $\triangle A'B'C'$ هستند. از این جا نتیجه می شود که $A'B' = B'C'$ و $C'A' = B'C'$. پس مثلث $A'B'C'$ مثلی متساوی الاضلاع است، پس خط $A'D'$ از O' می گذرد. همرسی $A'D'$ ، $B'E'$ و $C'F'$ همرسی AD، BE و CF را ایجاب می کند.

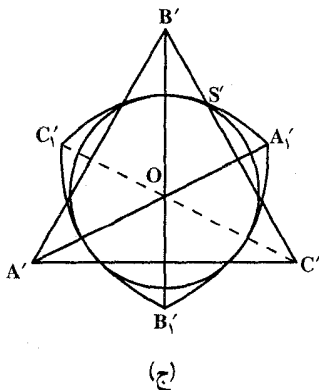


(پ)

راه حل دوم. (نمادها همان نمادهای راه حل قبلی هستند.) بر امتداد AB نقطه F_1 را چنان تعیین می کنیم که:

$$F_1A/F_1B = -FA/FB$$

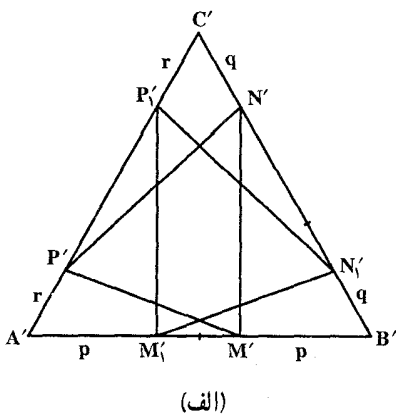
(شکل (پ)).



(ج)

یک دایرة S' بدل شود و O به O' ، مرکز S' . پس شکل (ث) به شکل (ج) بدل می شود. چون $A'A'$ و $B'B'$ از نقطه O' می گذرند، در نتیجه $A'A' \perp B'C'$ و $B'B' \perp A'C'$. بنابراین $A'A'$ و $B'B'$ دو ارتفاع $\Delta A'B'C'$ خواهند بود، و O' نقطه برخورد آنها. از این جا نتیجه می شود که $C'C'$ سومین ارتفاع $\Delta A'B'C'$ خواهد شد. روشن است که عمودهای رسم شده از O' ، مرکز S' ، بر ضلع $A'B'$ از $\Delta A'B'C'$

باید از C' بگذرد. پس خطهای $A'A'$ ، $B'B'$ و $C'C'$ در O' هم رس هستند. از این جا نتیجه می شود که AA_1 ، BB_1 و CC_1 نیز در O یکدیگر را می برند.



(الف)

۳۸. الف. به موجب ویژگیهای (ج) و (د) از

تصویر موازی، کافی است قضیه را برای یک مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ ثابت کنیم (شکل (الف)). فرض می کنیم p معرف اندازه پاره خطهای $A'M'$ و $B'M'$ ، r معرف اندازه پاره خطهای $A'P'$ و $C'P'$ ، q اندازه پاره خطهای $B'N'$ و $C'N'$ ، و a اندازه یک ضلع مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ باشد.

مساحت ΔXYZ را با S_{XYZ} نشان می دهیم. پس:

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'} - S_{M'N'P'} &= S_{A'P'M'} + S_{B'M'N'} + S_{C'N'P'} \\ &= \frac{1}{2} \sin 60^\circ [r(a-p) + p(a-q) + q(a-r)] \\ &= \frac{1}{2} \sin 60^\circ [a(p+q+r) - (pq+qr+rp)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{A'B'C'} - S_{M'N'P'} &= S_{A'P'M'} + S_{B'M'N'} + S_{C'N'P'} \\ &= \frac{1}{2} \sin 60^\circ [(a-r)p + (a-p)q + (a-q)r] \end{aligned}$$

و

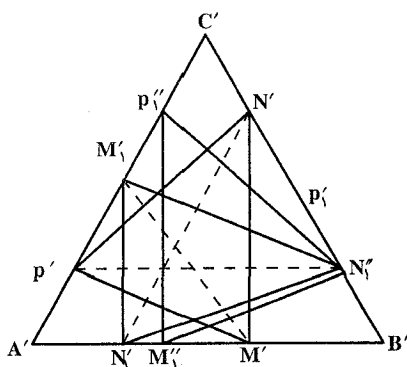
$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 60^\circ [a(p+q+r) - (pq+qr+rp)]$$

بنابراین :

$$S_{M'N'P'} = S_{M_1N_1P'_1}$$

ب. عیناً نظیر قسمت (الف)، کافی است حکم را برای مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$ (شکل (ب)) اثبات کنیم. چون $N'N_1 \parallel C'A'$ ، $M'M_1 \parallel B'C'$ و $P'P_1 \parallel A'B'$ از این جا نتیجه می شود :

$$A'M' = A'M_1 \text{ و } B'N' = B'N_1 \text{ و } C'P' = C'P_1$$



(ب)

مثلث $A'B'C'$ را در خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت، حول خودش به اندازه زاویه 120° دوران می دهیم. این دوران $\Delta A'B'C'$ را به خودش بدل می کند و به موجب تساویهای بالا این دوران $\Delta M_1N_1P'_1$ را به $\Delta M'N'P'$ بدل می کند که رأسهای آن قرینه های رأسهای $\Delta M'N'P'$ نسبت به وسطهای ضلعها هستند. این واقعیت و نتیجه ای که در قسمت (الف) در بالا استخراج کردیم ایجاب می کنند که داشته باشیم :

$$S_{M_1N_1P'_1} = S_{M'N'P'}$$

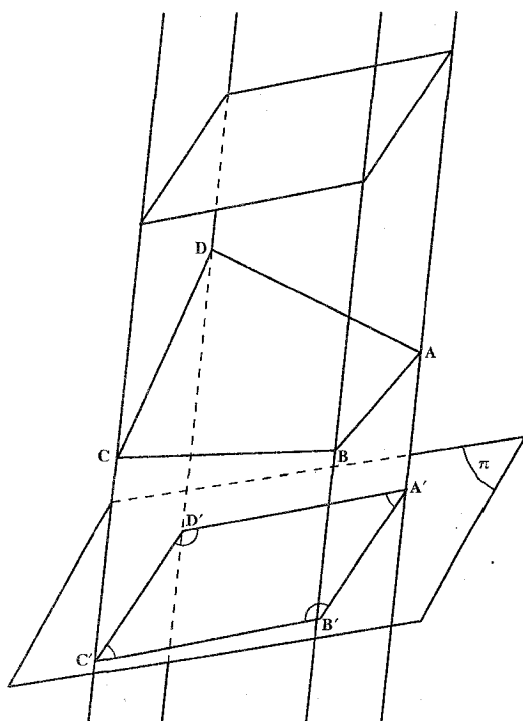
پس :

$$S_{M_1N_1P'_1} = S_{M'N'P'}$$

تساوی مساحت های مثلثهای $M_1N_1P'_1$ و $M'N'P'$ را از راه محاسبه مستقیم، مانند راه حل قسمت (الف)، می توانیم به آسانی ثابت کنیم.

۴.۳. تصویرهای آفین و تصویری در چندضلعی

۱.۴.۳. مرکز تصویر، محور تصویر، قطب خط، ...



۳۸۱. بر AB و CD دو صفحه متوازی P و P' و بر BC و AD دو صفحه متوازی Q و Q' را مرور می‌دهیم. این صفحه‌ها، یک سطح منشوری به وجود می‌آورند. مقطع قائم این سطح منشوری مستطیل $A'B'C'D'$ است؛ بنابراین صفحه π را باید عمود بر این صفحه‌ها، اختیار کنیم. بدیهی است که صفحه‌های P, P', Q, Q' ثابتند.

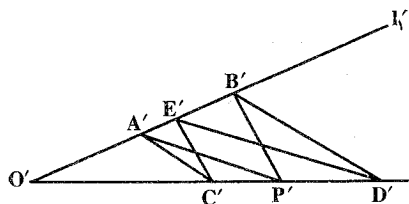
نسبت به خطهای EC و EB ، و همچنین نسبت به دایره (O) می‌باشد، و چون

قطبهای نقطه‌های S, E و F در نقطه M هم‌رسند، قطبهایشان بر یک استقامت می‌باشند.

۲.۴.۳. نقطه‌های: همخط، هم‌دایره، ...

۱. ۲.۴.۳. نقطه‌ها همخطند

۳۸۲. فرض می‌کنیم M, N و P نقطه‌های برخورد خطهای AF و ED ؛ EC و BF و AC و BD ، بترتیب باشند؛ و O نقطه تقاطع AB و CD باشد. صفحه π ی شکل صورت مسأله را بر یک صفحه π' چنان تصویر می‌کنیم که MN خط خاص π باشد. بر اثر این



نگاشت، شکل صورت مسأله به شکل
در حل بدل می‌شود، که در آن
 $A'F' \parallel D'E'$ و $B'F' \parallel C'E'$ توازی
خطهای $A'F'$ و $D'E'$ ایجاب
می‌کند که داشته باشیم

$O'A'/O'E' = O'F'/O'D'$ و توازی خطهای $C'E'$ و $B'F'$ ایجاب می‌کند که
 $O'E'/O'B' = O'C'/O'F'$. از ضرب این دو تساوی به دست می‌آوریم
 $O'A'/O'B' = O'C'/O'D'$. از این تساوی نتیجه می‌شود که خطهای $A'C'$ و
 $B'D'$ موازی‌اند، یعنی P بر خط خاص MN از صفحه π واقع است. [بررسی حالت
(ساده‌تر) $l_1 \parallel l_2$ به عهده خواننده گذاشته می‌شود (قراردادها همان قرارداد شکل در
حل است).]

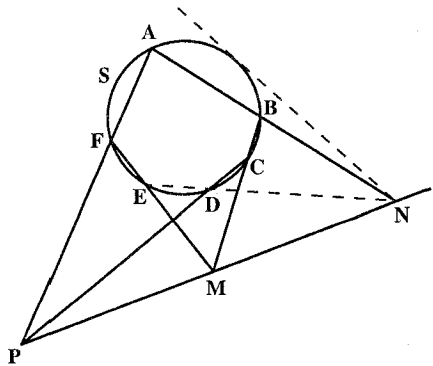
۳۸۳. فرض می‌کنیم M، N و P نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل شش ضلعی محاطی
ABCDEF باشند (شکل (الف)). چون نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از N بر S
بر کمانهای AB و DE قرار دارند، از این جا نتیجه می‌شود که NM دایره S را نمی‌برد.
بنابراین می‌توانیم صفحه شکل (الف) را بر یک صفحه π' تصویر کنیم، به گونه‌ای که S
به یک دایره S' بدل شود، و MN به خط بینهایت π' . پس شکل (الف) به شکل (ب)
بدل می‌شود که:

$$A'B' \parallel E'D' , B'C' \parallel E'F'$$

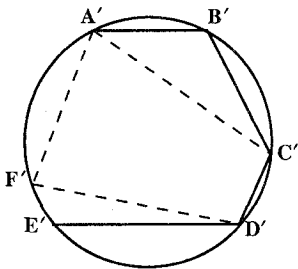
در نتیجه $\widehat{A'B'C'} = \widehat{D'E'F'}$ ، یعنی $\widehat{A'B'C'} = \widehat{D'E'F'}$. از این جا نتیجه می‌شود
که:

$$\begin{aligned} F'\hat{A}'C' + D'\hat{C}'A' &= \frac{1}{2}(\widehat{C'D'} + \widehat{D'E'F'}) + \frac{1}{2}(\widehat{F'A'} + \widehat{D'E'F'}) \\ &= \frac{1}{2}(\widehat{C'D'} + \widehat{D'E'F'} + \widehat{F'A'} + \widehat{A'B'C'}) = 180^\circ \end{aligned}$$

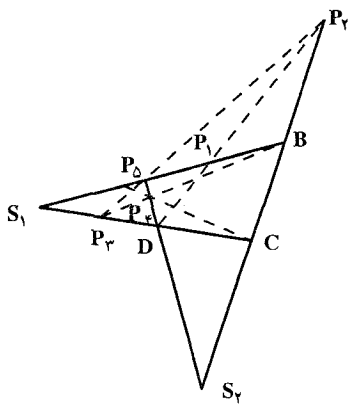
بنابراین $A'F' \parallel C'D'$ ، یعنی، خطهای $A'F'$ و $C'D'$ در یک نقطه در بینهایت یکدیگر
را می‌برند. پس P' ، M' و N' ، نقطه‌های برخورد ضلعهای مقابل شش ضلعی
 $A'B'C'D'E'F'$ هم‌خطند، بر یک خط بینهایت صفحه π' قرار دارند. در نتیجه،
نقطه‌های P ، M و N در شکل (الف) نیز هم‌خطند.



(الف)



(ب)



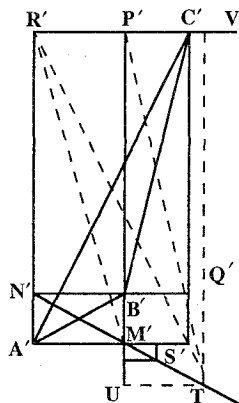
۳۸۴. نقطه‌های برخورد ضلع‌های مقابل چهارضلعی ABCD را با S_1 و S_2 نشان می‌دهیم (شکل). تصویر AB از مرکز D بر خط BC، نقطه‌های S_1 و A و B را به S_2 و B بدل می‌کند، و تصویر BC از مرکز A بر خط DC، نقطه‌های C، S_2 و B را به C، S_1 و D تبدیل می‌کند. تصویر DC از مرکز B بر DA نقطه‌های C، D و S_1 را به نقطه‌های S_2 ، D و A بدل می‌کند، و تصویر DA از مرکز C بر AB، نقطه‌های S_2 ، D و A

را به B ، S_1 و A . حاصلضرب این چهار تصویر، تبدیلی است تصویری از خط AB که S_1 ، A و B را به B ، S_1 و A بدل می‌کند. مربع این تبدیل S_1 ، A و B را به B ، A و S_1 بدل می‌کند، و مکعب آن، S_1 ، A و B را به S_1 ، A و B ؛ پس بایستی این تبدیل، تبدیل همانی باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود که پس از سه بار دور زدن ضلع‌های چهارضلعی، همواره به نقطهٔ آغاز می‌رسیم؛ به‌ویژه، نقطه‌های P_1 و P_{13} بر ضلع AB منطبقند.

۳.۴.۳. خط‌های: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۴.۳ خطها هم رسند

۳۸۵. گیریم π صفحه شکل در متن باشد. گوئیم که π می تواند بر اثر یک تصویر موازی بر



صفحه π' نگاشته شود، به طوری که زاویه های $\hat{AMN}$ و $\hat{ARS}$ در شکل (صورت) به زاویه های مساوی $A'M'N'$ و $A'R'S'$ بدل شوند و $R'A'M'$ قائمه باشد. در واقع، برای این که نگاره های مثلثهای $A'M'N'$ و $A'R'S'$ (مشترک در زاویه A') متشابه باشند (یعنی برای این که $\hat{A'M'N'} = \hat{A'R'S'}$)، کافی است که ضلعهای آنها متناسب باشند:

$$\frac{A'M'}{A'N'} = \frac{A'R'}{A'S'} \quad (1)$$

چون نسبتهای

$$\frac{A'N'}{A'R'} = \frac{AN}{AR} = \beta, \quad \frac{A'S'}{A'M'} = \frac{AS}{AM} = \alpha$$

معلومند، شرط کافی (۱) با

$$\frac{A'M'}{\beta A'R'} = \frac{A'R'}{\alpha A'M'} \quad \text{یا} \quad \frac{A'M'}{A'R'} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$$

هم ارز است. می توانیم مثلث ΔAMR را بر یک مثلث $A'M'R'$ تصویر کنیم، چنان که $\frac{A'M'}{A'R'} = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ ، و $R'A'M'$ یک زاویه قائمه باشد؛ و در نتیجه حکم ما ثابت می شود. این مطلب ما را به شکل (در حل) می کشاند که باید ثابت کنیم T، نقطه برخورد $M'N'$ و $R'S'$ ، بر $P'Q'$ قرار دارد. این کار را بعداً انجام خواهیم داد.

از تشابه مثلثهای $M'S'T$ و $R'N'T$ (که زاویه های مساوی دارند) به تساوی:

$$\frac{M'T}{R'T} = \frac{M'S'}{R'N'}$$

می رسم و از تشابه مثلثهای TUM' و TVR' ، که U و V پاهای عمودهای رسم شده از T بر $P'R'$ و $P'M'$ هستند، (در این مثلثهای قائم الزاویه $\hat{TM'U} = 90^\circ - \hat{TM'S'} = 90^\circ - \hat{TR'N'} = \hat{TR'V}$) خواهیم داشت

$$\frac{TU}{TV} = \frac{M'T}{R'T} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\frac{TU}{TV} = \frac{M'T}{R'T} = \frac{M'B'}{R'N'} = \frac{Q'B'}{Q'C'}$$

که تساوی $\frac{TU}{TV} = \frac{Q'B'}{Q'C'}$ ثابت می کند T بر خط $P'Q'$ قرار دارد.

۳۸۶. حکم مسأله فقط شکل دیگر قضیه دزارگ است.

۴.۴.۳. زاویه

۱. ۴.۴.۳. اندازه زاویه

۳۸۷. می دانیم که $C'H = CH \cdot \cos \alpha$ است که α زاویه بین دو صفحه ABD و BCD

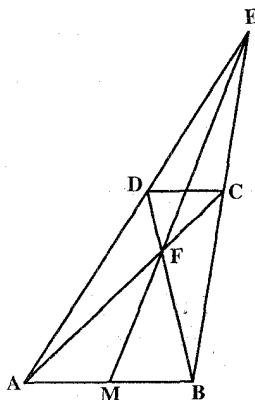
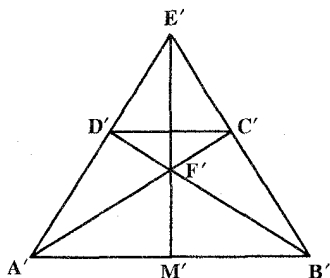
است. بنابراین $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و از آن جا $\alpha = \frac{\pi}{3}$ است.

۵.۴.۳. پاره خط

۱. ۵. ۴.۳. رابطه بین پاره خطها

۳۸۸. فرض می کنیم $ABCD$ یک دوزنقه باشد، E نقطه برخورد (امتدادهای) ساقهای آن، و F نقطه برخورد قطرهای آن. بر اثر یک تصویر موازی مناسب صفحه π ی دوزنقه بر یک صفحه π' ، نگاره مثلث ABE مثلث متساوی الساقین $A'B'E'$ می شود. در عین حال به موجب ویژگی (ب) ی تصویر موازی، دوزنقه $ABCD$ به دوزنقه $A'B'C'D'$ بدل می شود (شکل). روشن است که $E'F'$ نگاره خط EF محور تقارن مثلث متساوی الساقین $A'B'E'$ است، پس قاعده های $A'B'$ و $C'D'$ از دوزنقه $A'B'C'D'$ را نصف می کند. به موجب ویژگی (ج) مربوط به تصویر موازی، این مطلب ایجاب می کند که خط EF قاعده های AB و CD از دوزنقه اصلی $ABCD$ را نصف کند.

یادآور می شویم که بدین طریق می توانیم عکس قضیه بالا را هم ثابت کنیم: هرگاه یک نقطه F از میانه EM از مثلث ABE را به رأسهای A و B وصل کنیم تا ضلعهای مثلث را در نقطه های D و C ببرند، خط CD موازی AB است (شکل (ب) نشان می دهد که وقتی مثلث ABE متساوی الساقین باشد، CD موازی AB می شود).



۶.۴.۳. رابطه‌های مترى

۳۸۹. باید نشان دهیم (شکل) که :

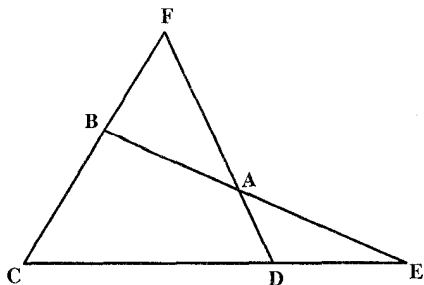
$$\frac{AE}{BE} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{DE} \cdot \frac{DF}{AF} = 1$$

ملاحظه می‌کنیم که عبارت بالا را می‌توان به عنوان حالت خاص عبارت :

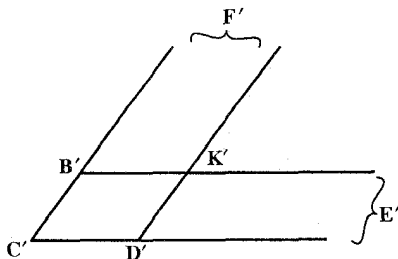
$$\frac{A_1M_1}{A_2M_1} \cdot \frac{A_2M_2}{A_3M_2} \cdot \frac{A_3M_3}{A_4M_3} \cdot \dots \cdot \frac{A_nM_n}{A_1M_n}$$

گرفت که چهارضلعی ABCD، نقش n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ را بازی می‌کند و نقطه‌های E، F، F (به همان ترتیب) نقش نقطه‌های $M_1, M_2, \dots, M_n$ را در شکل مربوط به سؤال (۳۶۵). از این جا نتیجه می‌شود که عبارت :

$$(AE/BE)(BF/CF)(CE/DE)(DF/AF)$$



(الف)



(ب)

بر اثر تصویر مرکزی پایا می ماند. ملاحظه می کنیم که تصویری از صفحه π ی شکل (الف) که EF خط خاص آن باشد، شکل (الف) را به شکل (ب) بدل می کند. چون E' و F' نقطه هایی در بینهایتند، پس:

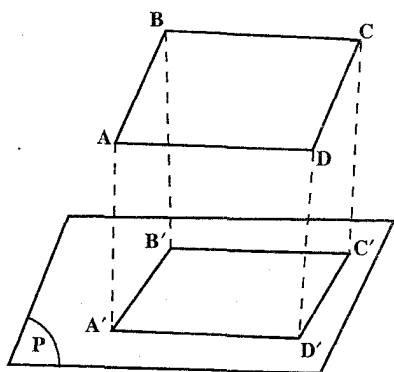
$$\frac{A'E'}{B'E'} = \frac{B'F'}{C'F'} = \frac{C'E'}{D'E'} = \frac{D'F'}{A'F'} = 1$$

بنابراین:

$$\frac{A'E'}{B'E'} \cdot \frac{B'F'}{C'F'} \cdot \frac{C'E'}{D'E'} \cdot \frac{D'F'}{A'F'} = 1 \left(= \frac{AE}{BE} \cdot \frac{BF}{CF} \cdot \frac{CE}{DE} \cdot \frac{DF}{AF} \right)$$

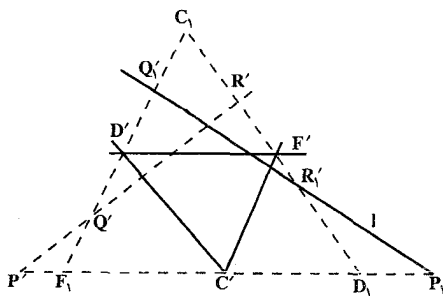
این تساوی قضیه ما را ثابت می کند.

۷.۴.۳. ثابت کنید شکلهای تبدیل یافته یکدیگرند



۳۹۰. تصویر متوازی الاضلاع ABCD روی صفحه P را متوازی الاضلاع A'B'C'D' می نامیم. صفحه های ABB'A' و BCC'B' باهم و صفحه های CDD'C' و ADD'A' باهم موازی اند. پس فصل مشترکهای آنها با صفحه P باهم موازی اند. یعنی A'B' || C'D' و B'C' || A'D' است. بنابراین چهارضلعی A'B'C'D' متوازی الاضلاع است.

۸.۴.۳. رسم شکلهای



۳۹۱. صفحه π ی شکل داده شده در صورت را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم، به طوری که خط ABE خط خاص صفحه π شود. پس شکل داده شده در صورت به شکل روبه رو بدل شده است. قطرهای CA، DB

و FE ی چهارضلعی کامل به خطهای $F'D' \parallel A'C'$ و $D'B' \parallel F'C'$ و $F'E' \parallel D'C'$ بدل می‌شوند. نقطه‌های برخورد این خطها را با C_1 ، D_1 و F_1 نشان می‌دهیم (شکل). روشن است که نقطه‌های C' ، D' و F' وسطهای ضلعهای مثلث $C_1D_1E_1$ هستند. حال نگاره‌های P ، Q و R ، وسطهای قطرهای چهارضلعی کامل، را تعیین می‌کنیم. نقطه P ، وسط CA ، نقطه‌ای است که $AP/CP = -1$. اگر نقطهٔ بینهایت خط CA را به P_1 نشان دهیم، آن‌گاه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{AP/CP}{AP_1/CP_1} = -1$$

به موجب ویژگی (ج) از تصویر مرکزی داریم:

$$\frac{A'P'/C'P'}{A'P'_1/C'P'_1} = -1$$

که P'_1 نگارهٔ نقطهٔ بینهایت P_1 است، یعنی نقطهٔ برخورد $C'A'$ با خط خاص l از صفحهٔ π . تساوی خود را بار دیگر به صورت:

$$\frac{C'P'_1/C'P'}{A'P'_1/A'P'} = -1$$

می‌نویسیم، یا، چون $A'P'_1/A'P' = -1$ ، (A' نقطه‌ای است در بینهایت)،

$$\frac{C'P'_1}{C'P'} = -1$$

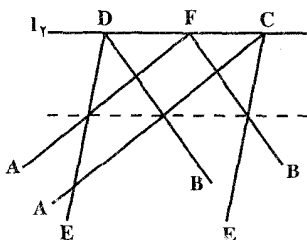
از این رابطه نتیجه می‌شود که C' وسط پاره خط $P'P'_1$ است، یعنی، P' قرینهٔ P'_1 (نقطهٔ برخورد خط D_1F_1 با l) است نسبت به C' ، وسط ضلع D_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$. به گونه‌ای مشابه می‌توانیم ثابت کنیم که نقطه‌های Q و R ، وسطهای قطرهای DB و FE از چهارضلعی کامل، بر نقطه‌های Q' و R' قرینه‌های نقطه‌های Q'_1 و R'_1 ، نقطه‌های برخورد خط خاص l با ضلعهای C_1F_1 و C_1D_1 از مثلث $C_1D_1F_1$ ، نسبت به D' و F' ، وسطهای این ضلعها، هستند. از این جا قضیهٔ مربوط به چهارضلعی کامل (که می‌گویند نقطه‌های P ، Q و R هم‌خطند) به شکل زیر درمی‌آید:

فرض می‌کنیم P'_1 ، Q'_1 و R'_1 نقطه‌های برخورد یک خط l ، بترتیب با ضلعهای F_1D_1 ، C_1D_1 و C_1F_1 از مثلث $C_1D_1F_1$ باشند. در این صورت نقطه‌های P' ، Q' و R' قرینه‌های P'_1 ، Q'_1 و R'_1 بترتیب نسبت به وسطهای ضلعهای F_1D_1 ، C_1D_1 و C_1F_1 ، هم‌خطند.

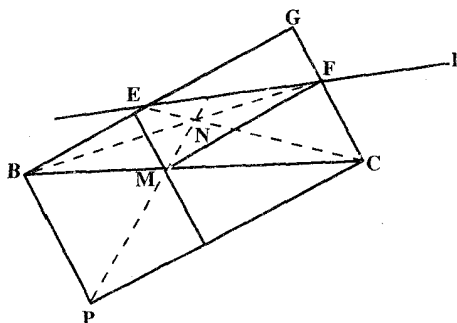
۳۹۲. قسمتهای (i) و (ii) با بعضی از حالتهاى خاص قضیه دزارگ هم ارزند. تشخیص چگونگی عملیات مورد نیاز و بیان صورت جدید را به عهده خواننده می گذاریم.

۱.۳۹۳. گیریم D, F, C سه نقطه بر خط l باشند. از این نقطه ها خطهای $DB \parallel FB$ ، $DE \parallel CE$ و $FA \parallel CA$ را رسم می کنیم (شکل الف). در این جا A, B, E نقطه هایی در بینهایت هستند. نقطه های برخورد DE و FA ؛ DB و CA ؛ CE و FB همخطند (چرا؟).

۲. هرگاه خط l ضلعهای BG و CG از مثلث BCG را در E و F ببرد (شکل ب)، آن گاه N ، نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی $BCEF$ ، و رأسهای M و P از موازی الاضلاعهای $BGCP$ و $EGFM$ همخطند (چرا؟).

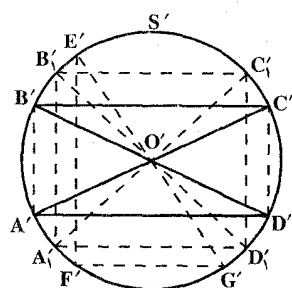


(الف)



(ب)

۹.۴.۳. سایر مسأله های مربوط به این قسمت



۳۹۴. صفحه نمودار مسأله را بر یک صفحه جدید π'

تصویر می کنیم، به طوری که دایرة S به یک دایرة S' مبدل شود و نقطه O به نقطه O' مرکز دایرة S' بر اثر این تبدیل تصویر چهار ضلعی $ABCD$ به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می شود (زیرا قطرهای $A'B'D'$ در مرکز دایرة محیطی S' متقاطعند).

بنابراین نقطه های P و Q به P' و Q' ، نقطه های

بینهایت امتدادهای ضلعهای مستطیل بدل می شوند (شکل).

اگر ضلعهای $A'B'$ و $D'C'$ از مستطیل $A'B'C'D'$ محاط در دایرة S' از نقطه P'

بگذرند و ضلع B_1C_1 از Q' بگذرد (یعنی $A'B' \parallel D'C' \parallel B_1C_1$ و $A_1B_1 \parallel D_1C_1 \parallel B'C'$)،
آن گاه $A'D' \parallel B'C' \parallel A_1D_1$ و قطرهای A_1C_1 و B_1D_1 در O' مرکز S' یکدیگر را
می‌برند و از این جا حکم مسأله ثابت می‌شود.
۳۹۵. گزینه (ج) درست است.

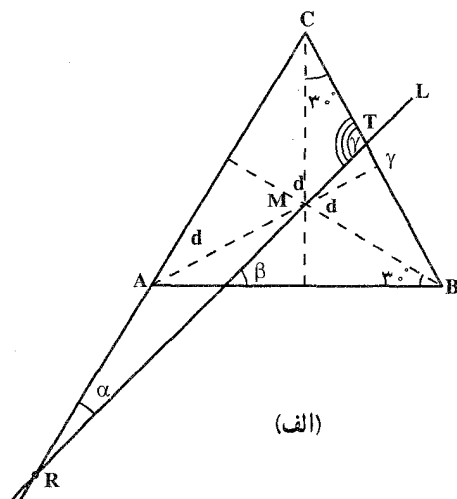
۱۰.۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۹۶. الف. فرض می‌کنیم ABC مثلثی متساوی الاضلاع باشد. شکل (الف) را در نظر می‌گیریم.
با استفاده از قانون سینوسها در مثلثهای AMR ، BMS و CMT (و با توجه به این که
برای $\frac{2}{3}$ میانه ΔABC است) می‌بینیم که :

$$\frac{d}{MR} = \frac{\sin \alpha}{\sin 15^\circ} = 2 \sin \alpha$$

$$\frac{d}{MS} = \frac{\sin \beta}{\sin 3^\circ} = 2 \sin \beta$$

$$\frac{d}{MT} = \frac{\sin \gamma}{\sin 3^\circ} = 2 \sin \gamma$$



(الف)

پس :

$$\frac{1}{MT} = \frac{2}{d} \sin \gamma, \quad \frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} = \frac{2}{d} (\sin \alpha + \sin \beta)$$

روشن است که :

$$\beta = \gamma - 6^\circ, \quad \alpha = 12^\circ - \gamma$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \sin(12^\circ - \gamma) + \sin(\gamma - 6^\circ)$$

بنابراین :

$$= \sin(12^\circ - \gamma) - \sin(12^\circ + \gamma)$$

$$= -2 \cos 12^\circ \sin \gamma = \sin \gamma$$

یعنی در یک مثلث متساوی الاضلاع ABC داریم:

$$\frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} = \frac{1}{MT}$$

برای این که ببینیم آیا این رابطه برای یک مثلث دلخواه ABC صحیح است یا نه،

ملاحظه می کنیم که رابطه اخیر با رابطه: $MT/MR + MT/MS = 1$

هم ارز است و همواره می توان مثلث متساوی الاضلاعی را به وسیله یک تصویر موازی خاص و مشابهت به هر مثلث قبلاً مشخص شده ای بدل کرد.

با استدلالی مشابه می توان نشان داد که هرگاه به جای M، به طور مثال، نقطه N وسط

میانه AD را بگذاریم، رابطه بالا به رابطه مشابهی با $\frac{1}{MX}$ (X معرف نقطه سه گانه R،

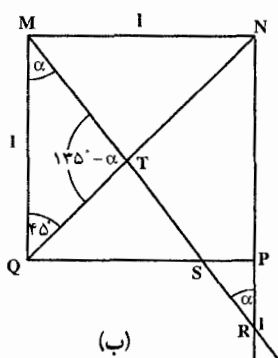
S و T مربوط به ضلع BC از مثلث ABC است) بدل می شود که به جای آن $\frac{2}{NX}$ (و به

جای $\frac{1}{MY}$ و $\frac{1}{MZ}$ مقدارهای $\frac{1}{NY}$ و $\frac{1}{NZ}$) نهاده شده است.

ب. فرض می کنیم متوازی الاضلاع MNPQ یک مربع واحد (شکل ب) باشد. پس در مثلثهای MSQ، MRN و MTQ داریم:

$$\frac{1}{MR} = \sin \alpha, \quad \frac{1}{MS} = \cos \alpha$$

$$\frac{1}{MT} = \frac{\sin(135^\circ - \alpha)}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2} \sin(135^\circ - \alpha)$$



چون:

$$\sin(135^\circ - \alpha) = \sin(45^\circ + \alpha) = \sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha + \cos \alpha)$$

$$\frac{1}{MT} = \sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \alpha + \cos \alpha) \right] = \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} \quad \text{پس:}$$

برای یک مربع MNPQ داریم:

$$\frac{1}{MR} + \frac{1}{MS} = \frac{1}{MT}$$

برای این که درستی این رابطه را برای یک متوازی الاضلاع دلخواه ببینیم، ملاحظه می‌کنیم که این رابطه با رابطه $MT/MR + MT/MS = 1$ هم‌ارز است و همواره می‌توان هر متوازی الاضلاع ABCD را بر اثر یک تصویر موازی مناسب به یک مربع بدل کرد (برای این امر کافی است مثلث ABC را به یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین بدل کنیم).

۳۹۷. الف. از رأس Bی متوازی الاضلاع، خطی موازی MD رسم می‌کنیم تا قطر AC را در N' قطع کند (شکل الف). چون $MN \parallel N'B$ ، پس $AN'/AN = AB/AM = n$. بعد هم، قابلیت انطباق مثلثهای ADN و CBN' ایجاب می‌کند که $AN = CN'$. از این جا نتیجه می‌شود که :

$$\frac{AC}{AN} = \frac{AN' + N'C}{AN} = n + 1$$

که همان چیزی است که ما می‌خواستیم ثابت کنیم.

اگر شکل (الف) را بر صفحه دیگری چنان تصویر کنیم که AB موازی با خط خاص صفحه تصویر شود، آن‌گاه نسبت پاره‌خطهای واقع بر خط AB محفوظ می‌ماند. ولی این تصویر نسبت پاره‌خطهای واقع بر قطر AC را حفظ نمی‌کند. بنابراین برای به دست آوردن صورت دیگری از قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم، باید آن را طوری بیان کنیم که نسبت پاره‌خطهای واقع بر AC حذف شوند، و فقط نسبت پاره‌خطهای واقع بر AB باقی بمانند. این کار، بسیار ساده به صورت زیر انجام می‌گیرد :

از N خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در M_1 قطع کند. قضیه‌ای که هم‌اکنون ثابت کردیم، ایجاب می‌کند که اگر $AM = (\frac{1}{n})AB$ ، آن‌گاه :

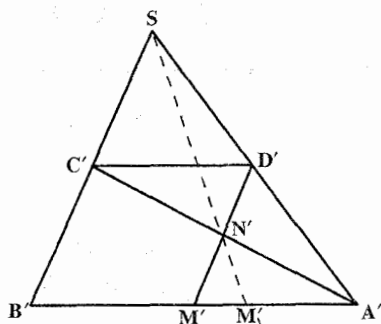
$$AM_1 = \frac{1}{n+1} AB$$

اکنون روشن است که تصویر ما به نتیجه زیر منجر می‌شود :

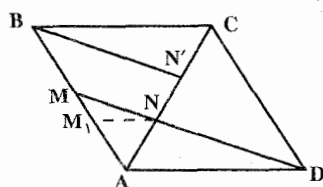
اگر نقطه M' قاعده A'B' از دوزنقه A'B'C'D' را به نسبت $A'M'/A'B' = 1/n$ تقسیم کند، آن‌گاه خط SN' واصل بین S، نقطه برخورد ضلعهای (ناموازی) دوزنقه، و N'، نقطه برخورد D'M' با قطر A'C'، یک نقطه M' را بر A'B' مشخص می‌کند به طوری که :

$$A'M'_1 = \frac{1}{n+1} A'B'$$

(شکل ب). [چون خطهای AB و CD با خط خاص صفحه موازی اند. نگاره‌های آنها بر اثر این تصویر، موازی باقی می‌مانند. این مطلب ایجاب می‌کند که متوازی‌الاضلاع ABCD به یک دوزنقه $A'B'C'D'$ بدل شود. خطهای موازی AD ، BC و M_1N به خطهای $A'D'$ ، $B'C'$ و M'_1N' بدل می‌شوند که یکدیگر را در یک نقطه S می‌برند. نسبت پاره‌خطهای واقع بر خط AB ، موازی با خط خاص صفحه، بر اثر یک تصویر محفوظ می‌ماند.]



(ب)

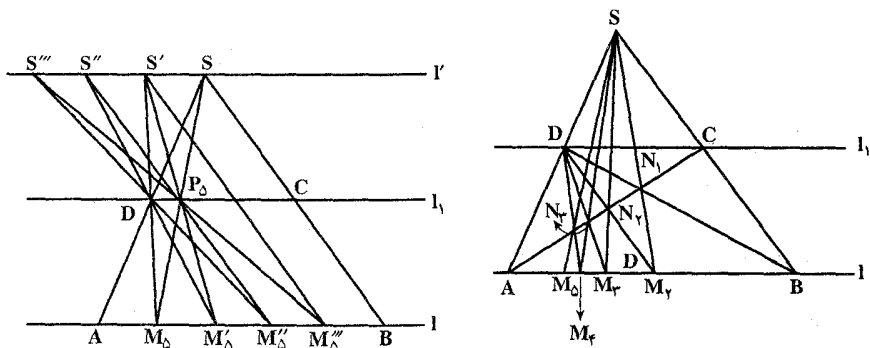


(الف)

ب. یک نقطه اختیاری S از صفحه را به نقطه‌های A و B وصل، و فرض می‌کنیم C و D نقطه‌های برخورد خطهای SA و SB با I_1 باشند. اگر نقطه برخورد DB با AC باشد، آن‌گاه SN_1 خط AB را در یک نقطه M_1 می‌برد به طوری که $AM_1 = (\frac{1}{2})AB$. بعد اگر DM_1 خط AC را در یک نقطه N_1 ببرد، آن‌گاه SN_1 خط AB را در یک نقطه M_2 می‌برد به طوری که $AM_2 = (\frac{1}{3})AB$ ؛ اگر DM_2 خط AC را در یک نقطه N_2 ببرد، آن‌گاه SN_2 خط AB را در یک نقطه M_3 می‌برد به طوری که $AM_3 = (\frac{1}{4})AB$ و همچنین:

وقتی نقطه $M_n = (\frac{1}{n})AB$ معین شود، به آسانی می‌توان بقیه نقطه‌هایی را که پاره‌خط AB را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنند، پیدا کرد. زیرا کافی است، خط I' را از S به موازات I_1 و I_2 رسم کنیم. حال، اگر SM_n خط DC را در یک نقطه P_n ببرد، M_nD خط I' را در یک نقطه S' می‌برد و $S'P_n$ خط AB را

در یک نقطه M'_n . پس : $AM_n = M_n M'_n$ ، آن گاه $AM'_n = (\frac{2}{n})AB$ ، و همچنین
(شکل (ب) که $n = 5$.)



(ب)

۳۹۸. چهارضلعی ABCD را بر یک مربع $A'B'C'D'$ تصویر، و فرض می کنیم نقطه های P_1, P_2, P_3 و ... به نقطه های P'_1, P'_2, P'_3 و ... بدل شوند (شکل). این نقطه ها بر ضلعهای مربع نسبتهایی پدید می آورند که با

$$\lambda_1 = \frac{A'P'_1}{B'P'_1} , \quad \lambda_2 = \frac{B'P'_2}{C'P'_2} , \quad \lambda_3 = \frac{C'P'_3}{D'P'_3}$$

شان می دهیم. خاطر نشان می کنیم که این عددها می توانند مثبت یا منفی باشند. از تشابه مثلثهای $A'D'P'_1$ و $B'P'_2P'_1$ (شکل) نتیجه می شود :

$$\frac{D'A'}{B'P'_2} = -\frac{A'P'_1}{B'P'_1}$$

پس :

$$\frac{C'P'_2}{B'P'_2} = \frac{C'B' + B'P'_2}{B'P'_2} = \frac{C'B'}{B'P'_2} + 1 = \frac{D'A'}{B'P'_2} + 1 = -\frac{A'P'_1}{B'P'_1} + 1$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = -\lambda_1 + 1$$

از این رو :

$$\lambda_2 = \frac{1}{1 - \lambda_1} \quad (1)$$

یا

به آسانی می توان تحقیق کرد که هرگاه نقطه P'_1 بر امتداد $A'B'$ در سمت چپ A' یا سمت راست B' قرار گیرد، دستور (۱) صحیح باقی می ماند.
با استفاده از دستور (۱)، پیدا می کنیم:

$$\lambda_2 = \frac{1}{1-\lambda_1}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{1-\lambda_2} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{1-\lambda_3} = \lambda_1$$

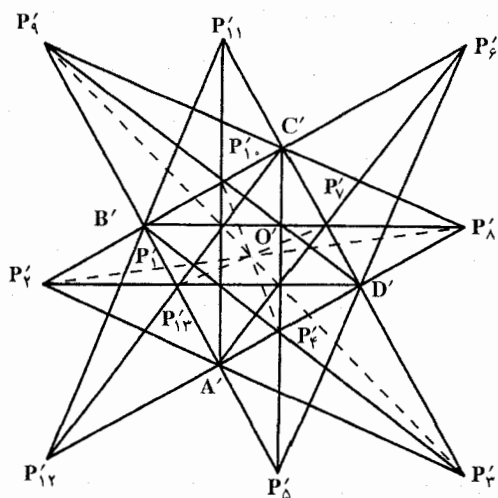
$$\lambda_5 = \frac{1}{1-\lambda_4} = \lambda_2, \quad \lambda_6 = \frac{1}{1-\lambda_5} = \lambda_3 \text{ و } \dots$$

یعنی:

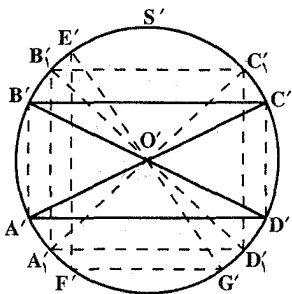
$$\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_7 = \lambda_{10} = \lambda_{13} = \lambda_{16} = \dots$$

$$\lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_8 = \lambda_{11} = \lambda_{14} = \lambda_{17} = \dots = \frac{1}{1-\lambda_1}$$

$$\lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_9 = \lambda_{12} = \lambda_{15} = \lambda_{18} = \dots = 1 - \frac{1}{\lambda_1}$$



حال حکمهای قضیه ما بلافاصله نتیجه می شود:
الف. $\lambda_1 = \lambda_{13}$ ایجاب می کند که نقطه P'_{13} بر نقطه P'_1 منطبق باشد. از ماهیت یک به یک بودن یک تصویر مرکزی نتیجه می شود که P_{13} بر P_1 منطبق است.
ب. $\lambda_1 = \lambda_7$ و $\lambda_2 = \lambda_8$ و $\lambda_3 = \lambda_9$ و غیره ایجاب می کنند که P'_1 ، P'_7 و P'_2 ، P'_8 و P'_3 ، P'_9 نسبت به مرکز O' مربع متقارن باشند، یعنی خطهای $P'_1P'_8$ ، $P'_7P'_2$ ، $P'_3P'_9$



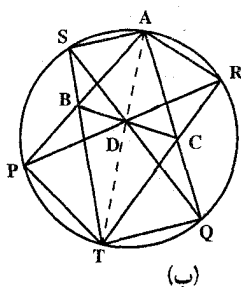
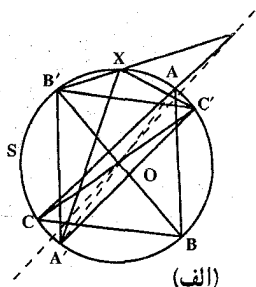
۴۰۰. صفحه نمودار مسأله را بر یک صفحه جدید π' تصویر می کنیم به طوری که دایرة S به یک دایرة S' بدل شود و نقطه O به O' ، مرکز دایرة S' ، بر اثر این تصویر، چهارضلعی $ABCD$ به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می شود (زیرا قطرهای $A'B'C'D'$ در مرکز دایرة محیطی S' متقاطعند). بنابراین نقطه های P و Q به P' و Q' ، نقطه های

بینهایت امتدادهای ضلعهای مستطیل، بدل می شوند (شکل).

الف. اگر ضلعهای $E'F'$ و $F'G'$ از $\Delta E'F'G'$ ، محاط در S' ، بترتیب از نقطه های بینهایت P' و Q' بگذرند، یعنی هرگاه $E'F' \parallel A'B'$ و $F'G' \parallel B'C'$ ، آن گاه ضلع $E'G'$ از O' ، مرکز S' ، می گذرد (ضلع $E'G'$ مقابل به زاویه قائمه $E'F'G'$ محاط در S' است). اگر ضلع $E'G'$ از مرکز O' بگذرد و $E'F'$ از نقطه P' ، یعنی اگر $E'F' \parallel A'B'$ ، آن گاه $F'G' \parallel B'C'$ ، یعنی $F'G'$ از نقطه Q' می گذرد (زیرا زاویه محاطی مقابل به قطر، قائمه است).

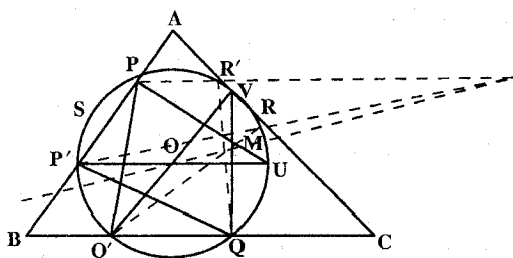
ب. اگر قطرهای $A'C'$ و $B'D'$ از چهارضلعی محاطی $A'B'C'D'$ در مرکز O' از دایرة S' یکدیگر را ببرند، و اگر ضلع $A'B'$ از نقطه P' بگذرد (یعنی اگر $A'B' \parallel A'B'$)، آن گاه $D'C' \parallel A'B'$ و $B'C' \parallel A'D'$ ؛ و حکم قسمت (ب) نتیجه می شود.

۴۰۱. الف. شش ضلعی $ABB'XC'C$ را در نظر می گیریم (شکل (الف)؛ ترتیب رأسها را رعایت کنید!) به موجب قضیه پاسکال نقطه های برخورد ضلعهای AB و XC' ، AC و XB' ، BB' و CC' (نقطه O) همخطند. یک استدلال مشابه نشان می دهد که نقطه های برخورد AB و XC' ، BC و XA' ، و نقطه O همخطند و حکم مسأله نتیجه می شود. ب. شش ضلعی $APRTSQ$ (ترتیب رأسها را رعایت کنید!) محاط در دایرة به قطر AT را در نظر می گیریم (شکل (ب)). به موجب قضیه پاسکال نقطه های برخورد ضلعهای



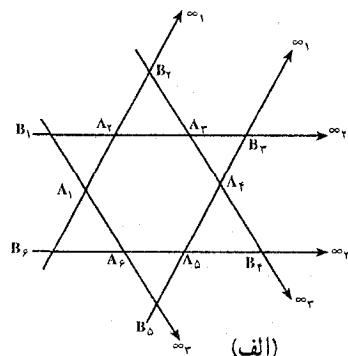
AP و ST، AQ و RT، RP و QS، همخطند، که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

ج. گیریم U و V نقطه‌های برخورد PM و P'O، QM و Q'O باشند (شکل (پ)). چون داریم $\hat{P'PM} = \hat{Q'QM} = 90^\circ$ ، نقطه‌های U و V (که متقاطع P' و Q' هستند) بر S قرار دارند. حال شش ضلعی P'QVQ'PU، محاط در S را در نظر می‌گیریم (به ترتیب رأسها توجه کنید!). به موجب قضیه پاسکال، نقطه‌های برخورد ضلعهای QV و PU، Q'V و P'U، P'Q و Q'P، یعنی نقطه‌های M و O و نقطه برخورد P'Q و Q'P همخطند. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که نقطه‌های برخورد P'R و P'R'، Q'R و QR' بر خط OM قرار دارند.



(پ)

حال شش ضلعی P'QVQ'PU، محاط در S را در نظر می‌گیریم (بترتیب رأسها توجه کنید!). به موجب قضیه پاسکال، نقطه‌های برخورد ضلعهای QU و Q'V و PU و Q'U و Q'P و P'Q، یعنی نقطه‌های M و O و نقطه برخورد P'Q و Q'P همخطند. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که نقطه‌های برخورد P'R و P'R'، Q'R و QR' بر خط OM قرار دارند.



(الف)

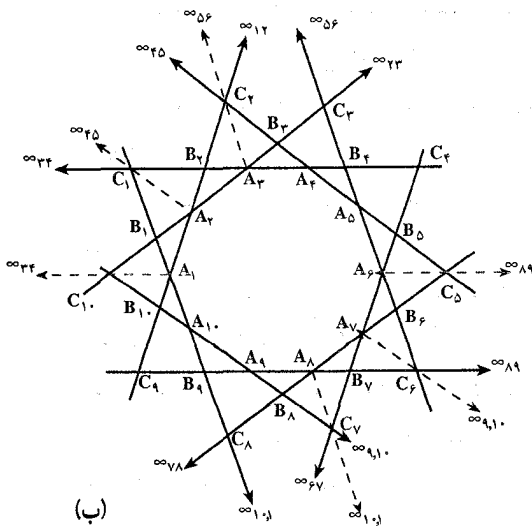
۴۰۲. الف. این مسأله یک حالت خاص مسأله ۲۸۴ است.

ب. نقطه‌های برخورد امتدادهای ضلعهای شش ضلعی را با $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ نشان می‌دهیم (شکل (الف))، و نقطه‌های بینهایت متناظر به امتدادهای $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ را به $\infty_1, \infty_2, \infty_3, \infty_4, \infty_5, \infty_6$ تصویر خط A_1A_2 از

مرکز A_6 بر خط A_2A_3 نقطه‌های A_1, A_2, B_6 و ∞_6 را به نقطه‌های B_1, A_2 ، A_3 و ∞_3 بدل می‌کند، و تصویر A_2A_3 از مرکز A_1 بر A_3A_4 نقطه‌های B_1, A_2 ، A_4 و ∞_4 را به A_3 و ∞_3 بدل می‌کند. با استفاده از تصویرهای مناسب، به طور متوالی از نقطه‌های ∞_3, B_2, A_4 بر خط A_3A_4 به نقطه‌های A_5, ∞_1, A_4 و B_3 بر A_4A_5 ؛ بعد به نقطه‌های A_5, A_6, B_4 و ∞_4 بر خط A_5A_6 ؛ سپس به نقطه‌های B_5, A_6, ∞_3 و A_1 بر A_6A_1 ؛ بالاخره به نقطه‌های ∞_1, B_6, A_2 و A_1 بر خط اولیه A_1A_2 می‌رسیم. حاصلضرب این شش تصویر معرف یک تبدیلی تصویری است از A_1A_2 که A_1, A_2, B_6 و ∞_6 را به A_2, B_6, ∞_6 و A_1 بدل می‌کند و مربع این تبدیل A_1, A_2, B_6 و ∞_6 را به A_2, B_6, A_1 و ∞_6 ؛ پس تبدیلی است همانی بر خط A_1A_2 (برای اثبات درستی این نتیجه کافی است که بدانیم تبدیل مورد بحث سه نقطه را ثابت نگه می‌دارد).

ج. نقطه‌های برخورد امتدادهای ضلعهای ده ضلعی را به $B_1, B_2, \dots, B_9, C_1, C_2, \dots, C_9$ همان گونه که در شکل (ب) نشان داده شده، نشان می‌دهیم، و نقطه‌های بینهایت خطهای A_1A_2, A_2A_3 و غیره را به ∞_2 و ∞_3 و غیره. تصویر از مرکز A_1 نقطه‌های A_2, A_1 و B_1 بر خط A_1A_2 را به نقطه‌های B_1, A_2 و C_1 بر A_2A_3 بدل می‌کند. تصویرهای متوالی از مرکزهای $A_2, A_1, A_2, \dots, A_9$ این نقطه‌ها را به B_2, C_1 و ∞_4 بر خط A_3A_4 ؛ سپس به C_2, A_5 و ∞_5 بر خط A_4A_5 ؛ بعد به A_6, ∞_6 و A_5 بر خط A_5A_6 ؛ سپس به A_6, A_7, B_5 و ∞_7 بر خط A_6A_7 ؛

بعد به B_6, A_7, C_5 و ∞_8 بر خط A_7A_8 ؛ بعد به C_6, B_7 و ∞_9 بر خط A_8A_9 ؛ سپس به A_9, C_7 و ∞_{10} بر خط A_9A_1 ؛ بعد به A_1, A_2 و ∞_{11} بر خط A_1A_2 و B_1 بر خط اولیه A_1A_2 بدل می‌کند. حاصلضرب این ده تصویر معرف تبدیلی است



(ب)

تصویری از خط A_1A_2 که سه نقطه A_1 ، A_2 و B_1 را ثابت نگاه می‌دارد، و بنابراین باید تبدیل همانی از آن خط باشد.

۴۰۳. چهارضلعی $A_1A_2A_3A_4$ را بر یک مربع $A'_1A'_2A'_3A'_4$ تصویر می‌کنیم، بر اثر این تصویر نقطه‌های P و Q به نقطه‌های بینهایت امتدادهای ضلعهای مربع بدل می‌شوند و خطهای PN و QN به میانخطهای آن. نقطه‌های B_1 ، B_2 ، B_3 و B_4 به وسطهای B'_1 ، B'_2 ، B'_3 و B'_4 از ضلعهای مربع و نقطه‌های M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4 ، M_5 ، M_6 ، M_7 و M_8 به نقطه‌های M'_1 ، M'_2 ، M'_3 ، M'_4 ، M'_5 ، M'_6 ، M'_7 و M'_8 بدل می‌شوند.

حکماهای قضیه مورد بحث از ملاحظه‌های نسبتاً بدیهی زیر ناشی می‌شوند:

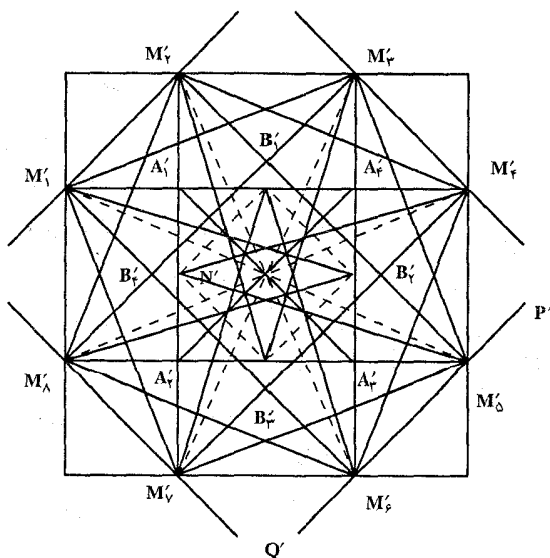
الف. نقطه‌های M'_1 و M'_5 و M'_2 و M'_6 و M'_3 و M'_7 و M'_4 و M'_8 نسبت به N' مرکز مربع، قرینه هستند. در نتیجه خطهای $M'_1M'_5$ ، $M'_2M'_6$ ، $M'_3M'_7$ و $M'_4M'_8$ در N' یکدیگر را می‌برند.

ب. خطهای $M'_2M'_6$ و $M'_3M'_7$ با $A'_2A'_3$ موازی‌اند؛ و خطهای $M'_4M'_8$ و $M'_1M'_5$ با $A'_4A'_1$.

ج. $M'_1M'_5$ ، $M'_2M'_6$ ، $M'_3M'_7$ و $M'_4M'_8$ با قطر $A'_2A'_3$ مربع، و خطهای $M'_2M'_6$ و $M'_3M'_7$ با قطر $A'_4A'_1$ مربع موازی‌اند.

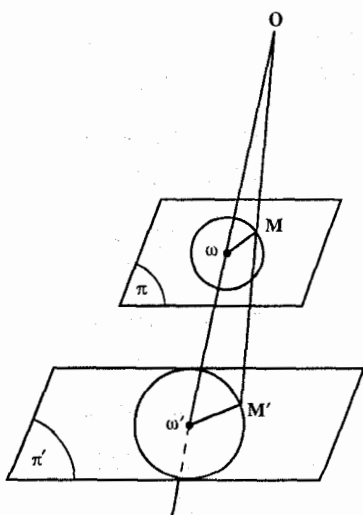
د. $M'_2M'_6 \parallel M'_6M'_8 \parallel B'_2M'_5$ ؛ $M'_1M'_5 \parallel M'_5M'_7 \parallel B'_1M'_4$ ؛

$M'_3M'_7 \parallel M'_7M'_1 \parallel B'_3M'_2$ ؛ $M'_4M'_8 \parallel M'_8M'_6 \parallel B'_4M'_3$.



۵.۳. تبدیلیهای آفین و تصویری در دایره

۵.۳.۱. مرکز تصویر، محور تصویر



۴۰۴. تصویر مرکزی که در آن دو صفحه π و π' موازی باشند تجانس است. بنابراین باید مرکز تجانس دو دایره را بیابیم. برای این کار دو شعاع موازی و همجهت ωM و $\omega' M'$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد $\omega\omega'$ و MM' نقطه O مرکز تجانس یا مرکز تصویر است.

۵.۳.۲. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

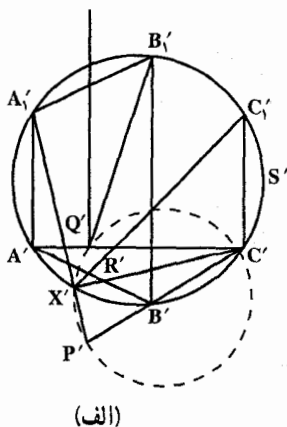
۵.۳.۲.۱. نقطه‌ها همخطند

۴۰۵. اگر O بر S منطبق باشد، مسأله بی‌معنی است. مانده است دو حالت زیر را بررسی کنیم:

۱. O نقطه‌ای است در خارج S . صفحه نمودار را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به گونه‌ای که دایره S به یک دایره S' بدل شود، و O به یک نقطه بینهایت O' از π' . بر اثر این تصویر، شکل صورت مسأله به شکل (الف) بدل می‌شود که:

$$A'A'_1 \parallel B'B'_1 \parallel C'C'_1$$

نشان می‌دهیم که $P'Q' \parallel A'A'_1$. دوزنقه

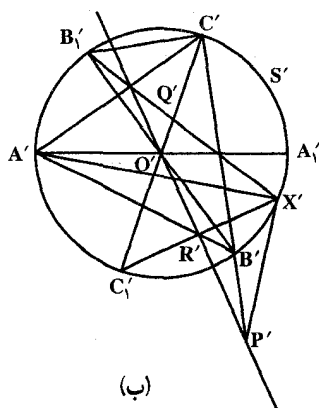


(الف)

$A'B'B'A'$ محاط در S' متساوی الساقین است؛ $A'B' = A'B'$ ، بنابراین
 $\widehat{A'B'} = \widehat{A'B'}$ و $\widehat{A'C'B'} = \widehat{A'X'B'}$ ، ولی این تساویها ایجاب می کنند که نقطه های
 C' ، P' و Q' بر یک دایره قرار داشته باشند. بنابراین
 $X'P'Q' = X'C'Q' = X'C'A'$ و $X'C'A' = X'A'A'$ و $X'P'Q' = X'A'A'$ پس
 $P'Q' \parallel A'A'$ و بالاخره $Q'R' \parallel B'B'$ پس داریم:

$$P'Q' \parallel Q'R' \parallel A'A'$$

که بدین معنی است که P' ، Q' و R' بر خطی قرار دارند که بر نقطه بینهایت O'
 می گذرد. از آنجا نتیجه می شود که نقطه های P ، Q و R ، شکل صورت مسأله، بر یک
 خط واقعند که بر O می گذرد.



(ب)

۲. نقطه ای است در داخل S . صفحه شکل
 صورت مسأله را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم
 به گونه ای که S به یک دایره S' بدل شود و O به
 O' ، مرکز S' (شکل (ب)).
 ثابت می کنیم که $P'Q'$ از O' می گذرد.
 بدین منظور اول اثبات می کنیم که:

$$\frac{S_{P'O'A'}}{S_{P'O'B'}} = \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'}} \quad (۱)$$

که S_{XYZ} معرف مساحت ΔXYZ است.

حال اگر XY یک خط باشد، پاره خط رسم شده

از O' و عمود بر XY ، یا طول آن را، (که معنی مورد نظر از متن پیدا خواهد شد) به
 h_{XY} نشان می دهیم. پس:

$$\frac{S_{P'O'A'}}{S_{P'O'B'}} = \frac{P'A' \cdot h_{X'A'}}{P'B' \cdot h_{B'C'}} \quad \text{و} \quad \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'}} = \frac{Q'A' \cdot h_{C'A'}}{Q'B' \cdot h_{X'B'}} \quad (۲)$$

یادآور می شویم که $h_{X'A'}$ میانخط $\Delta X'A'A'$ است، بنابراین:

$$h_{X'A'} = \left(\frac{1}{2}\right) X'A'$$

$$h_{B'C'} = \left(\frac{1}{2}\right) B'C'$$

همچنین:

باز از تشابه مثلثهای $A'Q'X'$ و $B'Q'C'$ نتیجه می شود که :

$$\frac{A'X'}{B'C'} = \frac{Q'A'}{Q'B'}$$

$$\frac{h_{X'A'}}{h_{B'C'}} = \frac{X'A'}{B'C'} = \frac{Q'A'}{Q'B'} \quad \text{پس :}$$

همچنین، با استدلالی مشابه به دست می آوریم :

$$\frac{h_{C'A'}}{h_{X'B'}} = \frac{P'A'}{P'B'}$$

از قرار دادن این رابطه ها در تساویهای (۲)، به رابطه (۱) می رسیم.

حال نقطه برخورد $P'Q'$ را با ضلع $A'C'$ از $\Delta A'B'C'$ به Q' نشان می دهیم. همچنین فرض می کنیم h_1, h_2, h_3 و h_4 طولهای عمودهای رسم شده از نقطه های A', B', A'_1 و B'_1 برخط $P'O'Q'$ باشند. چون $O'A' = O'A'_1$ ، از آن جا نتیجه می شود که $h_1 = h_3$ و به طریق مشابه $h_2 = h_4$. بنابراین :

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'O'A'}} = \frac{P'O'}{Q'O'} \quad \text{و} \quad \frac{S_{P'O'B'_1}}{S_{Q'O'B'}} = \frac{P'O'}{Q'O'}$$

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{Q'O'A'}} = \frac{S_{P'O'B'_1}}{S_{Q'O'B'}} \quad \text{و بنابراین :}$$

$$\frac{S_{P'O'A'_1}}{S_{P'O'B'_1}} = \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'}} \quad (۳) \quad \text{یا :}$$

از مقایسه تساویهای (۳) و (۱) نتیجه می گیریم :

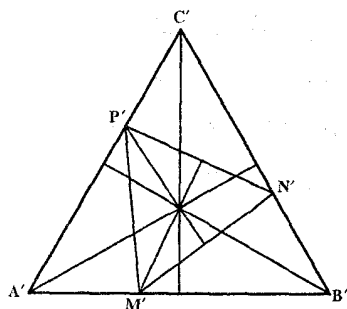
$$\frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'}} = \frac{S_{Q'O'A'}}{S_{Q'O'B'}}$$

از این جا نتیجه می شود که Q' بر Q'_1 منطبق است.

استدلالی مشابه، نشان می دهد که R' برخط $O'P'$ قرار دارد. پس، P', Q' و R' بر یک خط گذرنده بر O' واقعند، و حکم مسأله نتیجه می شود.

۲.۲.۵.۳. نقطه ها برهم منطبقند

۴۰۶ الف. یک تصویر موازی مناسب، مثلث ABC را بر مثلث متساوی الاضلاع $A'B'C'$



در یک صفحه π می‌نگارد، و نیز به موجب ویژگی (ج) از یک تصویر موازی، این نگاشت نقطه‌های M, N و P را به نقطه‌های M', N', P' بدل می‌کند به طوری که $A'M'/M'B' = B'N'/N'C' = C'P'/P'A'$ (شکل). دوران مثلث $A'B'C'$ حول مرکزش به زاویه 120° ، ضلعهای $A'B', B'C', C'A'$ را

به ترتیب به ضلعهای $B'C', C'A', A'B'$ بدل می‌کند، و نقطه‌های M', N', P' را به ترتیب به نقطه‌های M, N, P و بنابراین دوران مثلث $A'B'C'$ حول مرکزش به زاویه 120° ، مثلث $M'N'P'$ را به خودش بدل می‌کند؛ اما این بدین معنی است که مثلث اخیر متساوی‌الاضلاع است و مرکزش بر مرکز مثلث $A'B'C'$ منطبق است. به عبارت دیگر، نقطه برخورد میانه‌های مثلث $M'N'P'$ بر نقطه برخورد میانه‌های مثلث $A'B'C'$ منطبق است. چون یک تصویر موازی میانه‌های یک مثلث را به میانه‌های نگاره‌اش بدل می‌کند، نقطه برخورد میانه‌های مثلث MNP بر نقطه برخورد میانه‌های مثلث ABC منطبق می‌شود.
ب. برهان مشابه با حل قسمت (الف).

۳.۵.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۳.۵.۳.۱. خطها موازی‌اند

۴۰۷. توجه می‌کنیم که، مجموع طولهای دو تصویر یک پاره‌خط، بر خط راست مفروض l و خط راست l' عمود بر آن، کمتر از واحد نیست. درواقع، اگر بردار a به طول واحد، با یکی از پاره‌خطها موازی باشد، و بردارهای x و y ، تصویرهای بردار a بر خطهای راست l و l' باشند، آن وقت:

$$a = x + y \Rightarrow |x| + |y| \geq |a| = 1$$

ولی طول تصویرهای پاره‌خط، برابر $|x|$ و $|y|$ است، بنابراین مجموع آنها هم، از واحد کوچکتر نیست. به این ترتیب، مجموع طول تصویرهای همه پاره‌خطها، از $4n$ کمتر نیست. یعنی، از بین دو خط راست l و l' می‌توان خط راستی را انتخاب کرد که، مجموع طول تصویرهای پاره‌خطها بر آن، از $2n$ کمتر نباشد. در نتیجه، روی خط

راست انتخایی، نقطه‌ای پیدا می‌شود که، دست کم، متعلق به تصویر دوتا از پاره‌خطهاست. اگر از این نقطه، خط راستی عمود بر خط راست انتخایی رسم کنیم، دست کم، این دو پاره‌خط را قطع می‌کند. چون این خط راست، یا موازی خط راست 1 و یا عمود بر آن است؛ همان خط راستی است که مسأله می‌خواهد.

۳. ۴. ۵. زاویه

۳. ۴. ۵. ۱. اندازه زاویه

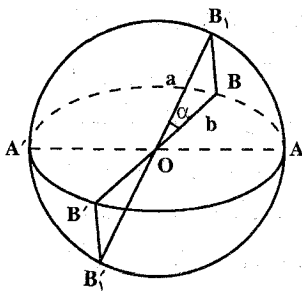
۴۰۸. تصویر دایره به شعاع a روی صفحه‌ای که با آن زاویه α می‌سازد، یک بیضی با نیمه قطرهای a و

b است به قسمی که $\frac{b}{a} = \cos \alpha$ است. بنابراین

داریم :

$a = 4$ شعاع دایره ۴، $۸:۲ = ۴ = a$ و $۶:۲ = ۳ = b$

$$\cos \alpha = \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = \text{Arc cos}\left(\frac{3}{4}\right)$$



۳.۵.۵. یارہ خط

۳.۵.۵.۱. اندازه یاره خط

۴۰۹. الف. تصویر دایره S بر خط AB از M، نقطه های A، B، N و P بر دایره را به A، B، O و E بر آن خط بدل می کند. تصویر S بر AB از Q همین چهار نقطه را به A، B، F و O بدل می کند. از آن جا نتیجه می شود که نسبت های ناهمساز چهار نقطه A و B؛ O و E، و A و B؛ F و O مساویند، یعنی:

$$\frac{AO/BO}{AE/BE} = \frac{AF/BF}{AO/BO} = \frac{BO/AO}{BF/AF}$$

این رابطه، تساوی نسبت‌های ناهمساز چهارتاییهای A و B ؛ O و E ، و A و O ؛ F و B را ایجاد می‌کند. حال قرینه چهارتایی A ، B ، O و E را نسبت به O ، مرکز وتر AB پیدا می‌کنیم، و این، عمل چهارتایی ما را به A ، B ، O و F_1 بدل می‌کند که F_1 قرینه E نسبت به O است. ولی در این صورت نسبت‌های ناهمساز چهارتاییهای A و B ؛ O و F ، و B

و A : O و F_1 مساویند که تساوی $F = F_1$ را ایجاب می کند، یعنی همان چیزی که می خواستیم ثابت کنیم.

ب. این تعمیم قسمت (الف) است. استدلال که شبیه به استدلال قسمت (الف) است، به عهده خواننده گذاشته می شود.

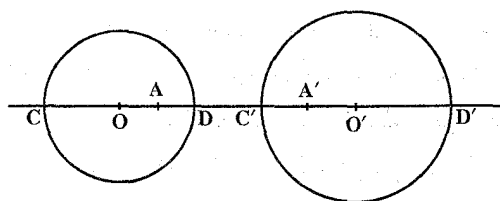
۳.۵.۶. رابطه های متری

۴۱۰. اگر صفحه ها موازی باشند، درستی حکم روشن است. اکنون فرض می کنیم دو صفحه موازی نباشند، در این صورت، تصویر جسم بر خط راست l، فصل مشترک دو صفحه را می توان به عنوان تصویر هریک از تصویرهای جسم بر این یا آن صفحه، بر خط راست l به دست آورد (همه جا صحبت بر سر تصویر قائم است. مجموعه پای عمودها)، ولی تصویر هر دایره بر خط راستی واقع در صفحه خودش، برابر است با قطر دایره.

۳.۵.۷. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند

۴۱۱. اثبات به عنوان قضیه در قسمت ۳.۱ آمده است.

۳.۵.۸. رسم شکلها



۴۱۲. فرض می کنیم A نقطه ای است که نسبت به دو دایره (O) و (O') دارای یک خط قطبی است. خطهای OA و $O'A$ باید به این خط قطبی عمود

باشند، و چون از A می گذرند، پس بر هم منطبقند. در نتیجه A باید روی خط المرکزین OO' واقع باشد (شکل). بنابراین باید روی OO' نقطه ای به دست آورد که نسبت به CD و $C'D'$ ، قطرهای دو دایره، دارای یک نقطه مزدوج باشد. اما اگر A چنین نقطه ای باشد و B مزدوج آن، نسبت به CD و $C'D'$ فرض شود، می دانیم که هر دایره گذرنده بر A و B، بر دایره (O) و (O') عمود است و بعکس. به این ترتیب A به دست

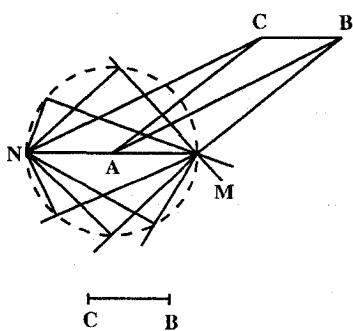
می‌آید که نقطه برخورد OO' با دایره عمود بر (O) و (O') می‌باشد. و مسأله عموماً دو جواب دارد که جواب دیگر را B می‌نامیم.

این نقطه‌های A و B، نقطه‌های حد دستگاه دایره‌های تشکیل شده از (O) و (O') می‌باشند و برای این که موجود باشند، باید دو دایره (O) و (O') متقاطع نباشند. اگر بر هم مماس باشند، مسأله دارای یک جواب خواهد بود.

در آنچه بیان شد فرض بر این بود که دو دایره متحد‌المركز نباشند. اکنون فرض می‌کنیم که متحد‌المركز باشند. اگر A نقطهٔ غیر مشخصی باشد، OA دایره‌ها را در CD و $C'D'$ قطع می‌کنند. اگر B و B' پای قطبهای A نسبت به دو دایره باشند، داریم:

$$OC' \cdot r = OA \times OB' \text{ , } OC \cdot r = OA \times OB$$

این رابطه نشان می‌دهد که OB و OB' متساوی نیستند، پس در این قسمت مسأله جواب ندارد.



۴۱۳. پاره خط BC را که طولش مساوی شعاع

مفروض باشد، رسم می‌کنیم. از A خطی

موازی BC می کشیم و بر آن قطعه های MA

و AN را مساوی با پاره خط BC جدا می کنیم.

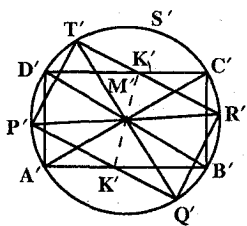
پاره خط MN قطر دایره خواسته شده است.

حال خطی از M می‌گذرانیم و عمودی از N

بر آن وارد می‌کنیم. پای این عمود بر دایره

مطلوب واقع است. با تغییر خط گذرنده بر M

می‌توانیم نقطه‌های دلخواه زیادی از دایره مطلوب را به دست آوریم (شکل).



(الف)

۴۱۴. الف. فرض می کنیم چهار ضلعی خواسته شده ABCD

رسم شده و نقطه مفروض M نقطه برخورد قطرهای آن

باشد، و AB و CD از نقطه‌های مفروض K و L بگذرند.

صفحة نمودار مسأله را بر یک صفحه π' تصویر می کنیم

به گونه ای که دایره محیطی آن، S ، به یک دایره S' بدل

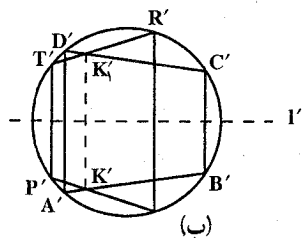
شود و M به نقطه M' ، مرکز S' . در این حال ABCD

به یک مستطیل $A'B'C'D'$ بدل می شود.

حال اگر $P'Q'R'T'$ یک چهارضلعی محاط در S' باشد که قطرهاش در مرکز M'

متلاقی باشند (که مستطیل بودن آن را ایجاب می‌کند) و ضلع $P'Q'$ آن از K' بگذرد،

آن گاه ضلع $R'T'$ باید از K' قرینه K' نسبت به M' بگذرد (شکل (الف)). بدین ترتیب ضلعهای $R'T'$ در همه چهارضلعیهای محاط در S' ، که قطرهاشان در M' برخورد می کنند و ضلعهای $P'Q'$ آنها از K' می گذرند، از نقطه ثابت K' می گذرند. از این جا نتیجه می شود که ضلعهای RT همه چهارضلعیهای $PQRT$ محاط در S که قطرهای آنها در یک نقطه M برخورد می کنند و ضلعهای PQ آنها از K می گذرند، از نقطه ثابت K_1 می گذرند. برای تعیین K_1 کافی است که دو تا از این چهارضلعیها را رسم کنیم. ضلع CD ی چهارضلعی خواسته شده $ABCD$ از وصل K_1 به L به دست می آید. اگر K_1L با S برخورد کند و K_1 غیر از L باشد، مسأله جوابی منحصر به فرد دارد. اگر K_1L دایره S را نبرد، مسأله جواب ندارد، و اگر K_1 بر L منطبق باشد، مسأله بینهایت جواب دارد.



ب. فرض می کنیم $ABCD$ چهارضلعی خواسته شده محاط در دایره S باشد که ضلعهای BC و AD ی آن در یک نقطه مفروض M برخورد کنند و ضلعهای AB و CD ی آن بترتیب از نقطه های مفروض K و L بگذرند. صفحه نمودار را بر یک صفحه π' تصویر

می کنیم به گونه ای که S به یک دایره S' بدل شود و M به یک نقطه بینهایت M' از π' . در این صورت چهارضلعی $ABCD$ به یک دوزنقه $A'B'C'D'$ به قاعده های $B'C'$ و $D'A'$ بدل می شود (شکل (ب)). چون دوزنقه محاط در یک دایره است، پس متساوی الساقین است. یک چهارضلعی $P'Q'R'T'$ محاط در دایره S' ، که ضلعهای $Q'R'$ و $T'R'$ آن در نقطه بینهایت M' برخورد کنند، دوزنقه ای است متساوی الساقین که محور تقارنش قطر $I'I$ از دایره S' عمود بر امتدادی است که با M' معین می شود. بنابراین، هرگاه ضلع $P'Q'$ از چهارضلعی، از نقطه ای مانند K' بگذرد؛ آن گاه ضلع $R'T'$ از نقطه K'_1 ، قرینه K' نسبت به I' ، خواهد گذشت. از آن جا نتیجه می شود که ضلعهای RT در همه چهارضلعیهای محاطی $PQRT$ ، که ضلعهای QR و PT ی آنها در M برخورد می کنند، و ضلعهای PQ ی آنها از K می گذرند، از نقطه ثابت K_1 می گذرند. برای پیدا کردن K_1 کافی است دو تا از این چهارضلعیها را رسم کنیم. از وصل کردن K_1 به L ، ضلع CD ی چهارضلعی خواسته شده به دست می آید.

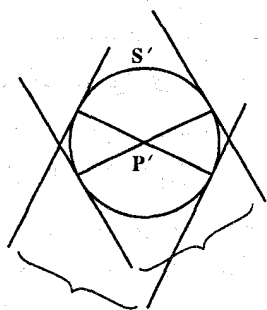
اگر K_1 از L متمایز باشد، مسأله (بسته به این که خط K_1L دایره را ببرد یا نبرد) یا یک جواب منحصر به فرد دارد و یا جوابی ندارد. اگر K_1 و L بر هم منطبق باشند، آن گاه مسأله بینهایت جواب پیدا می کند.

۹.۵.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

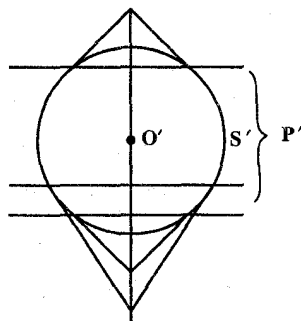
۴۱۵. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱. نقطه‌ای است در خارج S . صفحه نمودار مسأله را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم، به طوری که دایره S به یک دایره S' ، و P به نقطه بینهایت P' از π' بدل شوند. بر اثر این تصویر مکان خواسته شده به یک خط، یعنی به قطری از S' عمود بر امتدادی که به وسیله نقطه بینهایت P' مشخص می‌شود، بدل می‌گردد (شکل (الف)). از آن‌جا نتیجه می‌شود که مکان خواسته شده یک خط است.

۲. نقطه‌ای است در داخل S . صفحه نمودار مسأله را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایره S' بدل شود، و P به P' ، مرکز S' . روشن است که مکان خواسته شده در این صورت به خط بینهایت π' بدل می‌شود (شکل (ب)). از این‌جا نتیجه می‌شود که مکان خواسته شده یک خط است. ملاحظه می‌کنیم که اگر P نقطه‌ای بر S باشد، آن‌گاه مکان خواسته شده، مماس بر S در P خواهد شد.



(ب)



(الف)

۱۰.۵.۳. مسأله‌های ترکیبی

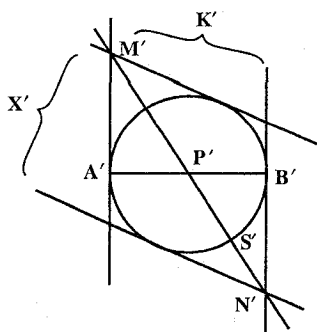
۴۱۶. الف. دو حالت در نظر می‌گیریم:

۱. نقطه‌ای است در خارج S (شکل (الف) در صورت مسأله). صفحه نمودار مسأله را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایره S' و P به P' ، نقطه بینهایت π' ، بدل شوند. در این حال خطهای AB و MN به خطهای $A'B'$ و $M'N'$ بدل می‌شوند (شکل (الف)). با توجه به ملاحظه‌های تقارن، نتیجه می‌شود که نقطه‌های

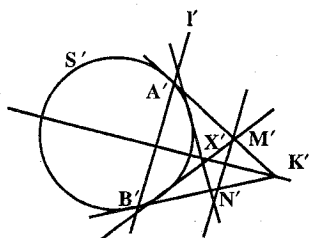
K' و X' (شکل (الف)) بر قطری از S' عمود بر خط l' ، نگاره l ، قرار دارند. بنابراین مکان X' خطی است گذرنده بر K' و عمود بر l' . در نتیجه مکان X خطی می‌شود که بر K می‌گذرد.

۲. P نقطه‌ای است در داخل S . صفحه نمودار را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به دایره S' و P به P' ، مرکز S' بدل شود (شکل (ب)). در این صورت خطهای $A'B'$ و $M'N'$ قطرهای S' هستند. بنابراین مماسهای $A'K'$ و $B'K'$ بر S' در A' و B' موازی‌اند. بنابراین مماسهای دوم بر S' از M' و N' نیز موازی‌اند. ملاحظه می‌کنیم که در این حالت مکان X' خط بینهایت π' است. نقطه K' نیز بر این خط است؛ پس مکان X خطی است که بر K می‌گذرد.

روشن است که شرایط مسأله حالتی را که P بر S است مستثنی می‌کند. (اگر P بر A منطبق باشد، M نیز بر A منطبق است، و در آن فقط یک مماس تنها بر S وجود دارد که همان خط AK است.)



(ب)



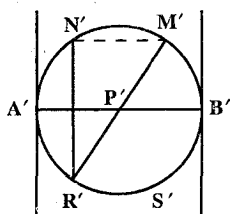
(الف)

ب. اگر P بر S باشد، روشن است که حکم مسأله صحیح است. (چون، اگر P بر A منطبق باشد، آن‌گاه N نیز بر A منطبق است و نقطه ثابت X بر A منطبق می‌شود.) بنابراین باید مسأله را برای دو حالت زیر در نظر بگیریم:

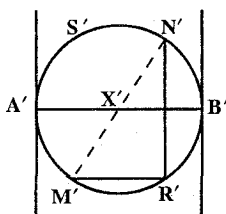
۱. P نقطه‌ای است در خارج S . صفحه نمودار مسأله را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به طوری که S به یک دایره S' بدل شود، و PK به خط بینهایت π' (شکل (پ)). پس AB به یک قطر $A'B'$ از S' بدل می‌شود، و خطهای AK و BK به مماسهای بر دایره در نقطه‌های A' و B' . به آسانی دیده می‌شود که $R'M'$ و $R'N'$

بر هم عمودند و بنابراین $M'N'$ قطری است از S' . پس به ازای هر انتخاب نقطه R' ، خط $M'N'$ از X' ، مرکز S' ، می‌گذرد؛ و حکم نتیجه می‌شود.

۲. نقطه‌ای است در داخل S (شکل (ب) در صورت مسأله). صفحه نمودار مسأله را بر یک صفحه π' تصویر می‌کنیم به طوری که دایره S به یک دایره S' بدل شود و P به P' ، مرکز S' (شکل (ت)). پس AB به قطر $A'B'$ از دایره S' ، و K به نقطه بینهایت K' از قطر عمود بر $A'B'$ بدل می‌شوند. چون $R'N' \perp A'B'$ و $M'N' \perp R'N'$ ، از این جا نتیجه می‌شود که $M'N' \parallel A'B'$ ؛ یعنی به ازای هر انتخاب نقطه R' ، خطهای $M'N'$ و $A'B'$ در نقطه بینهایت X' از $A'B'$ برخورد می‌کنند، و حکم نتیجه می‌شود.



(ت)



(ب)

۴۱۷. الف. فرض کنید l_1, l_2, l_3 و l_4 چهار خط مفروض باشند. دایره‌های محیطی مثلثهای حاصل از خطهای l_1, l_2, l_3 و l_1, l_2, l_4 را رسم می‌کنیم؛ نقطه برخورد این دایره‌ها (غیر از نقطه برخورد l_1 و l_2) را به P نشان می‌دهیم (شکل (الف)). از P عمودهایی بر خطهای l_1, l_2, l_3 و l_4 رسم می‌کنیم؛ پاهای این عمودها را M_1, M_2, M_3 و M_4 می‌نامیم. نقطه‌های M_1, M_2 و M_3 بر یک خط واقعند، و نقطه‌های M_1, M_2 و M_4 نیز بر یک خط قرار دارند؛ در نتیجه، هر چهار نقطه بالا بر یک خط واقعند. از همان مسأله نتیجه می‌شود که M_1, M_3 و M_4 تنها وقتی بر یک خط واقعند که P بر دایره محیطی مثلثی واقع باشد که ضلعهای آن را خطهای l_1, l_3 و l_4 پدید می‌آورند. به همین شیوه می‌توان نشان داد که P بر دایره محیطی مثلثی واقع است که ضلعهایش را خطهای l_1, l_2 و l_3 تشکیل می‌دهند.

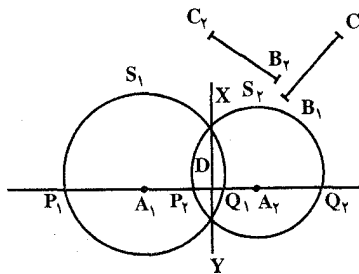
ب. با علامت‌گذاریهای شکل صورت مسأله، داریم $MP \perp AB$ (زیرا زاویه‌های MPA و MPB روبه‌رو به قطرند)؛ به همین طریق داریم $MQ \perp AC$ و $ME \perp BC$. بنابراین،

بعلاوه، چون نقطه‌های S ، R و T بر یک خط واقعند (شکل (ب))، داریم:

$$RT + TS = RS \Rightarrow \frac{bd}{r_r} + \frac{ac}{r_r} = \frac{ef}{r_r} \Rightarrow bd + ac = ef$$

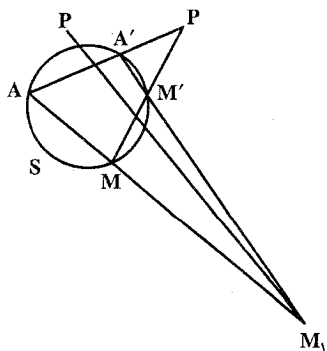
و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۴۱۸. نخست باید P_1 و Q_1 ، P_2 و Q_2 ، نقطه‌های برخورد خط‌المرکزین A_1A_2 را با S_1 و S_2 تعیین کنیم. روشن است که اگر پاره‌خط‌های P_1Q_1 و P_2Q_2 یکی در بیرون دیگری، یا یکی در داخل دیگری باشد، S_1 و S_2 متقاطع نیستند. مانده است حالتی که P_2 درون پاره‌خط P_1Q_1 و Q_1 درون پاره‌خط P_2Q_2 قرار داشته باشد.



حال D ، نقطه برخورد خط‌المرکزین A_1A_2 را با XY ، وتر مشترک S_1 و S_2 تعیین می‌کنیم (X و Y نقطه‌های مطلوب برخورد دایره‌ها هستند). بدین منظور تبدیل تصویری خط A_1A_2 را که یک نقطه واقعی R را به نقطه R' بدل می‌کند، چنان که $\angle R\hat{X}R' = 90^\circ$ ، در نظر می‌گیریم. این تبدیل، تصویری است؛ زیرا می‌تواند بترتیب زیر به دست آید:

A_1A_2 را از نقطه X بر یک دایره S ، گذرنده بر X ، تصویر می‌کنیم، سپس S را در حول مرکزش به زاویه 180° دوران می‌دهیم، و سپس S را از X بر A_1A_2 تصویر می‌کنیم. این تبدیل P_1 را به Q_1 ، و Q_1 را به P_1 ، و P_2 را به Q_2 بدل می‌کند. پس نگاره‌های این سه نقطه بر l به دست می‌آیند. با استفاده از ستاره تنها می‌توانیم به آسانی نگاره یک نقطه قبلاً مشخص شده M بر l را بر اثر تبدیل تصویری خود تعیین کنیم؛ زیرا می‌توانیم تبدیل را با تصویر l بر خط دیگر l_1 ، بعد با تصویر l_1 بر خط دیگر l_2 ، و سپس تصویر دوباره l_2 بر l تحقق بخشیم. به ویژه نقطه D می‌تواند به عنوان نگاره نقطه بینهایت خط l پیدا شود (این امر مستلزم رسم خطی است موازی با l ، و این ترسیم می‌تواند به کمک ستاره تنها انجام گیرد). خط XY در D بر A_1A_2 عمود است، پس نقطه‌های X و Y به صورت نقطه‌های برخورد XY با یکی از دایره‌های S_1 یا S_2 معین می‌شوند.



۴۱۹. گیریم P یک نقطه و S یک دایره باشد. منظور از تصویر S بر خودش از P، تبدیلی است که یک نقطه M بر S را به M'، دومین نقطه برخورد PM و S، بدل می‌کند (شکل). این تبدیل، تبدیلی است تصویری. زیرا فرض می‌کنیم A و A' یک جفت نقطه متناظر باشند، و M و M' یک جفت دیگر. M_۱، نقطه برخورد AM و A'M'، بر خط ثابت p، قطبی P نسبت به S قرار دارد. این نشان

می‌دهد که تبدیلی که M را به M' بدل می‌کند؛ می‌تواند ابتدا به وسیله تصویر S از A بر خط p (که M را به M' بدل می‌کند، (شکل)) تحقق یابد. بنابراین، تبدیل از M به M' تبدیلی است تصویری، همان گونه که ادعا کرده بودیم.

الف. رشته تبدیلهای تصویری از دایره را به شرح زیر در نظر می‌گیریم: دایره را ابتدا از P و سپس از Q، و بالاخره از O بر خودش تصویر می‌کنیم. به آسانی دیده می‌شود که اثر این تبدیلهای بر رأسهای چهارضلعی محاطی چنین است:

$$D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D, C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow C, B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow B, A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$$

این نشان می‌دهد که تبدیل تصویری حاصل، چهار نقطه ثابت دارد، پس تبدیلی است همانی. از این جا نتیجه می‌شود که اگر تصویر دایره S بر خودش از P، یک نقطه E از S را به F بدل کند، و تصویر از Q، F را به G، آن گاه تصویر از O، G را به E بدل می‌کند. اما معنی این مطلب این است که اگر دو ضلع EF و FG از یک مثلث محاطی از P و Q بگذرند، ضلع EG از O خواهد گذشت.

عیناً به همین طریق نشان می‌دهیم که رشته تصویرهای دایره بر خودش، با مرکزهای تصویر O، P و Q تبدیلی است همانی (زیرا رأسهای چهارضلعی ABCD را ثابت نگاه می‌دارد). از این جا نتیجه می‌شود که اگر دو ضلع یک مثلث محاطی از O و P بگذرند، ضلع سوم از Q خواهد گذشت.

ب. رشته تصویرهای دایره S را بر خودش، از P و Q، مجدداً از P، و باز از Q در نظر می‌گیریم. رأسهای چهارضلعی ABCD چنین تبدیل می‌شوند:

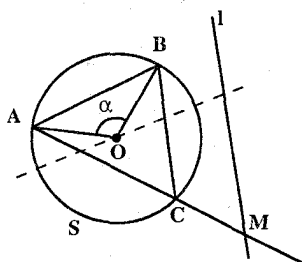
$$D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow D, C \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C,$$

$$B \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B, A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$$

از این جا نتیجه می‌شود که تبدیل حاصل، تبدیلی است همانی؛ پس اگر تصویر دایره S بر

خودش از P ، A_1 را به B_1 بدل کند، تصویر از Q ، B_1 را به C_1 ، و تصویر از P ، C_1 را به D_1 ، آن گاه تصویر از Q ، D_1 را به A_1 بدل می کند. اما این بدین معنی است که هرگاه ضلعهای A_1B_1 و C_1D_1 از یک چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ محاط در یک دایره، از نقطه P بگذرند، و ضلع B_1C_1 از Q بگذرد، آن گاه ضلع D_1A_1 نیز از Q می گذرد. گرفتن O ، نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ ، به عنوان مرکز یک تصویر از دایره بر خودش، با پیدا کردن رشته تصویرهای دایره بر خودش از P و Q هم ارز است. نقطه برخورد قطرهای چهارضلعی $A_1B_1C_1D_1$ حاصل نیز همین ویژگی را دارد و بنابراین باید بر O منطبق باشد.

ج. برهان کاملاً مشابه برهان (ب) است، و آوردن آن به عهده خواننده گذاشته می شود.



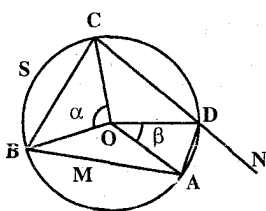
(الف)

۴۲۰. الف. زاویه مرکزی وتری به طول مفروض AB از

دایره S را به α نشان می دهیم. سپس فرض می کنیم که خط l معرف امتداد ضلع BC باشد و M نقطه ای بر AC (شکل (الف)). تبدیل تصویری از S را به شرح زیر در نظر می گیریم:

دوران S حول مرکزش به زاویه α ، سپس تقارن S نسبت به قطر عمود بر l ، و بعد تصویر S بر خودش از M . روشن است که A یک نقطه ثابت این تبدیل

است (داریم: $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$). پس A می تواند به عنوان یک نقطه ثابت از تبدیل معلومی معین شود. مسأله ممکن است دارای دو یا چند جواب باشد و یا جوابی نداشته باشد (به آسانی می توان نشان داد که تبدیل تصویری نمی تواند یک تبدیل همانی باشد).



(ب)

ب. فرض می کنیم M و N نقطه های مفروض بر ضلعهای AB و CD از چهارضلعی مطلوب باشند، و α و β زاویه های مرکزی دایره روبه رو به وترهای معلوم BC و AD (شکل (ب)). تبدیل تصویری از دایره به شرح زیر را در نظر می گیریم:

تصویر S از M بر خودش، و بعد دوران S در حول مرکزش به زاویه α ، سپس تصویر S از نقطه N بر

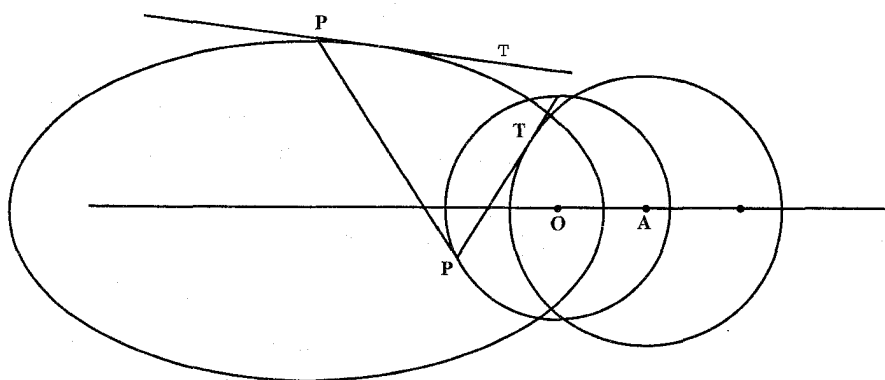
روی خودش، و بالاخره دوران S حول مرکزش به زاویه β . روشن است که A یک

نقطه ثابت تبدیل است (داریم $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$) این کلید ترسیم است. مسأله ممکن است دو جواب یا یک جواب داشته باشد و یا جوابی نداشته باشد، و در موارد استثنایی ممکن است نامعین باشد.

۶.۳. تبدیلهای آفین و تصویری در مقطعهای مخروطی

۱.۶.۳. مرکز تصویر، محور تصویر

۴۲۱. برای شکل زیر، OA یک محور تقارن است. برای بیضی و هذلولی محور تقارن دیگری عمود بر OA می توان در نظر گرفت.



۴۲۲. نقطه های P_1 و P_2 را نقطه های برخورد دو دایره عظیمه از کره α' می گیریم که یکی از آنها بر O و A می گذرد. در این صورت P_1 و P_2 در صفحه α نقطه های برخورد خطی گذرنده بر A با دایره ای هستند که از دو نقطه Q_1 و Q_2 می گذرد و این دو نقطه دوسر قطری از دایره به مرکز A و به شعاع $2k$ ، یعنی دوسر قطری از دایره تصویر استوا می باشند. چون داریم:

$$AP_1 \cdot AP_2 = AQ_1 \cdot AQ_2 = -(2k)^2$$

پس P_1 و P_2 توسط یک انعکاس منفی به هم مربوط می باشند که ترکیبی است از یک انعکاس نسبت به دایره تصویر استوا با نیمدور حول A .

۲.۶.۳. نقطه‌های: همخط، همدایره، ...

۱.۲.۶.۳. نقطه‌ها همدایره‌اند

۴۲۳. این دایره منعکس دایرة α نسبت به ω است.

۳.۶.۳. خطهای: هم‌رس، موازی، ...

۱.۳.۶.۳. خطها موازی‌اند

۴۲۴. صفحه‌های تصویرکننده دو خط هادی، باهم موازی‌اند. پس فصل مشترکهای آنها با هر صفحه، دو خط موازی است.

۴.۶.۳. زاویه

۱.۴.۶.۳. اندازه زاویه

۴۲۵. تصویر جسم نمایی حالت خاص انعکاس است.

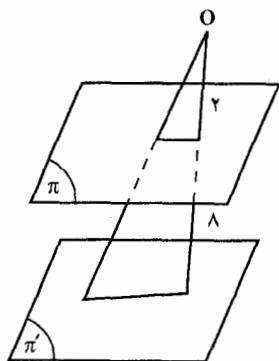
۵.۶.۳. پاره خط

۱.۵.۶.۳. اندازه پاره خط

۴۲۶. تصویر مرکزی با صفحه‌های موازی π و π' تجانس به مرکز O است. نسبت این

تجانس مساوی $3 = \frac{12}{4}$ است. بنابراین داریم:

$$\frac{M'N'}{MN} = 3 \Rightarrow \frac{M'N'}{6} = 3 \Rightarrow M'N' = 18$$



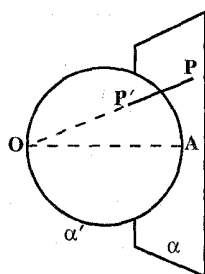
۶.۶.۳. رابطه‌های متریک

۴۲۷. اگر P را بر شاخهٔ چپ هذلولی بگیریم، داریم:

$$OP - O_1P = \varepsilon.PK - \varepsilon.PK_1 = -\varepsilon.KK_1$$

اگر P بر شاخهٔ سمت راست هذلولی باشد، علامت حاصل تغییر می‌کند.

۷.۶.۳. ثابت کنید شکلها تبدیل یافته یکدیگرند



۴۲۸. صفحهٔ عمود منصف OA (شکل) کرهٔ α' را در یک دایرهٔ عظیمهٔ خاص قطع می‌کند که اصطلاحاً آن را استوا می‌نامیم. این استوا هر دایرهٔ عظیمهٔ دیگر از کره را در دو نقطه قطع می‌کند که در دو سر یک قطر واقعند. ویژگی استوا این است، که تصویرهای قطرهای آن روی صفحهٔ α عبارتند از قطرهای دایره‌ای از این صفحه که مرکزش A و شعاعش $\frac{1}{2}k$ می‌باشد.

۸.۶.۳. رسم شکلها

۴۲۹. کرهٔ α' را در نظر می‌گیریم که بر دوازده یال مکعب در وسط آنها مماس می‌باشد. یکی از نقطه‌های برخورد این کره با خط واصل بین دو رأس روبه‌رو از مکعب را O می‌نامیم. O را مرکز تصویر جسم نمایی نسبت به کرهٔ α' قرار می‌دهیم. (هرگاه یکی از نقطه‌های برخورد خط واصل بین مرکزهای دو وجه روبه‌رو با کرهٔ α' را O و مرکز تصویر برگزینیم، شکل حاصل متقارن چپ‌ستار در حالت $n=4$ خواهد بود).

فهرست منابع جلد ۹

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف - گوتن ماخر - رابرت - توم. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.
۵. المپیادهای بین المللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریترز. ترجمه غلامرضایاسی پور. نشر ناس، نشر نام.
۶. المپیادهای بین المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمه غلامرضایاسی پور. نشر ناس، نشر نام.
۷. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۸. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمه عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۹. المپیادهای ریاضی بین المللی. جلد اول. ساموئل ال گریترز. ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۰. المپیادهای ریاضی بین المللی. جلد دوم. مورای اس کلامکین. ترجمه دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۱. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۲. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمه پرویز شهریاری - ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۳. بازآموزی و بازشناخت هندسه. ه. س. م. کوکس تیر - س. ل. گریترز. ترجمه عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۴. برگزیده مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمه عادل ارشقی. مؤسسه خدمات فرهنگی رسا.

۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمه غلامحسین صدری افشار.
۱۶. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمه غلامحسین صدری افشار.
۱۷. تاریخ هندسه. پی.یر مارشل. ترجمه دکتر حسن صفاری. مؤسسه مطبوعاتی علمی.
۱۸. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمه اسداله کارشناس - عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۹. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای. م. یاگلم. ترجمه محمدباقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای. م. یاگلم. ترجمه محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۱. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۲. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمه احمد آرام. مؤسسه مطبوعاتی کیهان.
۲۳. چند قضیه هندسه. نگارش دکتر احمد شرفالدین.
۲۴. ۴۵۰ مسأله ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی - حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۵. حل المسائل هندسه جدید. حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۶. حل المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی - محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۷. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۲۸. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمه محمدباقر ازگمی - احسان اله قوامزاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۲۹. حل مسائل هندسه برای دانش آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۰. حل مسائل هندسه برای دانش آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۱. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی - غلامرضا بهنیا - باقر امامی - پرویز شهریاری. مؤسسه انتشارات امیرکبیر.
۳۲. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۳. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده ها. غلامعلی ریاضی.

- علی حسن زاده - محمدحسین پرتوی - محمد عابدی. مؤسسه مطبوعاتی شرقی.
۳۴. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی - پرویز شهریاری - غلامرضا بهنیا - باقر امامی - علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.
۳۵. خلاصه زندگینامه علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامه بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۶. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۷. خطهای راست و منحنی ها. ن. ب. واسیلیو - و. ل. گوتنماخر. ترجمه پرویز شهریاری - ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۸. دربی فیئاغورس. شهپان النسکی. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۹. دوره حل المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۰. دوره کامل خودآموز هندسه علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۱. دوره مجله ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۲. دوره مجله ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۴۳. دوره مجله رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۴. دوره مجله ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۴۵. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۶. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمه پرویز شهریاری. نشر میترا.
۴۷. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمه دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۸. سرگرمیهای هندسه. ی. پرلمان. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۹. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضایاسی پور.
۵۰. گوشههایی از ریاضیات دوره اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمه دکتر محمدقاسم وحیدی اصل - دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۵۱. محاسبه های برداری. پرویز شهریاری.
۵۲. مجموعه مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضایاسی پور.
۵۳. مسأله های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای. اس. کلامکین. ترجمه پرویز شهریاری.

- ابراهیم عادل. نشر بردار.
۵۴. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف - یه‌گوروف. ترجمه پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۵۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۶. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمه پرویز شهریاری. نشر نی.
۵۷. مسأله‌های ریاضی آسان ولی... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمه پرویز شهریاری. نشر گستره.
۵۸. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاخنو. ترجمه پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۵۹. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. سیواشینسکی. ترجمه غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.
۶۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا. جلد اول. چارلز. ت. سالکیند. ترجمه سیدحسین جوادپور - محمدقل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمه علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا. جلد سوم. چارلز. ت. سالکیند. جیمز. ارل. ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی آمریکا. جلد چهارم. آرتینو گاکلیون - شل. ترجمه عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۴. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای شوروی سابق). و. س. کوشچنکو. ترجمه پرویز شهریاری. مؤسسه انتشارات امیرکبیر.
۶۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمه دکتر سعید فاریابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمه محمد مهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۷. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسان‌اله قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوآر تهران.
۶۸. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی -

پرویز شهریاری. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.

۶۹. مسأله‌هایی در هندسه مسطحه. ای. ف. شاریگین. ترجمه ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.

۷۰. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی - چنتسوف - یاگلوب. ترجمه پرویز شهریاری - ابراهیم عادل. انتشارات مجید - انتشارات فردوس.

۷۱. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۷۲. نابرابریهای هندسی. نیکولاس. د. کازارینوف. ترجمه دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۷۳. نه مقاله هندسه. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری.

۷۴. هندسه ایرانی. ابوالوفامحمدبن محمدالبوزجانی. ترجمه سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.

۷۵. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمه م. ه. شفیعپها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۷۶. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعه علوم). محمدباقر ازگمی - باقر امامی - غلامرضا بهنیا - پرویز شهریاری - علی اصغر شیخ‌رضایی. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.

۷۷. هندسه تحلیلی. حسین غیور - محسن غیور. انتشارات صفی‌علیشاه.

۷۸. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمه غلامرضایاسی‌پور. انتشارات مدرسه.

۷۹. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعه کتابهای سیمرغ.

۸۰. هندسه دلپذیر. دکتر احمدشرف‌الدین. انتشارات مدرسه.

۸۱. هندسه دوایر. دکتر محسن هشترودی. از انتشارات مجله ریاضی یکان.

۸۲. هندسه دوره کاردانی تربیت معلم رشته علوم ریاضی. صفر با همت شیروانه ده - حسین غیور - حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.

۸۳. هندسه ۲ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

۸۴. هندسه سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری.

۸۵. هندسه سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

۸۶. هندسه مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسه نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلر کورت. ترجمه محمود دیانی. انتشارات فاطمی.

۸۷. هندسه مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین ا. موئیز. ترجمه دکتر امیر خسروی -

محمود نصیری. انتشارات مبتکران.

۸۸. هندسهٔ مؤتیز - دانتز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.

۸۹. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

۹۰. هندسهٔ ۱ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

91. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR. F. G. M.

92. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR. Th. CARONNET.

93. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES).
PAR. G. PAPELIER.

94. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS
POLAIRES) PAR G. PAPELIER.

95. GEOMETRY A HIGH SCHOOL COURSE. SERGE LANGE. GENE
MURROW.

96. GIANT COLOUR BOOK OF MATHEMATICS BY IRVING ADLER.

97. GUIDES PRATIQUES BORDAS.

II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE'.

98. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.

99. LES NOMBRES ET LEURS MYSTÈRES PAR ANDRE' WARUSFEL.

100. MATHEMATICS AROUND US.

101. MÉMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR. A. PONT.

102. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A. M. WELCHONS. W. R.
KRICKENBERGER, HEIEN. R. PEARSON.

103. PRÉCIS DE GÉOMÉTRIE PAR ANDRE' VIEILLEFOND. P. TURMEL.

104. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY
CORBITT.

105. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT
RICH.

106. RESOLUTION DES PROBLÈMES ÉLÉMENTAIRES DE GEOMETRIE
PAR. E. J. HONNET.

107. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC
DONOUGH. ALVIN. J. HANSEN.